4 LOS MOVIMIENTOS MÁS SENCILLOS

4.1. EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

1. Cita tres movimientos, al menos, en los que la trayectoria sea rectilínea y la aceleración, nula.

- Un coche circulando por una carretera recta.
- Un caballo cabalgando al trote.
- La subida de los materiales de construcción por una grúa.
- El desplazamiento de un puente-grúa a lo largo de una nave.

Si se analizan cuidadosamente, los ejemplos que se proponen no son m.r.u. El coche acelera y frena al moverse, al igual que el caballo, y lo mismo ocurre con la grúa o con el puente-grúa. Sin embargo, el modelo sirve a grandes rasgos y permite establecer predicciones fiables sin tener en cuenta esas variaciones. Ello explica que el modelo físico de la realidad sea tan importante, ya que permite a la ciencia hacer predicciones fiables de la realidad.

2. El vector posición que describe el movimiento de un objeto es: $\vec{r} = (3, 2 \cdot t, 4 + t)$. ¿Se trata de un m.r.u.?

Un m.r.u. viene definido por dos características que podemos cuantificar:

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}} \quad ; \quad a = 0$$

Para comprobar si el movimiento que nos proporciona el vector de posición en cada instante es un m.r.u., debemos comprobar si la velocidad es constante (independiente del tiempo, t). Si esto es así, es decir, si el vector velocidad es constante, el vector aceleración será nulo, y el movimiento será rectilíneo uniforme.

Calculemos, por tanto, el vector velocidad y el vector aceleración:

$$\vec{r} = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j} + (4 + t) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot (t + \Delta t) \cdot \vec{j} + (4 + t + \Delta t) \cdot \vec{k} - [3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j} + (4 + t) \cdot \vec{k}]}{\Delta t} =$$

$$= \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \vec{j} + \Delta t \cdot \vec{k}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = (2 \cdot \vec{j} + \vec{k}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Como $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cte}} \rightarrow \Delta \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = 0$

Los resultados que obtenemos confirman que se trata de un m.r.u.

Es interesante observar que si la función que define el vector de posición es de primer orden (la variable independiente está elevada a potencia 1, como máximo), su velocidad será constante. Por tanto, dado un vector de posición cualquiera, es posible detectar inmediatamente si el móvil al que corresponde dicho vector describe un m.r.u.

3. Un cuerpo se encuentra en movimiento. Dicho movimiento es de tal naturaleza que la componente normal de la aceleración es nula. ¿Qué podemos decir acerca de la naturaleza de ese movimiento?

La componente normal de la aceleración se calcula mediante la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

donde R representa el radio de curvatura de la trayectoria. Si $a_N = 0$ para un cuerpo en movimiento ($v \neq 0$), se debe cumplir que $R \to \infty$, es decir, que su trayectoria sea rectilínea.

4. En el ejercicio anterior, ¿cómo es el movimiento, si la que es nula es la componente tangencial de la aceleración? ¿Y si son ambas?

La componente tangencia de la aceleración representa la variación del módulo de la velocidad con el tiempo:

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Para que esta componente de la aceleración sea nula, debe cumplirse que el módulo de la velocidad permanezca constante, por lo que debe tratarse de un movimiento uniforme (rectilíneo o circular).

Si ambas componentes son nulas, el cuerpo realiza un movimiento rectilíneo uniforme.

5. En un movimiento uniforme, ¿es necesario que la velocidad sea constante?

No. Para que el movimiento sea uniforme es suficiente con que el módulo de la velocidad sea constante, aunque puede no serlo su dirección.

6. Ordena de menor a mayor los siguientes valores, que corresponden a la velocidad con que se mueven varios cuerpos: 45 km/h, 12 m/s, 10 nudos.

Para poder comparar estas velocidades, debemos expresarlas todas en las mismas unidades. Realizamos la conversión a las unidades del Sistema Internacional:

$$v_1 = 45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 45 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 12{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_3 = 10 \text{ nudos} = 10 \ \frac{\text{milla}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,852 \text{ m}}{1 \text{ milla}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 5{,}14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por tanto:

$$v_3 < v_2 < v_1$$

$$10 \text{ nudos} < 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} < 45 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

4.2. EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME ACELERADO

1. El vector posición que describe el movimiento de un objeto es: $\vec{r} = (3, 2 \cdot t, 4 + t)$ donde $\vec{r}$ se mide en metros y t, en segundos.

a) Calcula la velocidad con que se mueve el objeto y confecciona los gráficos posición-tiempo y velocidad-tiempo que corresponden al movimiento.

b) Representa en un sistema de referencia la trayectoria del movimiento que describe el objeto entre los instantes t = 0 s y t = 5 s.

a) Como hemos visto en la actividad 2 del epígrafe 4.1., se trata de un m.r.u. Si llamamos r_0 a la posición en el instante $t = 0$, la ecuación de la posición es:

$$r = r_0 + v \cdot t \rightarrow r = 5 + \sqrt{5} \cdot t$$

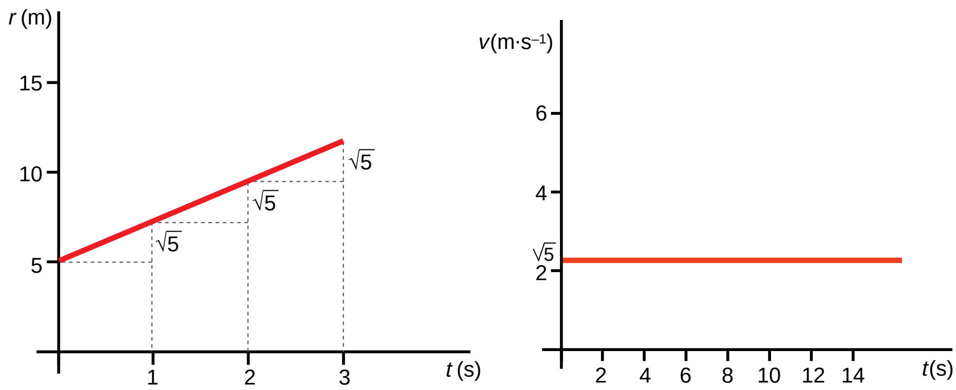
siendo:

$$r_0 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

$$\vec{v} = (2 \cdot \vec{j} + \vec{k}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Las gráficas que nos piden que dibujemos son las que se indican a continuación. La gráfica que permite calcular la posición sobre la trayectoria en función del tiempo la hemos obtenido suponiendo que el origen a partir del que medimos dicha posición es el punto en el que se encuentra el móvil en el instante $t = 0$, es decir, el punto (3, 0, 4) m (si las unidades de medida son unidades del S.I.). A partir de ese instante, el objeto se mueve con velocidad $\sqrt{5}$ m · s^{-1}, siendo la distancia recorrida en cada instante el área encerrada por la curva de la gráfica v-t.



b) Para obtener la ecuación de la trayectoria, necesitamos las ecuaciones paramétricas del movimiento, que se obtienen directamente de la expresión que proporciona el vector posición. En el caso que nos ocupa, dichas ecuaciones son:

$$x = 3$$

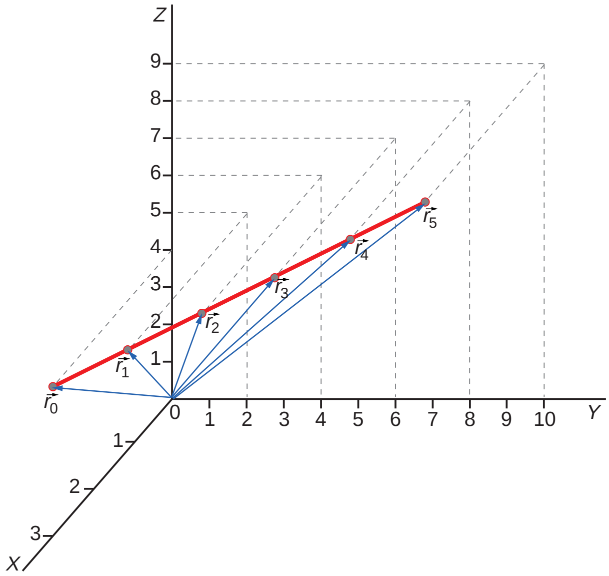
$$y = 2 \cdot t$$

$$z = 4 + t$$

Si eliminamos ahora la variable tiempo en dichas ecuaciones, obtenemos la ecuación de la trayectoria, que se ha dibujado en la siguiente gráfica:

$$x = 3$$

$$y = 2 \cdot t \rightarrow t = \frac{y}{2} \rightarrow \text{trayectoria} \rightarrow \begin{cases} z = 4 + \dfrac{y}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$



Al calcular el módulo del vector posición, se obtiene:

$$|\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 4 \cdot t^2 + (4 + t)^2} = \sqrt{25 + 8 \cdot t + 5 \cdot t^2}$$

Es evidente que dicho resultado no se corresponde con una variación lineal. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la variación que determina que el movimiento sea rectilíneo uniforme es la que tiene lugar sobre la trayectoria rectilínea, variación que sí es constante, a diferencia de lo que ocurre con la longitud y dirección del vector posición, que varía con el tiempo.

Creemos interesante hacer ver a los alumnos y a las alumnas la diferencia que existe entre distancia recorrida sobre la trayectoria y vector posición, ya que en los movimientos en dos dimensiones tendemos a colocar el origen del sistema de referencia sobre la trayectoria y, en ese caso, si el movimiento es rectilíneo, las variaciones de longitud que experimenta el vector posición coinciden numéricamente con la distancia recorrida. Por ello, precisamente, se pueden resolver problemas de cinemática en dos dimensiones sin tener en cuenta que las magnitudes son vectoriales, lo cual es ya mucho más difícil cuando analizamos un problema real en un espacio tridimensional.

2. Un tren parte de la estación con una aceleración constante de 1,7 m · s^{-2}. ¿Con qué velocidad, expresada en km/h, se mueve transcurridos 15 s?

Aplicando la ecuación de la velocidad en un m.r.u.a., obtenemos:

$$v = v_0 + a \cdot (t - t_0) \rightarrow v = 0 + 1{,}7 \cdot (15 - 0) = 25{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 91{,}8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

4.3. CAÍDA LIBRE Y LANZAMIENTO VERTICAL

1. Tenemos tres bolas iguales. Simultáneamente, y desde una altura de 16 m, se deja caer una de ellas libremente; otra se lanza verticalmente hacia arriba a 20 m · s^{-1}, y la tercera se lanza con la misma velocidad verticalmente hacia abajo. Calcula cuándo llega al suelo cada bola y representa en gráficos *a-t*, *v-t* y *s-t* el movimiento de cada una de las tres bolas.

Aunque no lo indica el texto, por sencillez de cálculo tomaremos g = 10 m · s^{-2}. Para resolver el problema, situamos el origen del sistema de referencia en el suelo. De ese modo, la posición inicial de las tres bolas será 16 m, medidos respecto al suelo. Las ecuaciones que permiten calcular la posición de cada una de las bolas en función del tiempo son, respectivamente:

$$y_1 = 16 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_1^2$$

$$y_2 = 16 + 20 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_2^2$$

$$y_3 = 16 - 20 \cdot t_3 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_3^2$$

En estas expresiones, el subíndice 1 es para la bola que se mueve en caída libre; el 2, para la bola que lanzamos hacia arriba, y el 3, para la bola que lanzamos hacia abajo.

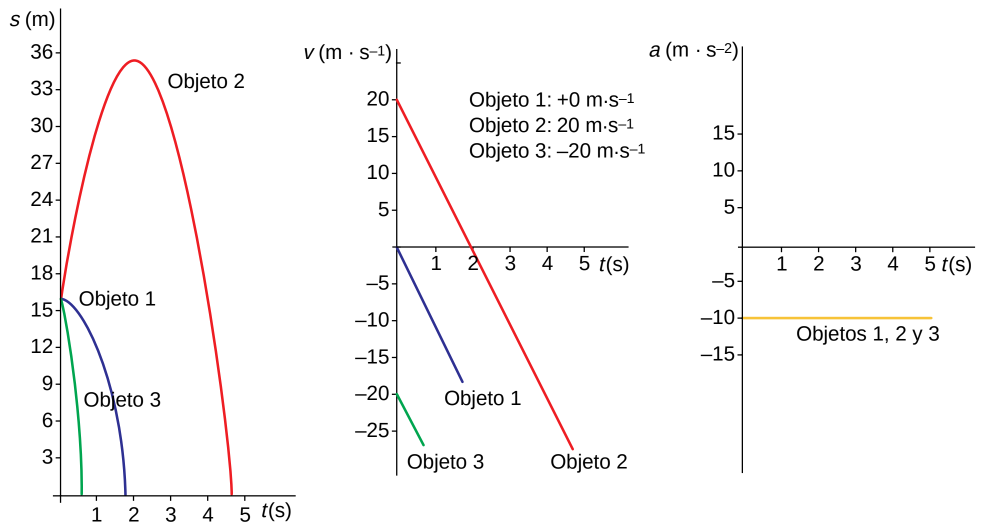
Para calcular el tiempo que tarda en caer cada bola, debemos tener en cuenta que, al llegar al suelo, su posición se anula, ya que las bolas se encuentran en el origen del sistema de referencia (y = 0). Sabiendo esto, resulta sencillo despejar el tiempo en las expresiones anteriores y resolver la ecuación de segundo grado que se obtiene en cada caso. Los resultados son los siguientes:

$$y_1 = 0 \rightarrow t_1 = 1{,}79 \text{ s}$$

$$y_2 = 0 \rightarrow t_2 = 4{,}68 \text{ s}$$

$$y_3 = 0 \rightarrow t_3 = 0{,}68 \text{ s}$$

Los gráficos que nos piden son los siguientes:



2. Demuestra que, si se lanza verticalmente hacia abajo un objeto desde cierta altura, con velocidad inicial v_0, la velocidad en cualquier punto, v, viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot \Delta s}}$$

siendo Δs la distancia recorrida por la bola en la caída.

Las ecuaciones del movimiento para un lanzamiento vertical, tomando el suelo como origen, son:

$$\begin{cases} -v = -v_0 - g \cdot t \\ y = y_0 - v_0 \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Si despejamos ahora el tiempo en la expresión de la velocidad y lo sustituimos en la ecuación de la posición, obtenemos la expresión que nos piden:

$$y - y_0 = -v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{g}\right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v - v_0}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{v_0^2 - v \cdot v_0}{g} - \frac{1}{2 \cdot g} \cdot (v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2) =$$

$$= \frac{2 \cdot v_0^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 - (v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2)}{2 \cdot g} =$$

$$= -\frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot g}$$

Como se puede apreciar en la figura correspondiente al lanzamiento vertical hacia abajo de la página 79 del libro del alumnado, $y - y_0$ es una cantidad negativa. Sin embargo, la distancia recorrida es siempre positiva. Por tanto, haciendo $\Delta s = y_0 - y$, llegamos finalmente al resultado que buscamos:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot g \cdot \Delta s \rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot \Delta s}$$

4.4. EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

1. Teniendo en cuenta la definición de radián, calcula a cuántos grados equivalen 1,5 radianes.

Un radián es el ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual a la de su radio.

Como el perímetro de una circunferencia es: $P = 2 \cdot \pi \cdot R$, contiene $2 \cdot \pi$ veces el radio, es decir, $2 \cdot \pi$ radianes. Como además una circunferencia abarca 360°, el número de grados a que equivale un radián es:

$$2 \cdot \pi \text{ rad} = 360° \rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360°}{2 \cdot \pi} = 57{,}3°$$

Por tanto, 1,5 radianes son:

$$1{,}5 \text{ rad} = 1{,}5 \cdot 57{,}3 = 85{,}94°$$

2. **Sin hacer uso de la calculadora, indica a cuántos grados equivalen π, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ y $3 \cdot \pi$ radianes.**

- π rad = 180°
- $\frac{\pi}{4}$ rad = 45°
- $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ rad = 120°
- $3 \cdot \pi$ rad = 540°

3. **Expresa en unidades S.I. las siguientes velocidades angulares:**

- **3 000 r.p.m.**
- **30 rad · min^{-1}**
- **36 000 rad · h^{-1}**

- $3\,000 \ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 314{,}16 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $30 \ \frac{\text{rad}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0{,}5 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
- $36\,000 \ \frac{\text{rad}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 10 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

4. **Un disco gira a 72 r.p.m. Calcula la distancia que recorre, en 30 s, un punto situado a 8 cm del eje de giro del disco.**

La velocidad angular con que gira el disco, en unidades del Sistema Internacional es:

$$\omega = 72 \text{ r.p.m.} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 2{,}4 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Teniendo en cuenta la relación entre velocidad lineal y velocidad angular, la distancia que recorre el punto situado a 8 cm del eje resulta:

$$s = v \cdot t \rightarrow s = \omega \cdot r \cdot t$$

$$s = 2{,}4 \cdot \pi \cdot 0{,}08 \cdot 30 = 18{,}1 \text{ m}$$

5. **Una rueda de 50 cm de diámetro gira a 95 r.p.m. Calcula:**

a) La velocidad angular de la rueda, en unidades S.I.

b) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa.

c) La velocidad lineal con que se mueve un punto de la periferia de la rueda.

d) La aceleración normal de dicho punto.

a) En las unidades del S.I., la velocidad angular de la rueda es:

$$\omega = 95 \text{ r.p.m.} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 9{,}95 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El tiempo que tarda en dar una vuelta completa es el período del movimiento:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi}{9{,}95} = 0{,}63 \text{ s}$$

c) La relación entre velocidad lineal y velocidad angular es la siguiente:

$$v = r \cdot \omega$$

Por tanto, para un punto de la periferia, la velocidad lineal resulta:

$$v = 0{,}25 \cdot 9{,}95 = 2{,}49 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

d) La aceleración normal se calcula mediante la expresión:

$$a_N = \frac{v^2}{r} \rightarrow a_N = \frac{2{,}49^2}{0{,}25} = 24{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

6. La Luna describe en torno a la Tierra un movimiento que es, aproximadamente, circular y uniforme. Su período es de 28 días, siendo la distancia que separa los centros de ambos astros 384 000 km. Con esta información, calcula la velocidad lineal y angular con que se mueve la Luna en su rotación alrededor de la Tierra.

En una vuelta completa, la Luna recorre una distancia:

$$s = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow s = 2 \cdot \pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8 = 2{,}41 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Por tanto, la velocidad lineal resulta:

$$v = \frac{s}{T} \rightarrow v = \frac{2{,}41 \cdot 10^9}{28 \cdot 86\,400} = 997{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y la velocidad angular:

$$v = \omega \cdot r \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$\omega = \frac{996{,}2}{3{,}84 \cdot 10^8} = 2{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

4.5. EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

1. Cita tres movimientos en los que la trayectoria sea una composición de movimientos.

a) El movimiento de un avión que planea.

b) El movimiento parabólico que describe una pelota de baloncesto al ser lanzada.

c) El movimiento de una bola de billar impulsada “con efecto”.

2. En la cuestión anterior, señala cuáles son esos dos movimientos.

a) El movimiento del avión que planea es el resultado del movimiento de avance del avión (un movimiento que tiende a ser ascensional) y el m.r.u.a. debido a la interacción gravitatoria, que tiende a hacerle caer al suelo. De ahí que, con pericia, el avión planee horizontalmente.

b) Este movimiento es una composición del movimiento que inicialmente comunica el jugador a la pelota y el m.r.u.a. debido a la interacción gravitatoria, que tiende a hacerle caer al suelo.

c) Este movimiento es la composición de un movimiento de avance, debido al impulso mecánico que le proporciona el taco a la bola, y uno de rotación que es el que le imprime el "efecto" y que hace que la trayectoria no sea rectilínea.

3. Lanzamos horizontalmente una piedra. ¿Qué trayectoria describe? ¿Eres capaz de descomponerla en dos movimientos?

Si lanzamos la piedra desde la superficie de la mesa dándole un golpe horizontal, el movimiento de caída que describe la piedra es una trayectoria curvilínea. Para averiguar cómo es esa curva, habría que diseñar una experiencia que permitiese medir las coordenadas de los puntos correspondientes a esa trayectoria, aunque, como sabemos, es la que corresponde a un tiro horizontal.

4. En la cuestión anterior, ¿cómo son los dos movimientos que, juntos, explican la trayectoria de la piedra?

La piedra describe un movimiento horizontal en el que la velocidad inicial es aquella con que lanzamos la piedra. El movimiento horizontal, si despreciamos el rozamiento con el aire, es un m.r.u.

También describe un movimiento vertical, debido a la fuerza peso de la propia piedra. Dicho movimiento es un m.r.u.a. cuya aceleración es la de la gravedad.

5. Un yate de vela se mueve rumbo norte, impulsado por sus motores, con una velocidad de 22 km/h. Aprovechando que sopla viento procedente del sudoeste, despliega sus velas. La fuerza del viento le imprime una velocidad de 12 m/s. Calcula la velocidad de la embarcación y la dirección de su trayectoria.

El movimiento del yate es una composición de dos movimientos: un movimiento rectilíneo uniforme en dirección norte y otro, rectilíneo uniforme también, pero en dirección nordeste (impulsado por un viento procedente del sudoeste). Sus velocidades respectivas son:

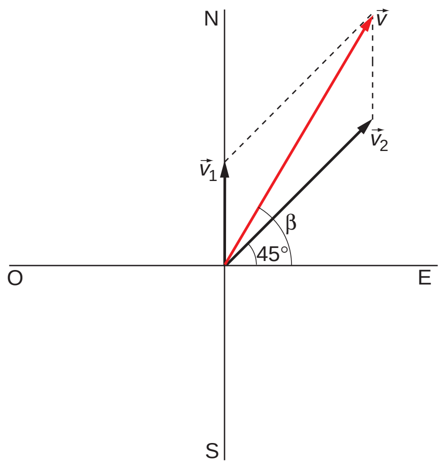
$$v_1 = 22 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 6{,}11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{v}_1 = 6{,}11 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_2 = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{v}_2 = 12 \cdot \cos 45° \cdot \vec{i} + 12 \cdot \operatorname{sen} 45° \cdot \vec{j} =$$

$$= (8{,}49 \cdot \vec{i} + 8{,}49 \cdot \vec{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



donde hemos tenido en cuenta que la dirección nordeste forma un ángulo de 45° con la dirección oeste-este, es decir, con el eje de abscisas en nuestro sistema de referencia, como se aprecia en la figura de la derecha.

Aplicando el principio de superposición, la velocidad del yate será la suma vectorial de estas dos velocidades:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\vec{v} = 6{,}11 \cdot \vec{j} + 8{,}49 \cdot \vec{i} + 8{,}49 \cdot \vec{j} = (8{,}49 \cdot \vec{i} + 14{,}6 \cdot \vec{j})\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = \sqrt{8{,}49^2 + 14{,}6^2} = 16{,}89\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Esta velocidad es constante, por lo que el yate sigue un movimiento rectilíneo uniforme. El ángulo que forma su trayectoria con la dirección este-oeste es el siguiente:

$$\beta = arctg\ \frac{v_y}{v_x} = arctg\ \frac{14{,}6}{8{,}49} = 59{,}8°$$

4.6. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

1. Comprueba que se consigue el mismo alcance con dos ángulos de tiro diferentes si estos son complementarios.

El ángulo complementario de un ángulo genérico, θ, es aquel que sumado a dicho ángulo da como resultado 90°. Por tanto, el complementario de θ es $90° - \theta$.

Observa ahora en la expresión que proporciona el alcance en el tiro parabólico, que para dos ángulos complementarios resulta:

$$x_{máx}\,(\theta) = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot sen\,\theta \cdot cos\,\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot sen\,(2 \cdot \theta)}{g}$$

$$x_{máx}\,(90° - \theta) = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot sen\,(90° - \theta) \cdot cos\,(90° - \theta)}{g} =$$

$$= \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot sen\,[2 \cdot (90° - \theta)]}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot sen\,(180° - 2 \cdot \theta)}{g} =$$

$$= \frac{v_0^2 \cdot sen\,(2 \cdot \theta)}{g}$$

Como ves, el alcance es el mismo en los dos casos.

2. Calcula la velocidad con la que debemos lanzar un proyectil si el ángulo de tiro es de 37° y queremos que el alcance sea de 1 000 m.

Haciendo uso de la ecuación que proporciona el alcance en el tiro oblicuo, resulta:

$$x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen\,(2 \cdot \theta)}{g} \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x_{máx}}{sen\,(2 \cdot \theta)}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 1\,000}{sen\,(2 \cdot 37°)}} = 101\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3. ¿Qué altura máxima alcanza el proyectil de la cuestión anterior?

A partir de la expresión que proporciona la altura máxima en un tiro parabólico, obtenemos el siguiente resultado:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen^2\theta}{2 \cdot g} \rightarrow y_{máx} = \frac{101^2 \cdot sen^2 37°}{2 \cdot 9{,}8} = 188{,}4\ \text{m}$$

4. Calcula el alcance y la altura máxima de ese proyectil si lo lanzamos con idéntica velocidad, pero con un ángulo de tiro de 53°.

Lo único que varía ahora es el ángulo de tiro, que es el complementario. Sustituyendo en las expresiones anteriores este nuevo dato, resulta:

$$x_{máx} = 1\,000 \text{ m} \quad ; \quad y_{máx} = 331{,}8 \text{ m}$$

5. Se lanza un proyectil en una zona llana, en una dirección que forma un ángulo de 40° con la horizontal. La velocidad con que parte el proyectil es de 600 m/s. Despreciando rozamientos, calcula el alcance, la altura máxima, la velocidad del proyectil cuatro segundos después del lanzamiento y el tiempo que tarda en caer al suelo.

Utilizando las fórmulas que hemos visto en el desarrollo de este epígrafe del libro del alumnado, el alcance resulta:

$$x_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen\ (2 \cdot \theta)}{g}$$

$$x_{máx} = \frac{600^2 \cdot sen\ (2 \cdot 40°)}{9{,}8} = 36\,176{,}61 \text{ m}$$

Y la altura máxima:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot sen^2\ \theta}{2 \cdot g}$$

$$y_{máx} = \frac{600^2 \cdot sen^2\ 40°}{2 \cdot 9{,}8} = 7\,588{,}95 \text{ m}$$

El valor de la velocidad, cuatro segundos después del lanzamiento, lo obtenemos mediante la expresión:

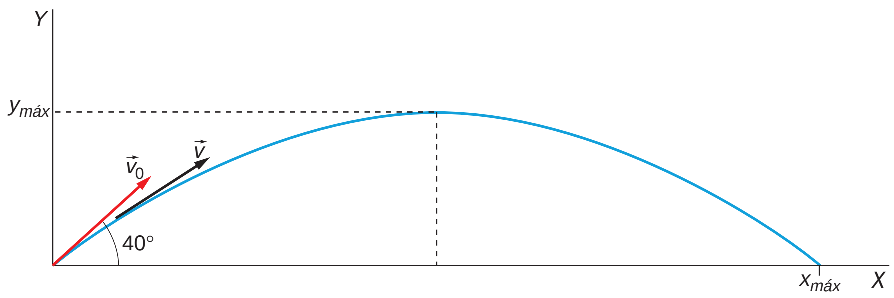
$$v = \sqrt{v^2{}_0 \cdot cos^2\ \theta + (v_0 \cdot sen\ \theta - g \cdot t)^2}$$

$$v = \sqrt{600^2 \cdot cos^2\ 40° + (600 \cdot sen\ 40° - 9{,}8 \cdot 4)^2} = 575{,}59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La expresión vectorial de la velocidad en ese instante es la siguiente:

$$\vec{v} = v_0 \cdot cos\ \theta \cdot \vec{i} + (v_0 \cdot sen\ \theta - g \cdot t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = (459{,}63 \cdot \vec{i} + 346{,}47 \cdot \vec{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Por último, el tiempo que tarda el proyectil en caer al suelo podemos calcularlo utilizando la expresión del desplazamiento horizontal:

$$x = v_0 \cdot \cos \theta \cdot t$$

Despejando el tiempo y sustituyendo obtenemos:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \theta} \rightarrow t = \frac{36\,176{,}61}{600 \cdot \cos 40°} = 78{,}71 \text{ s}$$

6. Desde lo alto de un acantilado, a 180 m sobre el nivel del mar, lanzamos, con ayuda de una raqueta, una pelota con una velocidad horizontal de 26,4 m/s. Calcula la distancia a la que se encontrará del pie del acantilado cuando impacte con el mar.

Se trata de un tiro horizontal, en el que la expresión que describe su trayectoria es la siguiente:

$$y = h - \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$$

La distancia que nos piden es el alcance del lanzamiento, correspondiente a la cota de altura $y = 0$.

Por tanto:

$$x_{máx} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \rightarrow x_{máx} = 26{,}4 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 180}{9{,}8}} = 160 \text{ m}$$

ACTIVIDADES DE LA UNIDAD

CUESTIONES

1. Define, de manera concisa, las características que corresponden a cada uno de los tres movimientos que se indica:

a) Rectilíneo.

b) Uniforme.

c) Rectilíneo uniforme.

a) Es un movimiento caracterizado por seguir una trayectoria rectilínea.

b) Se trata de un movimiento en el que el módulo de la velocidad permanece constante. Dicho de otro modo, es un movimiento en el que la componente tangencial de la aceleración es nula.

c) En este movimiento, el vector velocidad permanece constante. Por tanto, las dos componentes intrínsecas de la aceleración (tangencial y normal) son nulas.

2. Indica, de forma sucinta, las principales características de cada uno de los siguientes movimientos:

a) Acelerado.

b) Uniformemente acelerado.

c) Rectilíneo uniformemente acelerado.

a) Es un movimiento en el que el módulo de la velocidad es variable.

b) Es aquel movimiento en el que el módulo de la velocidad varía (aumenta o disminuye) de modo constante.

c) Se trata de un movimiento en el que el módulo de la velocidad varía de modo constante y que, además, sigue una trayectoria rectilínea.

3. Los tres movimientos que se relacionan a continuación, están sometidos a la acción de la gravedad. ¿En qué se diferencian unos de otros?

a) Caída libre.

b) Lanzamiento horizontal.

c) Parabólico.

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La aceleración del movimiento es debida a la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra y, por tanto, está dirigida verticalmente hacia abajo.

b) Este movimiento es la composición de un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento de caída libre.

c) Es la composición de un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento de caída libre con componente vertical de la velocidad inicial positiva. El lanzamiento horizontal se diferencia del parabólico en que en el horizontal la componente vertical de la velocidad inicial es nula.

4. Explica brevemente las características más relevantes de cada uno de los movimientos siguientes:

a) Circular.

b) Circular uniforme.

c) Circular uniformemente acelerado.

a) Es aquel movimiento que sigue una trayectoria en la que el radio de curvatura no tiende a infinito. Por tanto, la componente normal de la aceleración no es nula.

b) Es un movimiento circular en el que el módulo de la velocidad permanece constante, es decir, la componente tangencial de la aceleración es nula.

c) Se trata de un movimiento circular caracterizado por tener una componente tangencial de la aceleración cuyo valor es constante.

5. ¿Puede un cuerpo que se mueve tener su velocidad dirigida verticalmente hacia arriba y su aceleración dirigida verticalmente hacia abajo? Justifica la respuesta.

Sí. Se trata de un lanzamiento vertical hacia arriba. Durante el tiempo que dura el movimiento, el cuerpo está bajo el efecto de la atracción gravitatoria, que produce una aceleración negativa, pero mientras el cuerpo sube, su velocidad es vertical hacia arriba.

6. ¿En qué movimiento es nula la variación del módulo de la velocidad, no siendo nula la aceleración? Justifica la respuesta.

En el movimiento circular uniforme, la variación del módulo de la velocidad es nula, ya que v = cte, pero tiene una aceleración cuya componente normal no es nula:

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

7. La fuerza que permite a un objeto moverse en una trayectoria circular se denomina:

a) Centrífuga.

b) Circular.

c) Centrípeta.

d) Normal.

Como se indica en el texto, la fuerza que le obliga a moverse circularmente es la fuerza centrípeta. La respuesta correcta es, por tanto, la **c).**

8. Un cuerpo gira con movimiento circular, atado al extremo de una cuerda. Si esta se rompe, la trayectoria del cuerpo respecto al círculo inicial debe ser:

a) Tangencial.

b) Radial.

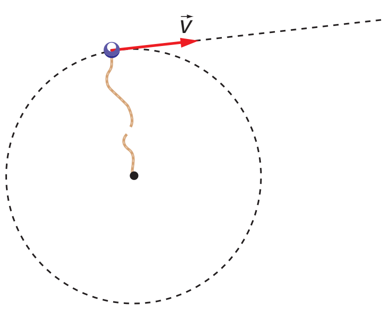
c) El propio círculo.

d) Indefinida.

El vector velocidad siempre es tangente a la ecuación de la trayectoria.

Teniendo esto claro, piensa ahora en un movimiento circular: la dirección de la velocidad en cada punto del círculo que describe el móvil será la tangente al círculo en dicho punto. Por tanto, si el objeto se “libera” de su trayectoria circular, seguirá moviéndose en dirección tangente al círculo a partir del punto en que se encontrase en el instante en que la cuerda se rompió.

La respuesta correcta es, por tanto, la **a).**



9. Desde un avión que vuela horizontalmente, se lanza un paracaidista. Transcurridos unos instantes desde que ha abierto el paracaídas, el movimiento vertical que describe es un movimiento:

a) Rectilíneo uniforme.

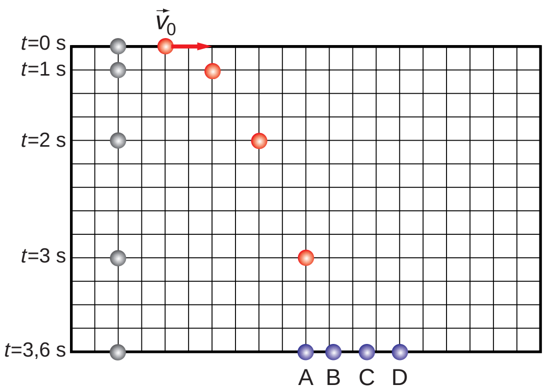
b) Rectilíneo uniformemente acelerado.

c) Variado.

d) De frenado.

La respuesta puede depender de lo largo que sea el instante. Sin embargo, si este es suficientemente largo (algunos segundos desde que se abre el paracaídas), la respuesta correcta es la **a).**

10. En el diagrama se muestran las sucesivas posiciones, a intervalos de tiempo iguales, que alcanzan dos bolas que han sido lanzadas a la vez desde el mismo punto, la primera con velocidad horizontal v_0 y la segunda en caída libre (velocidad inicial nula).



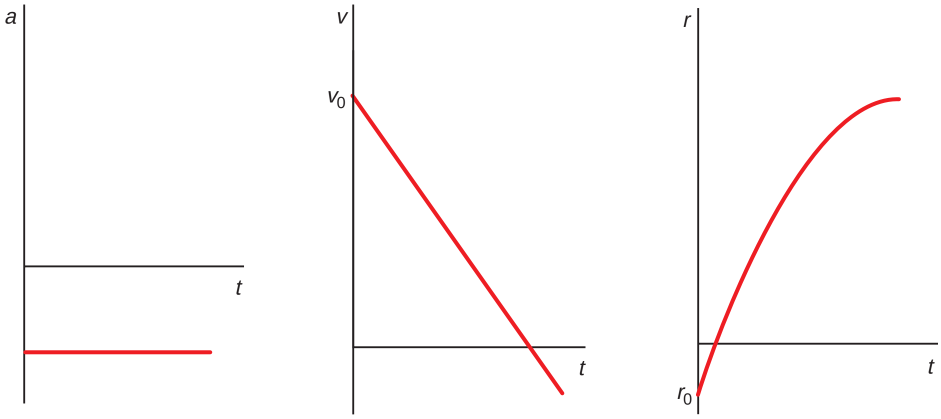
Cuando la bola que cae verticalmente llega al suelo, ¿en qué posición se encuentra la otra bola?

Si nos fijamos en el gráfico, vemos que la bola roja se desplaza dos cuadros hacia la derecha cada segundo, desplazándose verticalmente lo mismo que la bola blanca. Por tanto, en el último tramo, cuya duración es 0,6 s, la bola se desplazará 1,2 cuadros.

La respuesta correcta será, por tanto, la posición **B.**

11. Dibuja, de forma aproximada, las gráficas (a, t), (v, t) y (r, t) para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de aceleración negativa, velocidad inicial, v_0, positiva y posición inicial, r_0, negativa.

Las gráficas que nos piden, para este movimiento, son las que se representan en la página siguiente:



12. Se lanza un paquete desde un avión que vuela horizontalmente. Considerando despreciable la resistencia que ofrece el aire al desplazamiento del paquete, si el avión aumenta su velocidad, el tiempo que se requiere para que un segundo paquete alcance el suelo:

a) Aumenta. **c) No varía.**

b) Disminuye. **d) Depende de la altura.**

¿Cómo variará, en cualquier caso, la distancia horizontal a la que cae el paquete, medida desde la vertical del punto de lanzamiento?

En una primera aproximación, podemos asimilar la caída del paquete a un tiro horizontal. En este tipo de movimientos, el tiempo que el paquete tarda en llegar al suelo depende únicamente de la altura a la que se encuentra cuando es lanzado. Por tanto, un aumento de la velocidad horizontal (que es la que experimenta el avión) tan solo aumentará la distancia horizontal que recorre antes de llegar al suelo (el alcance), pero no modifica el tiempo que tarda en caer.

El tiempo de llegada no depende de la velocidad horizontal. Por tanto, la respuesta correcta es la **c).**

Por el contrario, el alcance sí se modifica, ya que depende de la velocidad horizontal con que se mueve el avión: al aumentar la velocidad del avión, aumenta el alcance.

EJERCICIOS

13. Un móvil se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, siendo su aceleración de 2 m · s^{-2} y su velocidad inicial de 5 m · s^{-1}.

a) Representa en un diagrama velocidad-tiempo el gráfico que corresponde al movimiento para el intervalo comprendido entre 0 s y 10 s.

b) Utiliza dicho diagrama para calcular la distancia que recorre el móvil en el intervalo de tiempo comprendido entre 3 s y 9 s.

a) La expresión para la velocidad en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es la siguiente:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

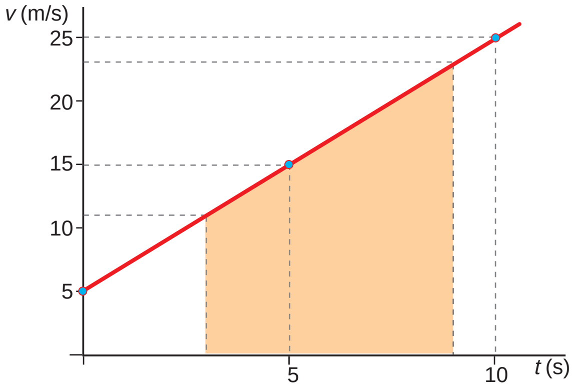
Sustituyendo los valores de la velocidad inicial y la aceleración que proporciona el enunciado, obtenemos la ecuación de una recta:

$$v = 5 + 2 \cdot t$$

A continuación, damos a la variable independiente distintos valores para poder representar el diagrama velocidad-tiempo. Con ellos construimos la siguiente tabla:

t (s)	0	5	10
v (m/s)	5	15	25

Los valores obtenidos corresponden a la recta representada en la figura siguiente:



b) El valor de la distancia recorrida es igual al valor de la superficie sombreada de la figura anterior; es decir, es el área encerrada por la gráfica entre los instantes $t = 3$ s y $t = 9$ s. Para calcularla, averiguamos primero el valor de la velocidad en esos instantes:

$$v\ (t = 3\ \text{s}) = 5 + 2 \cdot 3 = 11\ \text{m/s}$$

$$v\ (t = 9\ \text{s}) = 5 + 2 \cdot 9 = 23\ \text{m/s}$$

Por tanto, la distancia recorrida resulta:

$$r = \frac{23 + 11}{2} \cdot (9 - 3) = 102\ \text{m}$$

14. Calcula la velocidad angular con la que la Tierra gira sobre sí misma y la velocidad angular con la que orbita alrededor del Sol.

La velocidad angular relaciona el ángulo girado con el tiempo que tarda el móvil en realizar un giro. Como, debido al movimiento de rotación, la Tierra gira sobre sí misma dando una vuelta en un día:

$$\omega_{rotación} = \frac{1\ \text{vuelta}}{1\ \text{día}} = \frac{2 \cdot \pi}{1 \cdot 24 \cdot 3600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

En cuanto al movimiento de traslación, sabemos que la Tierra tarda un año en dar una vuelta alrededor del Sol. Por tanto:

$$\omega_{traslación} = \frac{1\ \text{vuelta}}{1\ \text{año}} = \frac{2 \cdot \pi}{1 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

15. Una persona rodea un edificio circular, empleando para ello medio minuto. ¿Cuál es la velocidad angular con que se mueve? Expresa el resultado en rad/s.

La velocidad angular representa el número de vueltas recorridas (en radianes) en la unidad de tiempo. Por tanto, en este caso:

$$\omega = \frac{1 \text{ vuelta}}{0{,}5 \text{ min}} = \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{30 \text{ s}} = 0{,}21 \text{ rad/s}$$

16. Un móvil recorre, con determinada velocidad, una trayectoria circular de radio *R*. Justifica que las expresiones:

$$\boldsymbol{v^2/R \quad ; \quad \omega^2 \cdot R}$$

son expresiones homogéneas e indica a qué magnitud representan.

Para comprobar que se trata de expresiones homogéneas, calculamos sus respectivas ecuaciones de dimensiones:

$$\left[\frac{v^2}{R}\right] = \frac{[v^2]}{[R]} = \frac{(\text{L} \cdot \text{T}^{-1})^2}{\text{L}} = \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$$

$$[\omega^2 \cdot R] = [\omega]^2 \cdot [R] = \frac{[\theta]^2}{[t]^2} \cdot [R] = \frac{1}{\text{T}^2} \cdot \text{L}$$

Estas dos expresiones tienen las dimensiones de la aceleración. En concreto, representan a la componente normal de la aceleración en un movimiento circular.

17. Calcula la velocidad angular con que se mueve un punto situado en el ecuador y otro situado en el polo norte, debido al movimiento de rotación de la Tierra sobre sí misma y al movimiento de rotación de esta alrededor del Sol. ¿Necesitas algún dato para resolver el problema?

Al resolver el problema, tendremos en cuenta algunas hipótesis que no son ciertas, aunque están muy cerca de la realidad que pretenden explicar:

a) La Tierra es una esfera perfecta y no un geoide (esfera achatada en los polos).

b) El eje de rotación de la Tierra la “atraviesa” desde el polo norte hasta el polo sur.

c) La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es circular (en realidad, es una elipse muy poco achatada).

¿Por qué consideramos las hipótesis anteriores?

No es un hecho casual que lo hagamos. Lo que se pretende con ellas es estudiar, aunque de manera aproximada, el comportamiento de un sistema físico. La realidad es demasiado compleja y no podemos estudiarla con detalle en este nivel; por eso intentamos aproximarnos a su estudio por medio de modelos.

Es cierto que, cuando equiparamos los movimientos de rotación y traslación de la Tierra a un m.c.u. o cuando nos aproximamos a modelos matemáticos más o menos sencillos, falseamos la realidad, pero no es menos cierto que al menos así tenemos un orden de magnitud, sentando las bases para análisis posteriores más completos.

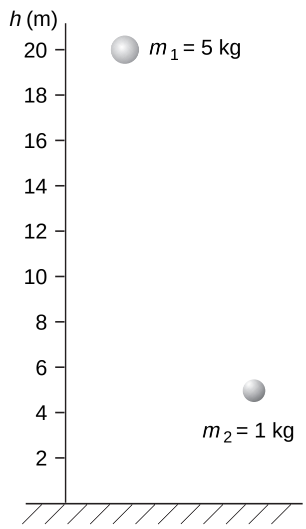
Bajo estas tres hipótesis, el polo norte es un punto que pertenece al propio eje de rotación de la Tierra y, por tanto, no gira debido al movimiento de rotación de la Tierra. Así pues, su velocidad angular de rotación será nula. Sin embargo, sí que girará de acuerdo con el movimiento de traslación, siguiendo la órbita que describe la Tierra alrededor del Sol. Por tanto, la velocidad angular del polo norte será únicamente la que corresponde al movimiento de traslación.

Sin embargo, en el ecuador el cálculo se complica. Un punto situado en el ecuador se mueve con velocidad angular de rotación, ya que no pertenece al eje de rotación de la Tierra y con velocidad angular de traslación, ya que todos los puntos de la Tierra giran alrededor del Sol. Su velocidad angular será, por tanto, el resultado de una composición de velocidades que es demasiado compleja para estudiarla en detalle en el nivel en que nos encontramos.

18. Una esfera de metal, de masa m_1 = 5 kg, y otra de masa m_2 = 1 kg, están situadas a 20 y 5 m de altura, respectivamente. Si se sueltan a la vez sin velocidad inicial, ¿cuál es el intervalo de tiempo, medido en segundos, que transcurre desde que la primera bola llega al suelo hasta que lo hace la segunda?

a) 0 **b) 1** **c) 3** **d) 4**

Calculemos el tiempo que tarda cada una de ellas en caer, suponiendo como instante inicial el momento en que las soltamos, tomando $g = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.



- Bola de 5 kg: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{10}} = \sqrt{4} = 2\ \text{s} \rightarrow t = 2\ \text{s}$$

- Bola de 1 kg: $h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{10}} = \sqrt{1} = 1\ \text{s} \rightarrow t = 1\ \text{s}$$

La diferencia de tiempos es $\Delta t = 2 - 1 = 1$ s. Por tanto, la respuesta correcta es la **b).**

Observa que, siendo igual el valor de g para las dos masas (suponemos que están situadas en el mismo punto de la Tierra), la **única variable** que modifica el tiempo de caída es la **distancia** que ha de recorrer cada objeto.

La masa de ambos objetos, por tanto, no influye en el tiempo de caída (ten en cuenta que en ningún momento aparecen en las ecuaciones de movimiento términos que sean función de la masa del objeto).

19. Copia en una hoja el diagrama de la cuestión 10. Sobre dicho diagrama, dibuja el vector velocidad que corresponde a cada bola en cada uno de los instantes que se representan.

Con los datos de que disponemos, podemos afirmar que el movimiento de la bola blanca es un m.r.u.a. y el de la bola roja corresponde a un tiro horizontal. Para estar seguros, debemos calcular la aceleración vertical del movimiento, que será la misma para las dos bolas.

La posición que ocupa cada bola, en vertical, a medida que transcurre el tiempo es:

tiempo (s)	0	1	2	3
posición (cuadritos)	0	1	4	9

Como se aprecia, la relación es cuadrática, lo que significa que se trata de un m.r.u.a. La aceleración del movimiento la podemos calcular a partir de estos datos:

$$\Delta r = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2$$

$$a = \frac{2 \cdot \Delta r}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \cdot 9}{3^2} = 2 \text{ cuadritos} \cdot s^{-2}$$

Las unidades no podemos precisarlas, ya que no sabemos cuál es la longitud de cada cuadrito. Pero si equiparamos esta caída a una caída libre, en la que la aceleración de caída es, aproximadamente, 10 m · s^{-2}, deberemos concluir que cada cuadrito mide, en realidad, cinco metros.

También podemos afirmar que la velocidad horizontal con que se mueve la bola azul es 2 cuadritos por segundo, es decir, 10 m · s^{-1}.

Teniendo en cuenta que la ecuación que permite calcular la velocidad en cada instante es:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = v_0 \cdot \vec{i} - g \cdot t \cdot \vec{j}$$

al particularizar para los instantes que nos indican, para la bola roja obtenemos los siguientes valores de la velocidad:

$$\vec{v}_0 = 10 \cdot \vec{i} - 10 \cdot 0 \cdot \vec{j} = 10 \cdot \vec{i} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_1 = 10 \cdot \vec{i} - 10 \cdot 1 \cdot \vec{j} = 10 \cdot \vec{i} - 10 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_2 = 10 \cdot \vec{i} - 10 \cdot 2 \cdot \vec{j} = 10 \cdot \vec{i} - 20 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_3 = 10 \cdot \vec{i} - 10 \cdot 3 \cdot \vec{j} = 10 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_{3,6} = 10 \cdot \vec{i} - 10 \cdot 3{,}6 \cdot \vec{j} = 10 \cdot \vec{i} - 36 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

Y para la bola blanca:

$$\vec{v}_0 = -10 \cdot 0 \cdot \vec{j} = 0 \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_1 = -10 \cdot 1 \cdot \vec{j} = -10 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_2 = -10 \cdot 2 \cdot \vec{j} = -20 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_3 = -10 \cdot 3 \cdot \vec{j} = -30 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

$$\vec{v}_{3,6} = -10 \cdot 3{,}6 \cdot \vec{j} = -36 \cdot \vec{j} \text{ m} \cdot s^{-1}$$

A partir de los vectores velocidad de ambas bolas en los instantes indicados, resulta inmediata su representación en el diagrama.

20. Demuestra que la caída libre es un movimiento parabólico en el que el ángulo de lanzamiento es de –90°.

Para comprobarlo, basta sustituir en las ecuaciones del movimiento parabólico el ángulo θ = –90°. Procediendo de ese modo, resulta:

$$x(\theta = -90°) = v_0 \cdot cos(-90°) \cdot t \rightarrow x = 0$$

$$y(\theta = -90°) = v_0 \cdot sen(-90°) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y = -v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Observa que dichas expresiones son las de la caída libre si consideramos la velocidad inicial del movimiento nula, al igual que ocurre en la caída.

21. Se lanza verticalmente hacia arriba, desde el balcón de un cuarto piso situado a 14 metros de altura, una pelota con una velocidad de 10 m/s. Indica cuánto valen los parámetros iniciales del problema (r_0, v_0) cuando el origen del sistema de referencia se toma:

a) En el suelo.

b) En el cuarto piso.

c) En el séptimo piso, situado a 24 metros de altura sobre el suelo.

Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, cuya aceleración es la producida por la fuerza gravitatoria. Las expresiones que describen este movimiento son:

$$r = r_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v = v_0 - g \cdot t$$

a) Si se toma el origen del sistema de referencia en el suelo, la velocidad inicial será positiva (hacia arriba), y la aceleración, negativa:

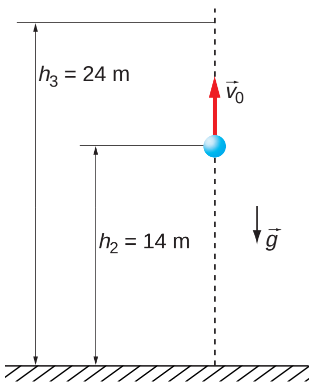
$$r_0 = h_2 = 14 \text{ m}$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$

Las ecuaciones del movimiento resultan:

$$r = 14 + 10 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$v = 10 - 9{,}8 \cdot t$$



b) Con el origen en el cuarto piso, la velocidad inicial y la aceleración son las mismas que en el apartado anterior, pero la posición inicial coincide con el origen. Por tanto, los parámetros iniciales y las ecuaciones del movimiento son los siguientes:

$$r_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$r = 10 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$v = 10 - 9{,}8 \cdot t$$

c) En este caso, el origen se sitúa a 24 metros de altura respecto al suelo. Por tanto:

$$r_0 = h_2 - h_3 = 14 - 24 = -10 \text{ m}$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$

Y las ecuaciones del movimiento, en este caso, son:

$$r = -10 + 10 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$v = 10 - 9{,}8 \cdot t$$

22. Desde la terraza de un edificio se deja caer un objeto. ¿A qué distancia del suelo su velocidad es la mitad que la que posee al llegar al suelo?

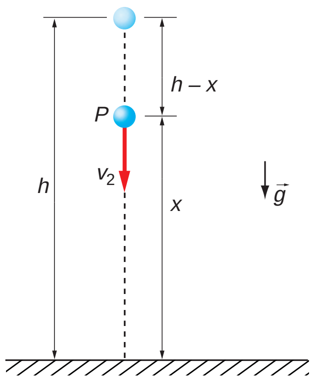
El objeto sigue un m.r.u.a. con velocidad inicial nula.

Como vimos en la actividad 2 del epígrafe 4.3., cuando el objeto llegue al suelo tendrá una velocidad:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Y cuando pase por un punto P situado a una altura x, su velocidad sera:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - x)}$$



Haciendo que se cumpla la condición impuesta por el enunciado, obtenemos la altura a la que la velocidad del cuerpo es la mitad de la que posee al llegar al suelo:

$$v_2 = \frac{v_1}{2} \rightarrow \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - x)} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{2}$$

$$2 \cdot g \cdot (h - x) = \frac{2 \cdot g \cdot h}{4} \rightarrow h - x = \frac{h}{4} \rightarrow x = h - \frac{h}{4}$$

$$x = \frac{3}{4} \cdot h$$

23. Un deportista salta 2,45 m de altura. ¿Cuál debe ser, aproximadamente, su velocidad vertical en el momento de separarse del suelo?

Las ecuaciones de este movimiento vertical cuando el deportista se encuentra en la altura máxima son las siguientes:

$$0 = v_0 - g \cdot t$$

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Eliminando el tiempo en ambas ecuaciones, obtenemos la velocidad inicial. Para ello, despejamos en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$t = \frac{v_0}{g}$$

$$h = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g}$$

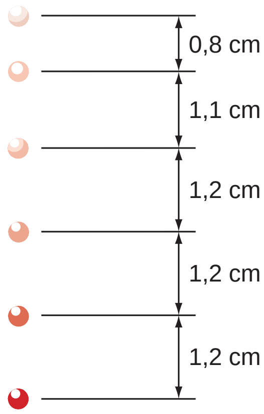
Despejando:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2{,}45} = 6{,}93 \text{ m/s}$$

24. El diagrama muestra las posiciones que ocupa un globo que cae verticalmente. Si el intervalo que separa dos posiciones sucesivas es de 1/60 s, ¿qué valor alcanza la velocidad límite con que se mueve el globo en su caída, medida en cm · s^{-1}?

a) 33 b) 48 c) 60 d) 72



En los dos primeros intervalos, el globo desciende con velocidad variable, pues recorre distancias diferentes en el mismo intervalo de tiempo (1/60 s). El movimiento es, por tanto, rectilíneo no uniforme.

Sin embargo, transcurridos estos intervalos, la velocidad de caída del globo se estabiliza (el globo recorre la misma distancia en instantes de tiempo iguales). Por tanto, en estos intervalos el movimiento es rectilíneo uniforme.

Observa, además, que este m.r.u. se desarrolla a velocidad límite (velocidad máxima), ya que el espacio que recorre en el mismo tiempo es mayor que en los dos primeros intervalos.

Por tanto, la velocidad límite será:

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$v_{lím} = \frac{1{,}2}{\left(\frac{1}{60}\right)} = 72 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

La respuesta correcta es, por tanto, la **d).**

25. Un alumno circula con su motocicleta a 36 km/h. De pronto, ve un obstáculo y se ve forzado a frenar. Si sus frenos imprimen una aceleración de –2 m/s^2, calcula:

a) El tiempo que necesita para detenerla por completo.

b) La distancia que recorrerá la moto hasta que se detiene por completo.

¿Qué resultados obtendrías si la moto se moviese inicialmente con el doble de velocidad?

En primer lugar, expresamos la velocidad de la motocicleta en unidades del S.I.:

$$v_0 = 36 \, \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 10 \text{ m/s}$$

a) Para calcular el tiempo que tarda en detenerse, aplicamos la expresión de la velocidad en el m.r.u.a.:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Sustituyendo los valores conocidos y despejando, el tiempo resulta:

$$0 = 10 - 2 \cdot t \rightarrow t = \frac{10}{2} = 5 \text{ s}$$

b) La distancia que recorre mientras frena la calculamos sustituyendo el tiempo obtenido en el apartado anterior en la expresión para la posición:

$$r = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$r = 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 5^2 = 25 \text{ m}$$

Si la velocidad inicial de la moto en el momento de ver el obstáculo hubiese sido el doble, el tiempo de frenado resultaría:

$$v = v_0 + a \cdot t \rightarrow 0 = 20 - 2 \cdot t$$

$$t = \frac{20}{2} = 10 \text{ s}$$

Y la distancia recorrida:

$$r = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$r = 20 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 10^2 = 100 \text{ m}$$

Es decir, recorrería una distancia cuatro veces mayor que la que recorría con la mitad de velocidad incial y, por tanto, si la distancia a la que ve el obstáculo no varía, el alumno no podría evitar la colisión.

PROBLEMAS

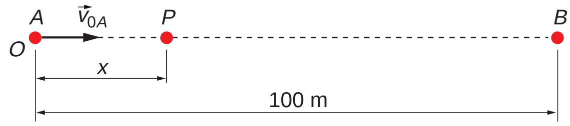
26 Inicialmente, dos móviles ocupan las posiciones *A* y *B*, separadas 100 m. Ambos se mueven en línea recta, uno hacia el otro. Uno pasa por *A* con cierta velocidad y con una aceleración de frenado de 0,5 m · s^{-2}. Al mismo tiempo, el otro arranca desde *B* con una aceleración de 1,5 m · s^{-2}.

Se sabe que ambos se encuentran cuando el que ha pasado por *A* invierte el sentido de su movimiento.

Calcula el tiempo que tardan en encontrarse y la velocidad que llevaba el móvil que pasó por *A*.

Tomamos el punto *A* como origen de un sistema de referencia en el que *P* es el punto en que se encuentran ambos móviles, y donde se cumple que $v_A = 0$, puesto que ese es el punto en que el móvil que pasó por *A* invierte el sentido de movimiento.

La situación descrita es la que se representa en la figura siguiente:



Ambos cuerpos se desplazan con m.r.u.a., cuyas ecuaciones son:

$$A: \quad 0 = v_{0A} - 0{,}5 \cdot t \qquad [1]$$

$$x = v_{0A} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 \qquad [2]$$

$$B: \quad v_B = -1{,}5 \cdot t \qquad [3]$$

$$x = 100 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot t^2 \qquad [4]$$

Para obtener el instante en que se encuentran, igualamos los segundos miembros de las ecuaciones [2] y [4]:

$$v_{0A} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 = 100 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot t^2$$

Despejamos v_{0A} en [1] y lo sustituimos en la ecuación anterior:

$$v_{0A} = 0{,}5 \cdot t$$

$$0{,}5 \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 = 100 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot t^2$$

Despejando, el tiempo que tardan en encontrarse resulta:

$$\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot t^2 = 100 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot t^2$$

$$t^2 = 100 \rightarrow t = 10 \text{ s}$$

Con este valor, la velocidad inicial del cuerpo que pasa por A resulta ser:

$$v_{0A} = 0{,}5 \cdot 10 = 5 \text{ m/s}$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

27. Un volante de 40 cm de diámetro, que gira a razón de 240 revoluciones por minuto (r.p.m.), gira al cabo de 10 s a 600 r.p.m. Calcula:

a) La aceleración tangencial.

b) La aceleración angular.

Expresamos las velocidades de giro en unidades del Sistema Internacional:

$$\omega_1 = 240 \text{ r.p.m.} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 8 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 600 \text{ r.p.m.} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 20 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

b) Calculamos, en primer lugar, la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot \pi - 8 \cdot \pi}{10} = 3{,}77 \text{ rad/s}^2$$

a) La aceleración tangencial es:

$$a_T = \alpha \cdot R \rightarrow a_T = 3{,}77 \cdot 0{,}2 = 0{,}75 \text{ m/s}^2$$

28 **Una rueda que gira a 1 200 r.p.m. se detiene transcurridos 10 s desde que comenzó a actuar de forma constante un freno. Calcula:**

a) La aceleración angular de frenado.

b) El número de vueltas que describe el volante hasta que se detiene.

c) El instante en que su velocidad angular es 8 rad/s.

La velocidad angular incial de la rueda, en unidades del Sistema Internacional es:

$$\omega_0 = 1\,200 \text{ r.p.m.} \cdot \frac{2 \cdot \pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 40 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

a) La aceleración angular de frenado resulta:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \rightarrow \alpha = \frac{0 - 40 \cdot \pi}{10} = -4 \cdot \pi \text{ rad/s}^2$$

El signo negativo indica que la aceleración se opone al movimiento, lo que obliga a la rueda a detenerse.

b) Para obtener el número de vueltas que describe el volante durante el tiempo que actúa el freno, aplicamos la ecuación de la posición angular en el movimiento circular uniformemente acelerado:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

$$\theta = 0 + 40 \cdot \pi \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 200 \cdot \pi \text{ rad}$$

Esta es la distancia angular que recorre la rueda mientras frena. Si lo expresamos en número de vueltas, obtenemos:

$$\theta = 200 \cdot \pi \text{ rad} \cdot \frac{1 \text{ vuelta}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 100 \text{ vueltas}$$

c) El instante pedido lo obtenemos por medio de la expresión de la velocidad angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \rightarrow t = \frac{8 - 40 \cdot \pi}{-4 \cdot \pi} = 9{,}36 \text{ s}$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

29. **Los motores de un avión lo impulsan a 900 km · h^{-1} en dirección norte. A la altura a la que vuela sopla un viento en dirección suroeste que lo empuja con una velocidad de arrastre de 240 km · h^{-1}.**

a) Calcula la velocidad con que se mueve el avión respecto al suelo, así como la rapidez del movimiento.

b) ¿En qué dirección se mueve el avión respecto al suelo?

c) Representa en un esquema la trayectoria del vuelo y el vector velocidad que representa el movimiento del avión respecto al suelo.

d) Si el piloto quiere llegar a un aeropuerto situado en dirección norte, a 1 000 km del punto donde se encuentra, ¿cuál debe ser el rumbo que fija en el avión? ¿Cuánto tardará el avión en llegar al aeropuerto? Supón que la velocidad del viento se mantiene constante.

a) En primer lugar, debemos recordar que la velocidad del avión será la composición vectorial de dos vectores, uno en sentido norte y otro en sentido suroeste.

Por otra parte, tomaremos un sistema de referencia que tendrá por origen el propio avión, siendo el eje de abscisas la dirección este y el de ordenadas la dirección norte. Siguiendo el criterio matemático, los ángulos los mediremos en sentido antihorario. De acuerdo con este sistema de referencia, las velocidades son:

Avión $\rightarrow \vec{v}_1 = 900 \cdot \vec{j}$ km · h^{-1}

Viento $\rightarrow \vec{v}_2 = 240 \cdot (\cos 225° \cdot \vec{i} + \operatorname{sen} 225° \cdot \vec{j}) = (-169{,}7 \cdot \vec{i} - 169{,}7 \cdot \vec{j})$ km · h^{-1}

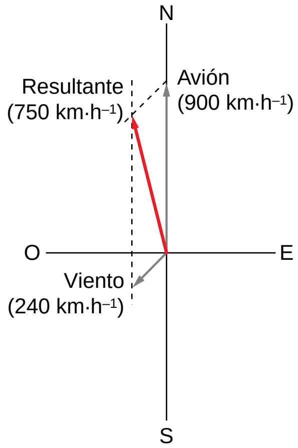
La velocidad con que se mueve el avión cuando sopla el viento es la suma de ambas, y la rapidez es el módulo de dicha velocidad; por tanto:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (-169{,}7 \cdot \vec{i} + 730{,}3 \cdot \vec{j}) \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$|v| = \sqrt{(-169{,}7)^2 + 730{,}3^2} = 750 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

b) Respecto al suelo, el avión se mueve en la dirección de su velocidad, que hemos expresado en función de sus componentes en el apartado anterior.

c) Para hallar la dirección, debemos realizar la composición de velocidades, de acuerdo con la regla del paralelogramo, tal como se aprecia en la ilustración adjunta.

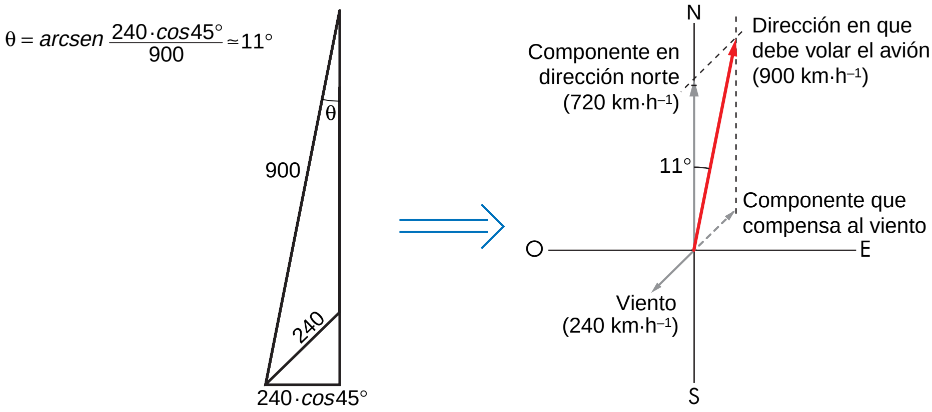


d) Llegar a un aeropuerto situado al norte es fácil si no hay viento, ya que la dirección en que se mueve el avión es norte.

Sin embargo, tenemos viento y, para contrarrestar su efecto, el piloto debe orientar el avión en una dirección que compense el efecto del viento.

El piloto debe, por tanto, orientar el avión en una dirección que anule el efecto que induce sobre él la acción del viento. Para lograrlo, debemos dirigir el avión en una dirección (hacia el nordeste) que introduzca en el movimiento una componente con el mismo módulo y sentido opuesto al del viento, es decir, una componente de 240 km · h^{-1} en dirección nordeste (45°).

Teniendo en cuenta que la velocidad con que se mueve el avión no debe variar (900 km · h^{-1}), se aprecia en el diagrama que la componente en dirección norte del vector velocidad es tan solo 720 km · h^{-1}, orientada en una dirección que forma un ángulo de 79° con la dirección este, es decir, un ángulo, en sentido horario, de 11° con la dirección norte.



Con esta velocidad, el avión tardará en recorrer 1 000 km un tiempo:

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1\,000}{720} = 1{,}39 \text{ horas}$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

30. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, con velocidad inicial v_0. Al mismo tiempo, se lanza verticalmente hacia abajo, desde una altura h, otro objeto con velocidad inicial v_0. Encuentra el algoritmo que proporciona la altura, medida desde el suelo, a la que los dos objetos se encuentran.

Al resolver el problema, señalaremos con el subíndice 1 al objeto que se lanza hacia arriba, y con el subíndice 2 al objeto que cae. Ambos objetos se mueven con m.r.u.a., cuya aceleración es la de la gravedad. Sus ecuaciones de movimiento son:

$$y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$y_2 = h - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Cuando los dos cuerpos se crucen en su movimiento, la posición de ambos será la misma, es decir, $y_1 = y_2$. Por tanto, identificando ambas ecuaciones, podemos obtener el instante, t, en que se cruzan. Conocido dicho instante, sustituiremos el valor en una cualquiera de las dos ecuaciones, para averiguar la altura a la que se cruzan.

Procediendo de ese modo:

$$y_1 = y_2 \rightarrow v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$t = \frac{h}{2 \cdot v_0}$$

$$y = v_0 \cdot \frac{h}{2 \cdot v_0} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{h}{2 \cdot v_0}\right)^2 = \frac{h}{2} - \frac{g \cdot h^2}{8 \cdot v_0^2}$$

31. En el ejercicio anterior, ¿importa la masa de los objetos? ¿Y su tamaño y su forma?

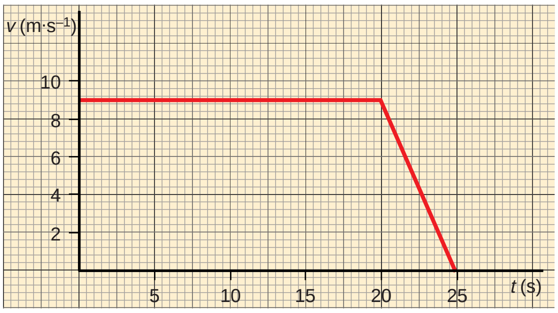
En principio, nos inclinamos a pensar que sí, ya que es evidente que el tiempo de caída será superior para una hoja de papel que para una bola de plomo. Sin embargo, si el movimiento es ideal, no influyen en el mismo ni la masa, ni el tamaño, ni la forma del objeto.

Cuando decimos que el movimiento es "ideal", estamos suponiendo que los objetos se desplazan en el vacío, en ausencia de aire.

Para paliar el efecto que produce en el movimiento la resistencia del aire, de modo que no condicione excesivamente el resultado, podemos coger dos objetos de una masa relativamente elevada, aunque distinta (por ejemplo, uno de 1 kg y otro de 10 kg, de distinta forma y tamaño). Si medimos los tiempos de caída de ambos, dejados caer desde la misma altura, veremos que son similares (prácticamente iguales si no tenemos en cuenta el error experimental), incluso siendo la masa de uno 10 veces mayor que la del otro y su morfología dispar.

Ese hecho, que a priori parece increíble, fue demostrado por Galileo hace más de tres siglos.

32. Un coche se mueve con velocidad constante durante 20 segundos y después frena uniformemente hasta que se para, transcurriendo otros 5 segundos. El gráfico *v-t* del movimiento es el que se indica.



Calcula:

a) La distancia total que recorre el móvil en 25 segundos, y la velocidad media con que se mueve a lo largo del recorrido.

b) La aceleración de frenado.

c) El instante en que el móvil ha recorrido 200 m y su velocidad en ese instante.

a) y b) En el movimiento del vehículo distinguiremos dos tramos: el que describe con m.r.u. y aquel en el que se mueve con m.r.u.a. En el primero de ellos, la velocidad con que se mueve el coche es constante. Por tanto:

$$v = \text{cte} \rightarrow s_1 = v \cdot t = 9 \cdot 20 = 180 \text{ m}$$

Para determinar la distancia que recorre el coche en el segundo tramo, debemos calcular la aceleración del movimiento y utilizar la expresión que proporciona la distancia recorrida en un m.r.u.a. De este modo:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 9}{25 - 20} = -\frac{9}{5} = -1{,}80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 9 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}80) \cdot 5^2 = 22{,}50 \text{ m}$$

siendo la distancia total recorrida por el coche hasta que se detiene:

$$s = s_1 + s_2 = 202{,}50 \text{ m}$$

La velocidad media del coche mientras se encuentra en movimiento la obtenemos mediante la expresión:

$$v_{media} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{202{,}50}{25} = 8{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Cuando lleva recorridos 200 m, se encuentra en el tramo en que se mueve con m.r.u.a. Por tanto:

$$s = s_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

$$200 = 180 + 9 \cdot (t - 20) + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}8) \cdot (t - 20)^2$$

$$0{,}9 \cdot (t - 20)^2 - 9 \cdot (t - 20) + 20 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado, obtenemos dos valores para el tiempo:

$$t_1 - 20 = 6{,}67 \rightarrow t_1 = 26{,}67 \text{ s}$$

$$t_2 - 20 = 3{,}33 \rightarrow t_2 = 23{,}33 \text{ s}$$

De estas soluciones es correcta, desde un punto de vista físico, la segunda, ya que el movimiento del coche dura tan solo 25 s. Por tanto, la velocidad con que se moverá el coche será:

$$t = 23{,}33 \text{ s}$$

$$v = v_0 + a \cdot (t - t_0) = 9 - 1{,}8 \cdot (23{,}33 - 20) = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

33. Lanzamos un objeto hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m · s^{-1}. Transcurridos 10 segundos, dejamos caer, sin velocidad inicial, un segundo objeto, que se encuentra inicialmente a 200 m de altura.

a) ¿A qué altura del suelo se cruzan?

b) ¿Qué velocidad posee cada objeto en ese instante?

c) ¿En qué sentido se mueve cada uno?

La actividad que se propone ahora es similar a la planteada en el problema 30, aunque con una diferencia: los instantes en que se lanzan los dos objetos no coinciden.

Para resolver el problema, escribimos, en primer lugar, las ecuaciones que permiten calcular la posición en cada uno de los dos movimientos:

$$y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow y_1 = 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$y_2 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 10)^2 \rightarrow y_2 = 200 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (t - 10)^2$$

Al cruzarse los dos objetos, la posición (y) en que se encuentran es la misma. Por tanto, igualando las dos expresiones anteriores, calculamos el instante, t, en que ello ocurre:

$$100 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 200 - 4{,}9 \cdot (t - 10)^2$$

$$100 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 200 - 4{,}9 \cdot t^2 + 98 \cdot t - 490$$

$$2 \cdot t = -290 \rightarrow t = -145 \text{ s}$$

El resultado que obtenemos ($t < 0$) es absurdo. ¿Qué ocurre en el problema? Para contestar a esa pregunta, deberemos analizar con detalle el movimiento de cada uno de los dos objetos.

Calculemos la velocidad con que se mueve el primer objeto (lanzado con una velocidad de 100 m · s^{-1}) cuando han transcurrido 10 s desde que fue lanzado y la posición en que se encuentra en ese instante:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 100 - 9{,}8 \cdot 10 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 100 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 10^2 = 510 \text{ m}$$

El resultado nos indica que el objeto está a punto de detener su movimiento a una altura mucho mayor que aquella a la que se encuentra el segundo objeto, y todavía está subiendo. Por tanto, si en ese instante dejamos caer el segundo objeto desde una altura de 200 m, el primero, que iniciará una caída libre desde un punto situado más arriba, jamás alcanzará al segundo, ya que el movimiento de ambos es de caída libre y el segundo está mucho más cerca del suelo que el primero cuando ambos están en movimiento.

Por tanto, el único instante en que se han cruzado los dos objetos es cuando el primero subía con cierta velocidad y el segundo estaba todavía en reposo en la posición $y = 200$ m.

La posición en que se encuentra el segundo objeto cuando se cruzan es 200 m y su velocidad es nula ($v = 0$). En cuanto al sentido de su movimiento, está claro que es "ninguno". Por lo que se refiere al primer objeto, su posición también es 200 m y el sentido del movimiento, ascendente. Para determinar la velocidad con que se mueve, debemos resolver el sistema obtenido al sustituir los datos que conocemos en las ecuaciones del movimiento. De este modo, el tiempo que tarda en llegar a esa altura resulta:

$$y_1 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow 200 = 100 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$4{,}9 \cdot t^2 - 100 \cdot t + 200 = 0 \rightarrow t = 2{,}25 \text{ s}$$

Y, por tanto, su velocidad en ese instante es:

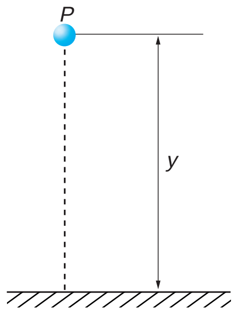
$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 100 - 9{,}8 \cdot t \rightarrow v_1 = 100 - 9{,}8 \cdot 2{,}25 = 78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Observa, una vez más, que no debemos aplicar las ecuaciones matemáticas a situaciones físicas sin reflexionar antes sobre la validez de nuestro trabajo. Es muy importante que eso lo tengamos siempre en cuenta.

34 **Desde un mismo punto se lanzan verticalmente hacia arriba, con un intervalo de 2 s, dos objetos *A* y *B* con velocidades respectivas de 50 m/s y 80 m/s. Calcula el tiempo que tardan en encontrarse, la altura a la que lo hacen y la velocidad de cada uno cuando se encuentran.**

Se trata de dos lanzamientos verticales efectuados con un retardo de 2 segundos. Por tanto, cuando el segundo objeto lleva t segundos en movimiento, para el primero habrán transcurrido $t + 2$ segundos.

Si tomamos como origen del sistema de referencia el suelo y llamamos P al punto en que se encuentran, las ecuaciones del movimiento de ambos cuerpos son:



A: $$y = 50 \cdot (t + 2) - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot (t + 2)^2$$

$$y = 80{,}4 + 30{,}4 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \qquad [1]$$

B: $$y = 80 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot t^2$$

$$y = 80 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \qquad [2]$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones [1] y [2], obtenemos el instante en que se encuentran:

$$80{,}4 + 30{,}4 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 = 80 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

$$49{,}6 \cdot t = 80{,}4 \rightarrow t = 1{,}62 \text{ s}$$

La altura la obtenemos a partir de la ecuación [2]:

$$y = 80 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2 \rightarrow y = 80 \cdot 1{,}62 - 4{,}9 \cdot 1{,}62^2 = 116{,}74 \text{ m}$$

Las velocidades de cada cuerpo en ese instante son:

$$A\text{: } v_A = 50 - 9{,}8 \cdot t = 50 - 9{,}8 \cdot 1{,}62 = 34{,}12 \text{ m/s}$$

$$B\text{: } v_B = 80 - 9{,}8 \cdot t = 80 - 9{,}8 \cdot 1{,}62 = 64{,}12 \text{ m/s}$$

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

35. Dejamos caer verticalmente un trozo de plomo de 100 g de masa sin velocidad inicial. La posición que ocupa respecto al punto de lanzamiento, *A*, es la que se indica en el gráfico. Estas posiciones se corresponden con intervalos de tiempo sucesivos de 0,02 s. Calcula:

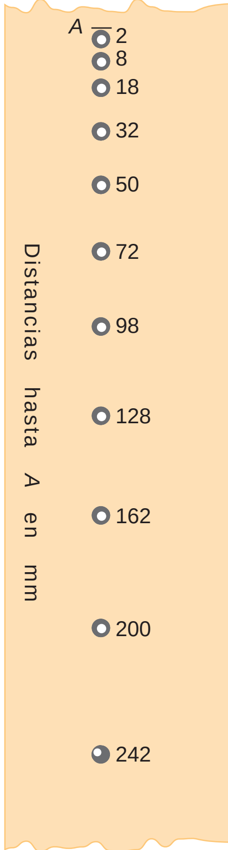
a) La velocidad con que se mueve el plomo transcurridos 0,2 s desde que se dejó caer.

b) La velocidad media del recorrido hasta ese instante.

c) El valor de la aceleración de la gravedad que corresponde al movimiento.

d) La velocidad con que llega al suelo si la altura desde la que se deja caer es de 1,5 m.

Caída de un trozo de plomo



a) Lo primero que debemos analizar es el tipo de movimiento con el que nos enfrentamos. Al tratarse de una caída libre, lo asimilaremos a un m.r.u.a. en el que el móvil recorre distancias cada vez mayores en idénticos intervalos de tiempo.

Para calcular la velocidad con que se mueve el móvil en el instante $t = 0{,}2$ s, basta con tener en cuenta que, al tratarse de una caída libre, $v = a \cdot t$. Sin embargo, desconocemos la aceleración con que cae el objeto. Por tanto, esa será la primera incógnita que calcular.

Para calcular la aceleración con que cae el objeto, tomamos el décimo instante de muestreo (podríamos haber tomado cualquier otro, ya que la aceleración es constante) y aplicamos la ecuación de la posición en el m.r.u.a.:

$$t = 10 \cdot 0{,}02 = 0{,}2 \text{ s}$$

$$\Delta r = 200 \text{ mm} = 0{,}2 \text{ m}$$

$$\Delta r = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$0{,}2 = 0 \cdot 0{,}2 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0{,}2^2 \rightarrow a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación de la velocidad, resulta:

$$v = a \cdot t = 10 \cdot 0{,}2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La velocidad media del recorrido hasta ese instante será:

$$v_{media} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{0{,}2}{0{,}2} = 1{,}00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Este apartado ya ha sido resuelto al calcular lo que nos piden en el apartado a). Observa que, en ocasiones, el orden en que se resuelven los apartados no obedece a la secuencia que nos proponen y cambia de acuerdo con las necesidades reales que surgen al resolver el problema.

d) Primero calcularemos el tiempo de caída:

$$\Delta r = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightarrow 1{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}5}{10}} = 0{,}55 \text{ s}$$

y, conocido este, calculamos la velocidad con que llega al suelo:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

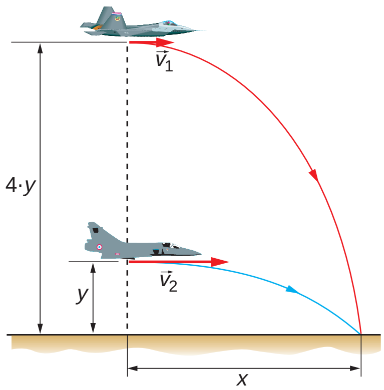
$$v = 0 + 10 \cdot 0{,}55 = 5{,}5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

36 **En cierto instante, dos aviones militares, que realizan maniobras de bombardeo, vuelan horizontalmente situados en la misma vertical, siendo la altura de vuelo del situado a más altura cuatro veces superior a la del otro. Si el situado por encima lleva una velocidad de 580 km/h, ¿cuál debe ser la velocidad con que debe desplazarse el otro avión para que ambos alcancen el mismo objetivo?**

Los dos aviones efectúan, al bombardear, sendos lanzamientos horizontales, de trayectorias:

$$1: \quad \left.\begin{aligned} x &= v_1 \cdot t_1 \\ 4 \cdot y &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \end{aligned}\right\} \quad x^2 = v_1^2 \cdot \frac{8 \cdot y}{g}$$

$$2: \quad \left.\begin{aligned} x &= v_2 \cdot t_2 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \end{aligned}\right\} \quad x^2 = v_2^2 \cdot \frac{2 \cdot y}{g}$$



Igualando los segundos miembros de ambas:

$$v_1^2 \cdot \frac{8 \cdot y}{g} = v_2^2 \cdot \frac{2 \cdot y}{g} \rightarrow v_1^2 = \frac{v_2^2}{4}$$

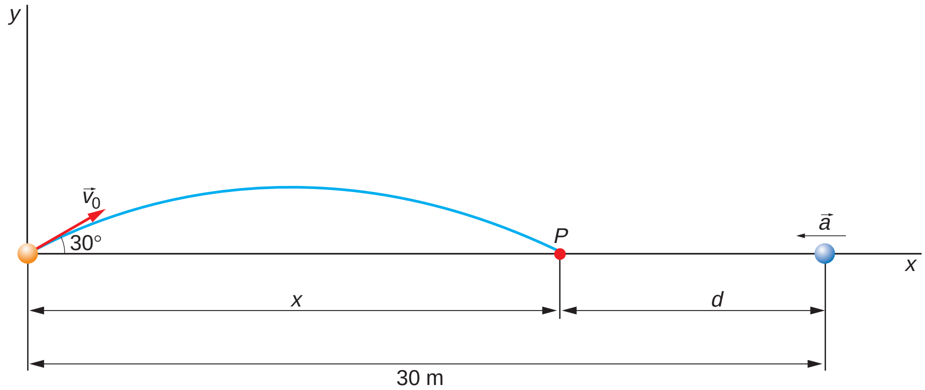
$$v_2 = 2 \cdot v_1 = 2 \cdot 580 = 1\,160 \text{ km/h}$$

Como vemos, el avión que vuela a una cuarta parte de la altura a la que vuela el otro avión debe volar el doble de rápido para poder alcanzar el mismo objetivo.

37 **Un jugador lanza un balón siguiendo una trayectoria que forma un ángulo de 30° con la horizontal y con una velocidad de 14,4 m/s. Un segundo jugador, situado a una distancia de 30 m del primero, en la dirección y sentido del lanzamiento, echa a correr hacia el balón con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, para hacerse con él. ¿Qué aceleración debe llevar para alcanzar el balón justo en el instante en que este llega al suelo?**

Si situamos el origen del sistema de referencia en el primer jugador, este efectúa con el balón un lanzamiento parabólico con velocidad inicial positiva formando un ángulo de 30° con la horizontal, mientras que el segundo jugador realiza un m.r.u.a. con aceleración negativa y velocidad inicial nula.

La siguiente figura refleja la situación descrita en el problema:



La ecuación que describe el movimiento vertical del balón es la siguiente:

$$y = v_0 \cdot sen\,\theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Cuando el balón alcanza el punto P, donde debe recogerlo el otro jugador, se cumple $y = 0$, luego:

$$0 = v_0 \cdot sen\,\theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Despejando el tiempo resulta:

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\,\theta}{g} \rightarrow t = \frac{2 \cdot 14{,}4 \cdot sen\,30°}{9{,}8} = 1{,}47 \text{ s}$$

En ese tiempo, el balón recorre la distancia horizontal:

$$x = v_0 \cdot cos\,\theta \cdot t$$

$$x = 14{,}4 \cdot cos\,30° \cdot 1{,}47 = 18{,}32 \text{ m}$$

La aceleración con la que debe correr el segundo jugador para llegar al punto P a tiempo de recoger el balón debe ser:

$$r = r_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

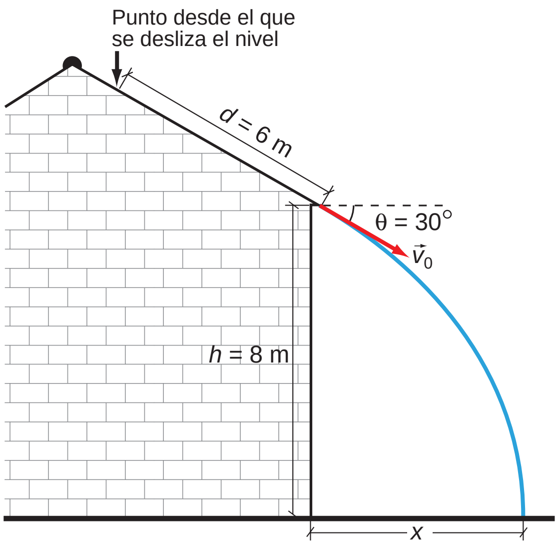
$$x = 30 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$a = 2 \cdot \frac{x - 30}{t^2} \rightarrow a = 2 \cdot \frac{18{,}32 - 30}{1{,}47^2} = -10{,}8 \text{ m/s}^2$$

Y debe recorrer una distancia:

$$d = 30 - x = 30 - 18{,}32 = 11{,}68 \text{ m}$$

38. Un albañil está trabajando en el tejado de una casa cuando, fortuitamente, le resbala el nivel, que cae deslizándose por el tejado con una aceleración constante e igual a 5 m · s^{-2}.



Con estos datos, calcula:

a) La velocidad, expresada en forma vectorial, con que sale despedido el nivel del tejado si recorre sobre él una distancia de 6 m.

b) El módulo de dicha velocidad.

c) La distancia a la que cae de la casa.

El extremo del tejado se encuentra a 8 m de altura y sobresale de la pared de la casa 25 cm.

a) El ejercicio aborda el movimiento parabólico. El sistema de referencia que utilizaremos tendrá por origen el borde del tejado de la casa, ya que es un punto desde el que es fácil medir.

La velocidad en el movimiento parabólico viene dada por las expresiones:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot \vec{i} + (v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta - g \cdot t) \cdot \vec{j}$$

En dichas expresiones desconocemos la velocidad inicial, v_0, con que sale despedido el martillo del techo de la casa. Para calcular dicho valor, utilizaremos las expresiones del m.r.u.a., pues el movimiento del martillo responde a estas características. De ese modo:

$$\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 \rightarrow 6 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (t - t_0)^2 \rightarrow (t - t_0) = 1{,}55 \text{ s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0 - v'_0}{t - t_0} \rightarrow v_0 = v'_0 + a \cdot (t - t_0) = 0 + 5 \cdot 1{,}55 = 7{,}75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

donde v'_0 representa la velocidad incial con que el nivel comienza a deslizar por el tejado de la casa.

Una vez calculada la velocidad v_0 con que sale despedido el martillo del techo de la casa, tan solo queda hallar las componentes de dicho vector al proyectarlo sobre los dos ejes del sistema de referencia. Observa que el ángulo que forma el martillo respecto al eje de abscisas es de –30°, pues está medido en sentido horario. Con estos datos, el resultado es:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0 \cdot cos\,\theta \cdot \vec{i} + \vec{v}_0 \cdot sen\,\theta \cdot \vec{j} = (6{,}71 \cdot \vec{i} - 3{,}88 \cdot \vec{j})\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) El módulo ya lo hemos calculado en el apartado anterior, y resultó ser 7,75 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

c) Para hallar la distancia desde el borde del tejado de la casa, aplicamos las ecuaciones del tiro parabólico:

$$y = x \cdot tg\,\theta - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot cos^2\theta} \cdot x^2 \rightarrow -8 = -0{,}577 \cdot x - 0{,}11 \cdot x^2$$

$$x = 6{,}3\ \text{m}$$

No debemos olvidar que el enunciado pide calcular la distancia a la que cae el martillo medida desde la pared de la casa, no desde el borde del tejado. Como este sobresale 25 cm de la pared, al alcance le hemos de añadir esta distancia. De este modo, la distancia es: 6,3 + 0,25 = 6,55 m.

NOTA: La resolución de este problema se ofrece también en el CD-ROM del alumnado.

39. Un objeto se mueve hacia el este, sobre un plano horizontal sin rozamiento, con una velocidad de 2 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Transcurridos cinco segundos, se aplica en dirección sur una fuerza que comunica al cuerpo una aceleración de 1 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, y se mantiene aplicada durante 10 s.

a) Calcula la velocidad con que se mueve el objeto en los intervalos [0-5] segundos y [5-15] segundos.

b) Calcula la ecuación de la trayectoria en cada uno de esos dos intervalos de tiempo.

c) Representa la velocidad del cuerpo en un diagrama *v-t* y calcula sobre él la distancia que recorre en los 15 segundos.

a) Para resolver el problema, supondremos que el eje de abscisas está orientado hacia el este, y el de ordenadas, hacia el norte.

En el intervalo de tiempo [0,5] s, el movimiento es rectilíneo uniforme, siendo constante la velocidad.

En el intervalo [5-15] s, la velocidad varía, debido a que se aplica una aceleración sobre el objeto.

Por tanto, el movimiento pasa a ser compuesto en el segundo intervalo, con un m.r.u., en dirección este (no hay rozamiento y, por tanto, se mantiene dicho movimiento) y un m.r.u.a. en dirección sur, debido a la existencia de una aceleración.

De acuerdo con ello, el vector velocidad será, en cada caso:

$$\text{intervalo } [0,\ 5]\ \text{s} \rightarrow \vec{v} = 2 \cdot \vec{i}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{intervalo } [5,\ 15]\ \text{s} \rightarrow \vec{v} = [2 \cdot \vec{i} - 1 \cdot (t - 5) \cdot \vec{j}]\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Expresadas en módulo, estas magnitudes son:

$$\text{intervalo } [0,\ 5]\ \text{s} \rightarrow |\vec{v}| = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{intervalo } [5,\ 15]\ \text{s} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (t-5)^2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) En el intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 5 s, el objeto realiza un m.r.u.; como el eje de abscisas está orientado hacia el este, la ecuación de la trayectoria que le corresponde es:

$$y = 0 \qquad \forall\, x \in [0,\ 10]$$

ya que la ecuación de la posición es:

$$x = v_0 \cdot t = 2 \cdot t$$

Para hallar la ecuación de la trayectoria en el intervalo [5-15] s, hemos de conocer, en primer lugar, las componentes del vector de posición, ya que el movimiento del objeto es compuesto. Por tanto:

$$\vec{r} = 2 \cdot t \cdot \vec{i} - \frac{1}{2} \cdot (t-5)^2 \cdot \vec{j}$$

Es decir:

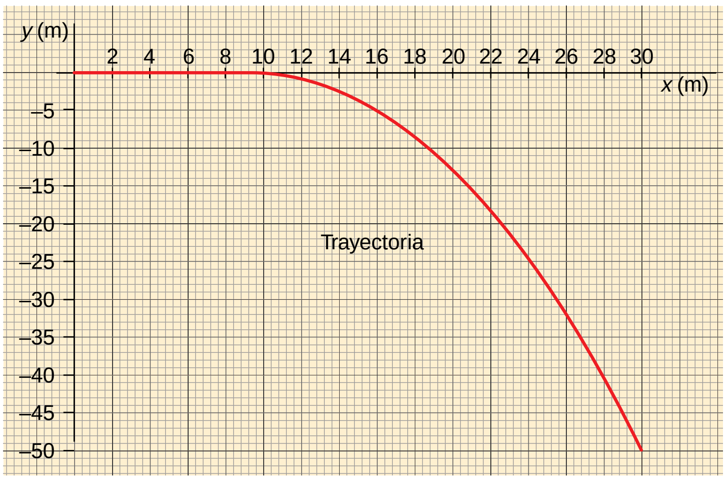
$$x = 2 \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (t-5)^2$$

Procediendo del mismo modo que en ejercicios anteriores, calculamos la ecuación de la trayectoria:

$$t = \frac{x}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - 5\right)^2$$

La trayectoria que sigue el objeto para $t \in$ [0-15] s se corresponde con la siguiente representación gráfica:



c) Si representamos ahora la velocidad en función del tiempo, en un diagrama *v-t*, el área que encierran la curva y el eje de abscisas en el intervalo considerado coincide numéricamente con la distancia recorrida. Por tanto, en el caso que nos ocupa, la distancia que recorre el móvil en todo el trayecto, medida sobre la gráfica *v-t*, resulta ser de 65,38 m.