11 INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

2 LEYES DE KEPLER

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.6. (EA.7.6.1-7.6.2.)

Página 308

1 Suponiendo movimientos circulares para Mercurio y Venus alrededor del Sol, compara sus períodos y velocidades lineales, y demuestra que los planetas son más lentos cuanto más alejados están del Sol.

Aplicamos la tercera ley de Kepler al primer y segundo planeta del sistema solar: Mercurio y Venus.

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{T_V^2}{a_V^3}$$

Suponiendo que el movimiento de ambos planetas es aproximadamente circular, podemos considerar que el semieje mayor de la elipse que describen es prácticamente igual a la distancia media al Sol: $a \sim r$. Entonces:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_V^2}{r_V^3} \rightarrow T_M = \left(\frac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} T_V$$

$$\text{como } r_M < r_V \rightarrow \frac{r_M}{r_V} < 1 \rightarrow \left(\frac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} < 1 \rightarrow T_M < T_V$$

Suponiendo que los movimientos orbitales son MCU, se cumple que la velocidad orbital y el período de revolución están relacionados a través del radio orbital mediante la siguiente expresión:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$$

Particularizando para Venus y Mercurio, tenemos que:

$$v_V = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_V}{T_V} \text{ y } v_M = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_M}{T_M} \rightarrow \frac{v_V}{v_M} = \frac{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r_V}{T_V}}{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r_M}{T_M}}$$

$$\frac{v_V}{v_M} = \frac{r_V \cdot T_M}{r_M \cdot T_V}$$

Y, puesto que se cumple, como hemos visto, que:

$$T_M = \left(\frac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} T_V$$

Sustituyendo en:

$$\frac{v_V}{v_M} = \frac{r_V \cdot \left(\frac{r_M}{r_V}\right)^{3/2} T_V}{r_M \cdot T_V} \rightarrow \frac{v_V}{v_M} = \sqrt{\frac{r_M}{r_V}} \rightarrow v_V = \sqrt{\frac{r_M}{r_V}}\, v_M$$

$$\text{como } r_M < r_V \rightarrow \frac{r_M}{r_V} < 1 \rightarrow \sqrt{\frac{r_M}{r_V}} < 1 \rightarrow v_V < v_M$$

Quedando demostrado que, cuanto más alejado se encuentra un planeta orbitando, más lento es su viaje en torno al Sol.

2 **La órbita del cometa Halley tiene un período de 76 años y una excentricidad muy elevada, e = 0,97, por lo que la diferencia de velocidades en su trayectoria es muy acusada. Sabiendo que la máxima distancia al Sol es de 35 ua y la mínima es de 0,6 ua, aproximadamente, calcula:**

a) La relación entre las velocidades en esos puntos.

b) El valor del semieje mayor y del semieje menor de la elipse que describe la órbita y la distancia del centro al foco.

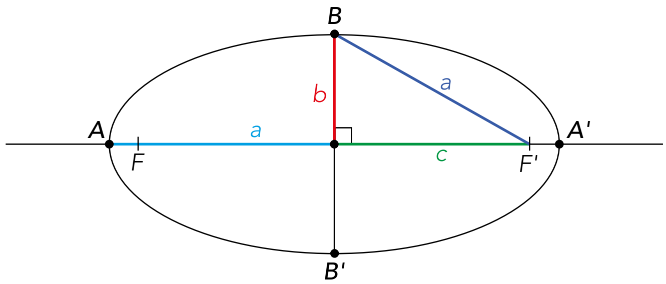
a) Si aplicamos la segunda ley de Kepler a la órbita del cometa Halley en sus puntos de máximo y mínimo acercamiento, el afelio y el perihelio, se cumple que:

$$r_{afelio} \cdot v_{afelio} = r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}$$

$$\rightarrow \frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}} = \frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}} \rightarrow \frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}} = \frac{35 \text{ ua}}{0{,}6 \text{ ua}} = 58{,}3$$

$$v_{perihelio} = 58{,}3\ v_{afelio}$$

b) Según la primera ley de Kepler, los movimientos planetarios son elípticos. Para calcular los elementos de una elipse: el semieje mayor, a, el semieje menor, b, y la distancia del foco al centro, c, nos apoyamos en el siguiente dibujo:



Observamos que se cumple:

$$r_{afelio} + r_{perihelio} = 2 \cdot a$$

$$a = \frac{r_{afelio} + r_{perihelio}}{2} = \frac{35 + 0{,}6}{2} = 17{,}8 \text{ ua}$$

Por otro lado, la excentricidad de una elipse puede expresarse como $e = c/a$, expresión que utilizaremos para el cálculo de la distancia del foco al centro, c.

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow c = e \cdot a = 0{,}97 \cdot 17{,}8 = 17{,}3 \text{ ua}$$

Además, la imagen nos permite comprobar, por el teorema de Pitágoras, que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{17{,}8^2 - 17{,}3^2} = 4{,}2 \text{ ua}$$

Las soluciones serían: a = 17,8 ua; b = 4,2 ua; c = 17,3 ua

3 **Utilizando los valores de la tabla, construye una gráfica en la que se observe el decrecimiento kepleriano de la velocidad orbital frente al radio orbital medio de los planetas.**

Planeta	e	T/años	a/ua
Mercurio	0,2056	0,24	0,39
Venus	0,0068	0,62	0,72
Tierra	0,0167	1,00	1,00
Marte	0,0934	1,88	1,52
Júpiter	0,0484	11,86	5,20
Saturno	0,0542	29,46	9,54
Urano	0,0444	84,02	19,19
Neptuno	0,0086	164,79	30,06

Se denomina decrecimiento kepleriano de la velocidad orbital a la disminución que sufre la velocidad de los planetas conforme se alejan del Sol y sus órbitas tienen mayores radios. Este decrecimiento viene dimanado de las leyes de Kepler.

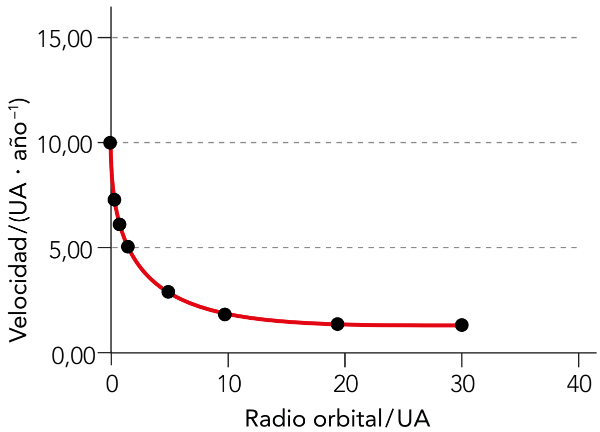
A partir de la tabla del enunciado, y utilizando la relación entre la velocidad orbital y el período de revolución a través del radio orbital:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Planeta	*e*	*T*/años	*a*/ua	*v*/ua · años^{-1}
Mercurio	0,2056	0,24	0,39	10,21
Venus	0,0068	0,62	0,72	7,30
Tierra	0,0167	1,00	1,00	6,28
Marte	0,0934	1,88	1,52	5,08
Júpiter	0,0484	11,86	5,20	2,75
Saturno	0,0542	29,46	9,54	2,03
Urano	0,0444	84,02	19,19	1,44
Neptuno	0,0086	164,79	30,06	1,15

Con los datos obtenidos de la velocidad, representamos *v* frente a *T*; para ello, podemos utilizar una hoja de cálculo. En las páginas TIC se dan orientaciones para realizar cálculos con dicha aplicación.

El resultado gráfico sería el siguiente:



3 LA LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.8. (EA.7.8.1.)

Página 313

4 Enuncia la LGU y comenta el significado físico de las magnitudes que aparecen en su expresión matemática.

Todas las partículas materiales del universo se atraen entre sí con una fuerza, dirigida según la línea que las une, directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Esta es la ley de gravitación universal o LGU enunciada por Newton en 1686. Matemáticamente se expresa así:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Donde G, constante de gravitación universal, es la constante de proporcionalidad en la ley. Tiene un valor muy pequeño que es consecuencia de la debilidad de las fuerzas gravitatorias. Esta constante toma el mismo valor en cualquier punto del universo.

m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos que interactúan. Se trata de la masa gravitatoria, que es la propiedad que poseen los cuerpos y que es capaz de generar campo gravitatorio.

r es la distancia que separa las masas, supuestas partículas puntuales. En el caso de que se trate de cuerpos extensos, r es la distancia desde el centro de gravedad de uno de los cuerpos hasta el centro de gravedad del otro.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los distintos tipos de textos, lo que le será de utilidad para elaborar y argumentar su respuesta.

5 **Recuerda el concepto de inercia y explica por qué la masa que aparece en la segunda ley de Newton se denomina masa inercial.**

La inercia es la resistencia que ponen los cuerpos a cambiar el estado de movimiento en el que se encuentran. La masa inercial representa esta inercia, de forma que, cuanto mayor es la masa inercial, mayor es la resistencia para cambiar el estado de movimiento y acelerarse. La segunda ley de Newton así lo expresa:

$$F = m \cdot a \quad \rightarrow \quad m = \frac{F}{a}$$

Donde m es la masa inercial, magnitud que mide la aceleración que adquiere un cuerpo al aplicársele una fuerza F.

En esta ley, se puede ver la proporcionalidad inversa entre la masa y la aceleración. Recuerda que la aceleración es la magnitud que mide la variación del estado de movimiento del cuerpo. Para una misma fuerza aplicada a diversos cuerpos de diferente masa, ocurre que cuanto mayor es la masa del cuerpo, menor es la aceleración que adquiere el cuerpo.

6 **Preguntas provocadoras. Si la LGU solo es aplicable a masas puntuales, ¿por qué la utilizamos para cuerpos extensos como los planetas?**

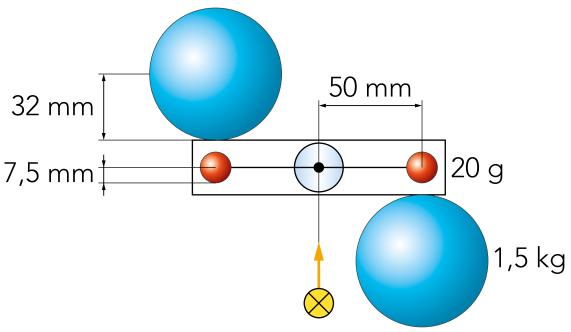
La utilizamos para cuerpos extensos siempre que tengamos en cuenta la siguiente hipótesis:

«La fuerza gravitatoria que ejerce una esfera homogénea de radio R y masa M es la misma que ejercería una partícula puntual de la misma masa situada en su centro de gravedad».

El centro de gravedad, CG, de un cuerpo es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre sus partículas. En el caso de cuerpos con alta simetría y densidad uniforme el CG se sitúa sobre su centro de simetría o centro geométrico.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la estrategia de desarrollo del pensamiento «Preguntas provocadoras».

7 **En la figura adjunta se representa un diagrama del experimento de Cavendish. Según los datos que aparecen en la imagen, encuentra la fuerza de atracción entre la esfera grande y la pequeña en el momento del contacto.**



En el momento del contacto de la esfera grande, de masa $m_1 = 1,5$ kg, con la pequeña, de masa $m_2 = 20 \cdot 10^{-3}$ kg, la distancia que separa los cuerpos, medida de centro a centro, es la suma de sus radios:

$$d_{12} = 32 + 7,5 = 39,5 \text{ mm} = 0,0395 \text{ m}$$

Aplicando la LGU:

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d_{12}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{0,039\,5^2}$$

Obtenemos que la fuerza de atracción entre las esferas en el momento del contacto es:

$$F_g = 1,28 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

8 Asamblea de ideas. **Según la LGU, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo depende de la masa del cuerpo, de forma que existe más atracción sobre cuerpos más masivos. Sin embargo, sabemos que todos los cuerpos caen desde una misma altura con la misma velocidad. Explica por qué los cuerpos más pesados no caen más rápidos.**

Es cierto que, cuanto mayor es la masa del cuerpo, mayor es la fuerza de atracción gravitatoria. Pero también es cierto que, cuanto mayor es la masa, mayor es la inercia o resistencia al cambio y, por tanto, existe más dificultad para cambiar el estado de movimiento del cuerpo y acelerarlo.

Como consecuencia, la aceleración se mantiene constante e igual para todos los cuerpos. Deduciremos la expresión de la aceleración de la gravedad mediante la segunda ley de Newton y la LGU:

$$F = m \cdot a \;\rightarrow\; a = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot \dfrac{M \cdot m}{r^2}}{m} = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Si aumenta F, y aumenta m, finalmente, la aceleración a debe permanecer constante, como puede observarse en la expresión superior. La aceleración de la gravedad dependería del cuerpo que la crea y no del cuerpo que se ve afectado; por tanto, aumentar la masa del cuerpo no implicaría un aumento de la gravedad.

En **anayaeducacion.es** explicamos cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Asamblea de ideas», propuesta para la resolución de esta actividad en grupo.

9 **Explica en qué consiste el principio de superposición aplicado a un sistema discreto de masas.**

Supongamos un sistema discreto de partículas formado por n masas puntuales distribuidas en el espacio. Si introducimos otra partícula en ese sistema, aparecerá sobre ella una fuerza neta que podremos calcular aplicando el **principio de superposición.**

Este principio enuncia que la fuerza neta que se ejerce sobre la masa introducida en el sistema es la suma de cada una de las fuerzas que ejercen las n masas sobre ella, como si cada partícula del sistema estuviese aislada del resto. La fuerza resultante puede expresarse así:

$$\vec{F}_{g_{\text{resultante}}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{g_i}$$

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los distintos tipos de textos, lo que le será de utilidad para elaborar y argumentar su respuesta.

10 **Calcula la distancia existente entre un meteorito de 900 kg y el planeta al que se dirige, si la fuerza gravitatoria que ejerce el planeta sobre el meteorito a esa distancia es 250 N.**

Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{planeta} = 5 \cdot 10^{23}$ kg.

La fuerza gravitatoria con la que el planeta atrae al meteorito es de 250 N, conocida las masas de los cuerpos que se atraen y aplicando la LGU:

$$F_g = G \cdot \frac{M_{planeta} \cdot M_{meteorito}}{r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; r = \sqrt{\frac{G \cdot M_{planeta} \cdot M_{meteorito}}{F_g}}$$

Sustituyendo los datos en la expresión encontrada:

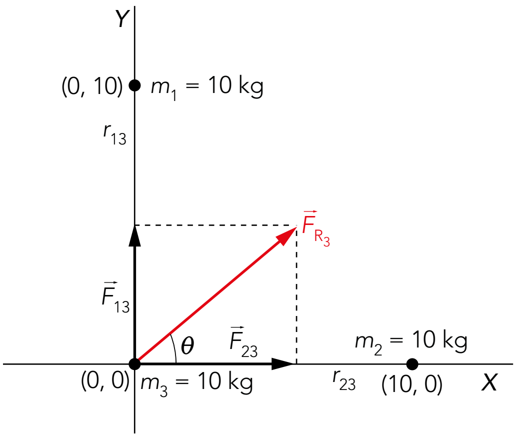
$$r = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5 \cdot 10^{23} \cdot 900}{250}} \sim 1{,}0957 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$r \approx 10\,957 \text{ km}$$

11 **En los puntos (0, 10) y (10, 0), en metros, de un sistema de referencia cartesiano se encuentran situadas dos partículas de igual masa, $m_1 = m_2 = 10$ kg. Si situamos una tercera partícula, de masa $m_3 = 10$ kg, en el origen de coordenadas (0, 0), calcula la fuerza gravitatoria neta que aparece sobre esta tercera masa.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Realizamos una representación gráfica de la situación de las partículas en un sistema de coordenadas cartesiano:



Aplicando el principio de superposición para un sistema discreto de masas, la fuerza resultante sobre la masa 3, $\vec{F}_{R_3}$ será la suma vectorial de las fuerzas que ejercen la masa 1 sobre la 3, como si la 2 no existiera, $\vec{F}_{13}$, más la fuerza que ejerce la 2 sobre la 3, como si la 1 no existiera, $\vec{F}_{23}$. Sin olvidarnos que las fuerzas son vectores y que se trata de una suma vectorial:

$$\vec{F}_{R_3} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

$$\vec{F}_{13} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{r_{13}^2} \cdot \vec{j} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 10}{10^2} \cdot \vec{j} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_{13} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{r_{23}^2} \cdot \vec{i} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 10}{10^2} \cdot \vec{i} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_{R_3} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Podemos escribir dicha fuerza resultante mediante su módulo y argumento:

$F_{R_3} \sim 9{,}43 \cdot 10^{-11}$ N y $\theta = 45°$

4 CONSECUENCIAS DE LA LGU

CE.1.1. **(EA.1.1.1.-1.1.2.)** **CE.7.8.** **(EA.7.8.2.)**

Página 317

12 **Utilizando los datos que aparecen en la tabla de datos planetarios de esta página, calcula:**

a) La gravedad en la superficie del planeta Neptuno.

b) El campo gravitatorio creado por Neptuno a una altura que sea tres veces su radio.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

a) Para calcular la gravedad sobre la superficie de Neptuno utilizaremos los datos que hemos sombreado en la tabla.

Planeta	Radio (km)	Radio (R_T)	Masa (kg)	Masa (M_T)	Velocidad de escape (km/s)
Neptuno	24 764	3,88 R_T	$1{,}0 \cdot 10^{26}$	17 M_T	24

Aplicamos la expresión matemática que define la aceleración de la gravedad sobre la superficie de Neptuno, g_{0N}:

$$g_{0N} = G \cdot \frac{M_N}{R_N^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}0 \cdot 10^{26}}{\left(24\,764 \cdot 10^3\right)^2} = 10{,}876 \text{ m/s}^2 \approx 11 \text{ m/s}^2$$

b) El campo gravitatorio y la aceleración de la gravedad en un punto son conceptos totalmente equivalentes y se pueden calcular mediante la misma expresión. Sus respectivas unidades en el SI, N/kg y m/s², poseen las mismas dimensiones. En este caso, utilizaremos la expresión obtenida en el apartado anterior para una altura $h = 3\ R_N$:

$$g_{hN} = G \cdot \frac{M_N}{\left(R_N + h\right)^2} = G \cdot \frac{M_N}{\left(R_N + 3\ R_N\right)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^{26}}{\left(4 \cdot 24\,764 \cdot 10^3\right)^2} = 0{,}6798\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 0{,}7 \text{ N/kg}$$

13 **Calcula el peso de un astronauta de 82 kg de masa que se encuentra orbitando junto a la estación ISS a 415 km de altura.**

Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s²; $R_T = 6\,371$ km.

Un astronauta de $m = 82$ kg que orbite junto a la ISS se encuentra a una altura $h = 415$ km. Para calcular el peso de dicho astronauta, aplicaremos la LGU:

$$P = F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2}$$

Como los datos que nos aporta el enunciado del ejercicio son g_0 y R_T, no podemos utilizar G y M_T en la expresión, así que relacionaremos estas magnitudes mediante la definición de gravedad en la superficie terrestre de la siguiente forma:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \quad \rightarrow \quad g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Y sustituyendo en la LGU:

$$P = F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{\left(R_T + h\right)^2} = \frac{9{,}8 \cdot (6\,371 \cdot 10^3)^2 \cdot 82}{\left(6\,371 \cdot 10^3 + 415 \cdot 10^3\right)^2} \approx 708 \text{ N}$$

El peso del astronauta será: $P \sim 708$ N.

14 **El espejo. Explica las diferencias entre *g* y *G*.**

No confundas G y g, son diferentes. G es una constante universal, es la constante de proporcionalidad en la LGU y vale $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 en cualquier lugar del universo. Por el contrario, g es la aceleración de la gravedad y coincide con el campo gravitatorio que crea un astro en un punto. No es constante, varía con la localización. Sobre la superficie de la Tierra, toma el valor de 9,8 m/s^2.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la estrategia de desarrollo del pensamiento «El espejo».

15 **¿A qué altura sobre la superficie terrestre el campo gravitatorio se reduce un 90% en relación con su valor en la superficie?**

Si la gravedad a una altura h, g_h, se reduce un 90% de su valor en la superficie terrestre, g_0, es que toma el valor del 10% de g_0 y, entonces, $g_h = 0{,}1 \cdot g_0$.

Puesto que el enunciado del ejercicio no aporta ningún dato, trabajaremos relacionando la gravedad en la superficie y la gravedad a una altura h:

$$g_h = G \cdot \frac{M_T}{\left(R_T + h\right)^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{R_T^2}{\left(R_T + h\right)^2} \rightarrow \frac{0{,}1 \cdot g_0}{g_0} = \frac{R_T^2}{\left(R_T + h\right)^2}$$

$$0{,}1 \cdot \left(R_T + h\right)^2 = R_T^2 \rightarrow \sqrt{0{,}1} \cdot \left(R_T + h\right) = R_T$$

Despejando, $h = 2{,}16\ R_T$

16 **Calcula la densidad de la Luna sabiendo que la gravedad sobre su superficie es 0,16 veces la gravedad sobre la superficie terrestre y que el radio de la Tierra es 3,7 veces el lunar.**

Dato: $\rho_{Tierra} = 5{,}5\ g/cm^3$.

Los datos que nos proporciona el enunciado del ejercicio son relaciones entre magnitudes del planeta Tierra y su satélite lunar: $g_L = 0{,}16\ g_T$; $R_T = 3{,}7\ R_L$, por lo que nuestro objetivo es relacionar las densidades de la Tierra y la Luna.

Veamos cómo se define la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

A partir de la definición de la gravedad sobre la superficie de un astro, podemos despejar la masa M de dicho astro de la siguiente forma:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow M = \frac{g \cdot R^2}{G}$$

Que sustituyendo en la definición de la densidad, nos proporciona la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{\frac{g \cdot R^2}{G}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3} = \frac{g}{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R}$$

que utilizaremos para relacionar las densidades de la Luna y la Tierra:

$$\rho_L = \frac{g_L}{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_L}$$

$$\rho_T = \frac{g_T}{G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_T}$$

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{g_L}{g_T} \cdot \frac{R_T}{R_L} = \frac{0{,}16\ g_T \cdot 3{,}7\ R_L}{g_T \cdot R_L} = 0{,}16 \cdot 3{,}7 = 0{,}592$$

$$\rho_L = 0{,}592 \cdot \rho_T = 0{,}592 \cdot 5{,}5 = 3{,}256\ \text{g/cm}^3$$

La solución sería que la densidad lunar toma el valor: $\rho_{Luna} \sim 3{,}3$ g/cc

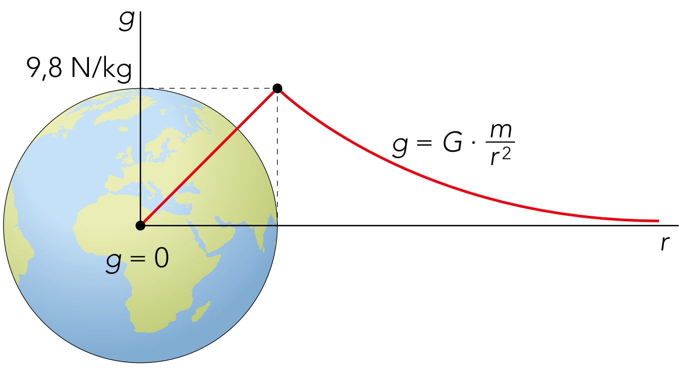
17 **Explica cómo varía la aceleración de la gravedad de un astro en función de la distancia a su centro. ¿Y cómo varía en función de su latitud?**

La aceleración de la gravedad varía según la distancia al centro del astro. Podemos diferenciar dos zonas en las que la aceleración varía de diferente forma:

i) En el interior del astro, la aceleración de la gravedad varía linealmente con la distancia a su centro, de forma que, cuando nos vamos acercando a su centro, $r = 0$, la gravedad disminuye hasta hacerse cero en el centro, $g = 0$.

ii) En el exterior del astro, desde su superficie, donde la gravedad toma su valor máximo, y conforme nos alejamos de él, la gravedad va disminuyendo hasta anularse en el infinito.

Esta variación queda representada gráficamente así para el caso de la Tierra:



La gravedad también varía en función de la latitud. Para el caso de la Tierra, que es el planeta que mejor conocemos, ocurre que:

La Tierra no es totalmente esférica ni homogénea, y esto hace que la gravedad varíe localmente de unos puntos a otros.

El valor de la aceleración de la gravedad varía con la latitud, siendo mayor en los polos que en el ecuador:

Localización	Ecuador 0°	Latitud 45°	Polos 90°	Media
g/(m/s^2)	9,78	9,807	9,83	9,81

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los textos expositivos.

18 **Calcula la relación que existe entre la gravedad en la superficie de Mercurio g_0 y la gravedad g a una altura de un diámetro sobre su superficie.**

Utilizaremos la expresión de la gravedad sobre la superficie de Mercurio, g_0, y la gravedad, g_h, a una altura $h = D = 2\ R$. Llamaremos M a la masa de Mercurio y R al radio del planeta.

Una vez desarrolladas ambas expresiones las dividiremos para encontrar una relación:

$$g_h = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = G \cdot \frac{M}{(R+2R)^2} = G \cdot \frac{M}{9\ R^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{G \cdot \dfrac{M}{9\ R^2}}{G \cdot \dfrac{M}{R^2}} = \frac{1}{9}$$

Por tanto, $\frac{g_h}{g_0} = \frac{1}{9}$.

19 **Utilizando los datos de la tabla superior, encuentra la gravedad en la superficie del planeta Urano.**

Dato: g = 9,8 m/s².

Para calcular la gravedad en la superficie de Urano a partir de la gravedad sobre la superficie de la Tierra, g_T, utilizaremos como datos las relaciones entre radio y masa que aparecen en la tabla: $R_U = 4{,}01\ R_T$ y $M_U = 14{,}5\ M_T$.

Aplicando la LGU para las gravedades en la superficie de Urano y de la Tierra y dividiendo las expresiones resultantes:

$$g_U = G \cdot \frac{M_U}{R_U^2} = G \cdot \frac{14{,}5 \cdot M_T}{(4{,}01 \cdot R_T)^2}$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\frac{g_U}{g_T} = \frac{G \cdot \dfrac{14{,}5 \cdot M_T}{(4{,}01 \cdot R_T)^2}}{G \cdot \dfrac{M_T}{R_T^2}} = \frac{14{,}5}{4{,}01^2} \rightarrow g_U = \frac{14{,}5}{4{,}01^2}\ g_T$$

Sustituyendo $g_T = 9{,}8$ m/s² en la expresión obtenemos: $g_U = 8{,}837$ m/s² ≈ 9 m/s².

20 **¿A qué altura sobre la superficie de un planeta de radio R debes situarte para que tu peso se reduzca a la mitad?**

Aplicando la LGU, calculamos el peso de un cuerpo de masa m sobre la superficie del planeta de radio R, y calcularemos, además, el peso del mismo cuerpo a una altura h sobre el planeta. Esto se cumple para cualquier cuerpo, también el tuyo:

$$P_0 = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

$$P_h = 0{,}5 \cdot P_0 = G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$$

Sustituyendo la relación entre pesos y dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{0{,}5 \cdot P_0}{P_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

De donde: $h = (\sqrt{2} - 1) \cdot R = 0{,}41\ R$

5 MOVIMIENTOS ORBITALES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.7. (EA.7.7.2.) CE.7.8. (EA.7.8.2.)

Página 318

21 **Representa, en las siguientes situaciones, la fuerza centrípeta que mantiene a estos cuerpos en movimiento circular:**

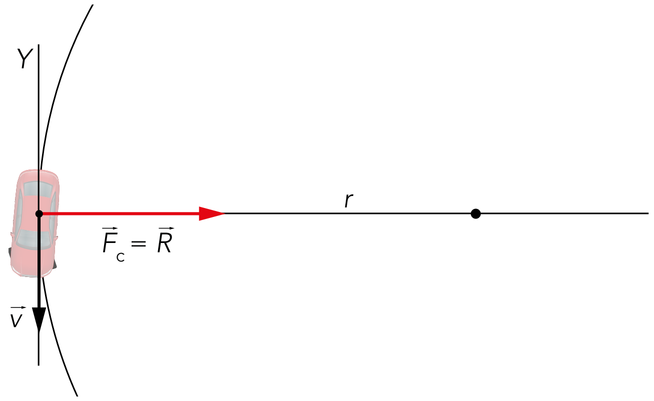
a) Un coche toma una curva plana.

b) Un coche toma una curva peraltada.

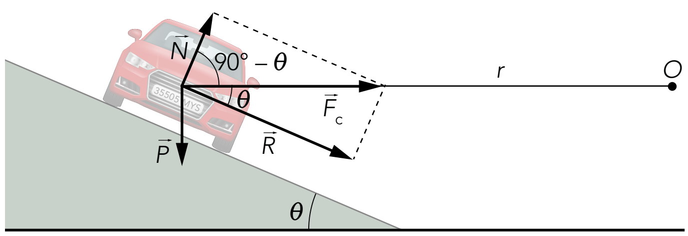
c) Un péndulo cónico.

d) Un martillo gira en la prueba de lanzamiento de martillo.

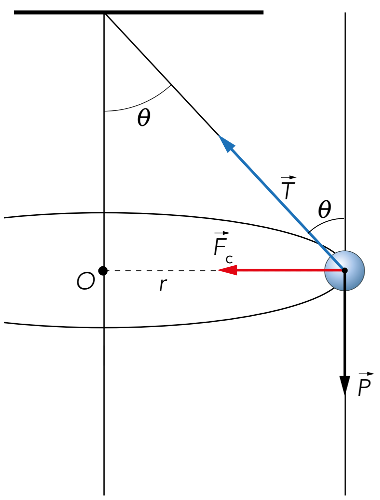
a) En la siguiente imagen, podemos ver que, al tomar una curva plana de radio *r*, la fuerza centrípeta es la fuerza de rozamiento que lo mantiene dentro de la curva: $F_c = R$



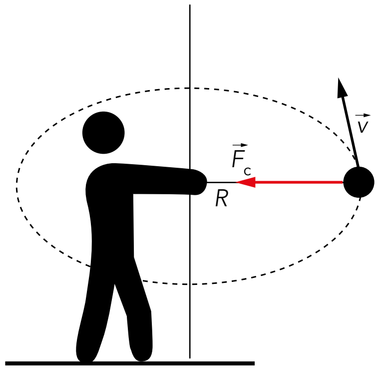
b) En el caso de que la curva esté peraltada un ángulo θ, la fuerza centrípeta es creada por la contribución de la fuerza de rozamiento y de la fuerza normal que realiza el plano para aguantar el vehículo. En la siguiente imagen puede verse que: $F_c = N \cdot \cos(90 - \theta) + R \cdot \cos\theta$



c) En un péndulo cónico que abre un ángulo θ respecto de la vertical, ocurre que una componente de la tensión de la cuerda que sujeta la masa que gira compensa el peso de la masa, y la otra componente actúa de fuerza centrípeta que hace girar la masa en torno a un centro. En la imagen puede observarse que: $F_c = T \cdot \text{sen}\,\theta$



d) En un martillo que gira, la tensión de la cuerda actúa de fuerza centrípeta:



22 **Elabora y escribe un argumento científico que dé explicación al hecho de que la Luna no caiga sobre la superficie terrestre.**

La fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la Luna se comporta como una fuerza centrípeta que genera un movimiento aproximadamente circular y uniforme que la mantiene en órbita. Podemos decir que la Luna cae constantemente, pues siempre que la Luna quiere escapar de la órbita, la Tierra no le deja y la atrapa haciéndola caer permanentemente sobre su órbita lunar.

23 **Responde a las siguientes preguntas:**

a) ¿Cuál es la aceleración a la que se ve sometido el planeta Tierra en su traslación alrededor del Sol?

b) ¿Qué fuerza hace que la Tierra se mantenga en órbita?

Dato: R_T = 6 371 km.

En primer lugar, transformamos los datos que aporta el enunciado del ejercicio en unidades SI:

$d_{T\text{-}S} = 1{,}5 \cdot 10^8$ km $= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m

T = 1 año = 365 días = 31 536 000 s

a) Si suponemos que la Tierra realiza un MCU en torno al Sol, su aceleración centrípeta vendrá dada por la expresión:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

siendo v la velocidad orbital constante y r la distancia media de la Tierra al Sol, $d_{T\text{-}S}$.

Al ser un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

$$a_c = \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r}{T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{(3{,}154 \cdot 10^7)^2}$$

Por tanto, la aceleración centrípeta vale: $a_c \approx 5{,}95 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

b) Para calcular la fuerza de atracción gravitatoria, podemos utilizar la segunda ley de Newton: $F = m \cdot a \rightarrow F_g = M_T \cdot a_c$. Sustituyendo datos:

$$F_g = 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 5{,}95 \cdot 10^{-3} = 3{,}55 \cdot 10^{22}\ \text{N}$$

24 **Calcula el período de traslación de un satélite artificial que orbita en torno a la Tierra a una altura de 15 000 km y con una velocidad lineal de 7 500 km/h.**

Dato: R_T = 6 371 km.

Primero, pasamos los datos que aporta el enunciado del ejercicio a unidades SI:

$h = 15\ 000 \text{km} = 1{,}5 \cdot 10^7$ m

$R_T = 6\ 371$ km $= 6{,}371 \cdot 10^6$ m

$v = 7\ 500$ km/h $= 2\ 083{,}3$ m/s

Si suponemos que el movimiento que sigue el satélite es un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_T + h)}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (6{,}37 \cdot 10^6 + 1{,}5 \cdot 10^7)}{2\ 083{,}3} = 64\ 454{,}45 \text{ s}$$

Si transformamos los segundos a horas, obtenemos: $T \approx 17{,}9$ h

25 **¿Cuál es la velocidad de desplazamiento de la Luna alrededor de la Tierra, sabiendo que su período es de 27,3 días?**

Dato: $d_{T\text{-}L}$ = 384 400 km.

Si consideramos el movimiento orbital de la Luna como un MCU, podemos utilizar esta relación:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \rightarrow v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Pasando los datos al SI y sustituyendo, obtenemos: $v \approx 1\,024$ m/s.

Página 320

26 **Un satélite artificial orbita en torno a la Tierra con una velocidad orbital de 6 554 m/s. Considerando que la órbita que describe el satélite es circular, calcula la distancia de la superficie terrestre a la que este se encuentra.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; R_T = 6 371 km.

Sabemos que la fuerza gravitatoria se comporta como una fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2}$$

Sustituyendo los datos:

$$r = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\ 554^2} = 9{,}27 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Para calcular la altura:

$$r = R_T + h \rightarrow h = r - R_T = 9{,}27 \cdot 10^6 - 6{,}371 \cdot 10^6 = 2{,}899 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La solución es: $h \approx 2{,}9 \cdot 10^6$ m.

27 **Calcula la masa de la Tierra sabiendo que los satélites geoestacionarios orbitan a una altura sobre la superficie terrestre de 35 800 km, aproximadamente. ¿Cuál es la velocidad lineal de estos satélites? ¿Y su velocidad angular?**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; R_T = 6 371 km.

a) Supuesto que el satélite realiza un MCU, se cumple que: $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$; entonces, se tiene que: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$

donde $r = R_T + h = 6{,}371 \cdot 10^6 + 3{,}58 \cdot 10^7 = 4{,}2171 \cdot 10^7$ m.

Y, como la fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, se tiene:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad orbital: $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$

Y despejando la masa de la tierra:

$$M_T = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \left(4{,}2171 \cdot 10^7\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 86\,400^2} = 5{,}9 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Ya podemos calcular la velocidad del satélite usando la expresión que obtuvimos anteriormente:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}9 \cdot 10^{24}}{4{,}2171 \cdot 10^7}} = 3\,080{,}57 \text{ m/s}$$

b) Para el cálculo de la velocidad angular, utilizamos la relación entre la velocidad lineal y la angular:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3\,080{,}57}{4{,}2171 \cdot 10^7} = 7{,}305 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

6 FUERZAS CENTRALES Y MOMENTO ANGULAR

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.7. (EA.7.7.1.-7.7.2.)

Página 321

28 Demuestra que las fuerzas centrales tienen un momento de la fuerza nulo.

Las fuerzas centrales cumplen que:

- Siempre apuntan hacia un mismo punto, denominado centro de fuerzas.
- Dependen exclusivamente de la distancia, *r*, que las separa del punto al que se dirigen.

El momento de estas fuerzas siempre es nulo, por la propia definición del momento de una fuerza. El vector *r* tiene la misma dirección que la fuerza *F*.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \text{su módulo: } M = r \cdot F \cdot \text{sen}\,180° = 0$$

29 Una partícula de masa 100 g con un vector de posición: $\vec{r} = 3 \cdot t \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 5 \cdot t \cdot \vec{k}$ m, respecto al origen de coordenadas, se ve impulsada por una fuerza $F = -500 \cdot \vec{i}$ N. Calcula el momento de la fuerza en el instante $t = 2$ s.

Si la fuerza se mantiene aplicada en el tiempo, el momento de la fuerza podría calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Calculamos las componentes de $\vec{r}$ y $\vec{F}$ para $t = 2$ s

$$\vec{r} = 6 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 10 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{F} = -500 \cdot \vec{i}$$

Sustituimos en el determinante y lo resolvemos, obteniendo:

$$\vec{M} = 5000 \cdot \vec{j} + 1000 \cdot \vec{k} \text{ m} \cdot \text{N}$$

Página 322

30 **En torno a la Tierra gira un satélite artificial en una órbita circular de radio orbital $2 \cdot R_T$. Demuestra que la trayectoria del satélite se encuentra siempre en un mismo plano.**

Las fuerzas gravitatorias son fuerzas centrales por lo que no originan momento, $\vec{M}$, ya que el radio vector del planeta, $\vec{r}$, y la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite, $\vec{F}_g$, son paralelos.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \rightarrow \text{ su módulo: } M = r \cdot F \cdot \text{sen}\,180° = 0$$

Por tanto, si no existe momento externo actuando sobre el satélite, su momento angular, $\vec{L}$, permanece constante, en módulo, dirección y sentido a lo largo de toda la órbita, ya que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \text{ si } \vec{M} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{cte}$$

Si $\vec{L}$ es constante en dirección, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ deben estar contenidos siempre en un mismo plano, ya que:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v} = \text{cte}$$

Por tanto, la trayectoria del satélite se encuentra siempre en un mismo plano, independientemente del radio de su órbita.

31 **Calcula el momento angular L de un satélite artificial de masa 1 100 kg, que se encuentra orbitando la Tierra en una órbita circular geoestacionaria del plano ecuatorial.**

Datos: $M_{Tierra} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

El momento angular viene dado por la expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v}$$

Por ser la órbita circular, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.

El módulo del momento angular es: $L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,90°$

Para obtener v y r, trabajaremos con las siguientes expresiones:

– Un satélite geoestacionario realiza un MCU, de período 24 h = 86 400 s, cumpliéndose que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}, \text{ entonces se tiene que: } v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \qquad (1)$$

– La fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, cumpliéndose que:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \qquad (2)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (1) y (2), y obtenemos que:

$r = 4{,}22 \cdot 10^7$ m

$v = 3{,}07 \cdot 10^3$ m/s

Por tanto, $L = 1{,}43 \cdot 10^{14}$ kg m² s^{-1}

32 **Busca información y explica, basándote en el principio de conservación del momento angular, por qué la Luna se aleja inexorablemente de la Tierra.**

Lo primero que debemos saber es que el sistema aislado Tierra-Luna debe mantener constante su momento angular. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la Tierra gira sobre sí misma y, por tanto, que el momento angular total del sistema aislado es el de traslación de la Luna en torno al Sol y el de rotación de la Tierra (se desprecia el movimiento de rotación lunar). La suma de ambos debe mantenerse constante.

La explicación del alejamiento de la Luna respecto de la Tierra se encuentra en las fuerzas de las mareas causadas por la Luna. Este movimiento es de sentido contrario al de rotación de la Tierra, por lo que, mientras se produce la rotación terrestre aparece una fuerza de fricción de las aguas sobre los fondos marinos que disipan energía y frenan esta rotación, provocando la disminución del momento angular de rotación de la Tierra. Para compensar esta disminución del L terrestre y que permanezca constante el momento angular total del sistema, el momento angular de traslación de la Luna debe aumentar y para ello debe alejarse de la Tierra. El resultado es que la Luna se aleja de la Tierra una distancia de aproximadamente 3,8 cm cada año.

33 **Una masa puntual de 50 g pasa por el punto (1,1,0) en el instante t = 1 s con una velocidad que viene dada por la expresión: $\vec{v} = -5 \cdot t \cdot \vec{i} + (2 \cdot t^2 - 2) \cdot \vec{j}$ m/s. Determina el momento angular de la partícula en el instante t = 1 s, medido respecto del centro del sistema de referencia (0,0,0).**

El momento angular puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

Primero, calculamos las componentes de r y p para t = 1 s

$$\vec{r} = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 0{,}05 \cdot (-5 \cdot \vec{i})$$

Y, a continuación, sustituimos en el determinante y resolvemos, obteniendo:

$$\vec{L} = 0{,}25 \cdot \vec{k} \text{ kg m}^2\text{/s}$$

TIC: ESTUDIO DE LOS SISTEMAS KEPLERIANOS CON EXCEL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.) CE.7.6. (EA.7.6.1.-7.6.2.) CE.7.7. (EA.7.7.2.) CE.7.8. (EA.7.8.1.)

1 Representa gráficamente *T*/días frente a *r*/km y obtén conclusiones.

El primer paso es filtrar en la tabla de datos de nuestro Excel, los astros que nos interesen. Para ello, nos vamos a la base de datos creada en la HOJA1 y, situados sobre la celda E1, filtramos el sistema kepleriano de Júpiter.

De forma que esta es la base de datos general:

ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio orbital medio (km)	SATÉLITE DE...
SOL	1,99E+30	6,95E+05	CENTRO	SOL
MERCURIO	3,30E+23	2,44E+03	5,79E+07	SOL MERCURIO
VENUS	4,87E+24	6,05E+03	1,08E+08	SOL VENUS
TIERRA	5,97E+24	6,37E+03	1,50E+08	SOL TIERRA
MARTE	6,42E+23	3,40E+03	2,28E+08	SOL MARTE
CERES	9,43E+20	4,73E+02	4,14E+08	SOL ENANO
JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,78E+08	SOL JÚPITER
SATURNO	5,69E+26	6,03E+04	1,43E+09	SOL SATURNO
URANO	8,69E+25	2,56E+04	2,87E+09	SOL URANO
NEPTUNO	1,02E+26	2,48E+04	4,50E+09	SOL NEPTUNO
PLUTÓN	1,25E+22	1,19E+03	5,90E+09	SOL ENANO
HAUMEA	4,20E+21	8,00E+02	6,50E+09	SOL ENANO
ERIS	1,67E+22	1,16E+02	9,87E+09	SOL ENANO
MAKEMAKE	4,00E+21	7,10E+02	6,85E+11	SOL ENANO
LUNA	7,35E+22	1,74E+03	3,84E+05	TIERRA
FOBOS	1,07E+16	1,10E+01	9,38E+03	MARTE
DEIMOS	1,48E+15	6,20E+00	2,35E+04	MARTE
METIS	3,60E+16	2,00E+01	1,28E+05	JÚPITER
ÍO	8,94E+22	1,82E+03	4,22E+05	JÚPITER
EUROPA	4,80E+22	1,57E+03	6,71E+05	JÚPITER
GANÍMEDES	1,48E+23	2,63E+03	1,07E+06	JÚPITER
CALISTO	1,08E+23	2,40E+03	1,88E+06	JÚPITER
MIMAS	3,75E+19	1,96E+02	1,86E+05	SATURNO
ENCÉLADO	1,08E+20	2,50E+02	2,38E+05	SATURNO
TETIS	6,18E+20	5,30E+02	2,95E+05	SATURNO
DIONE	1,10E+21	5,60E+02	3,77E+05	SATURNO
REA	2,32E+21	7,65E+02	5,27E+05	SATURNO
TITÁN	1,35E+23	2,58E+03	1,22E+06	SATURNO

Al situarnos sobre la última columna y filtrar, nos quedaremos con aquellas celdas que contengan la palabra Júpiter. Esto nos proporcionará los datos del sistema kepleriano generado por Júpiter. Tal y como se muestra a continuación:

ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio orbital medio (km)	SATÉLITE DE...
JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,78E+08	SOL JÚPITER
METIS	3,60E+16	2,00E+01	1,28E+05	JÚPITER
ÍO	8,94E+22	1,82E+03	4,22E+05	JÚPITER
EUROPA	4,80E+22	1,57E+03	6,71E+05	JÚPITER
GANÍMEDES	1,48E+23	2,63E+03	1,07E+06	JÚPITER
CALISTO	1,08E+23	2,40E+03	1,88E+06	JÚPITER

Seleccionamos la tabla filtrada y la copiamos en la celda A1 de la HOJA2. Una vez copiada, insertaremos una nueva columna tras la columna C que llamaremos Radio (m) y otra, tras la nueva E, que llamaremos Radio orbital medio (m). En ellas, pasaremos a metros los datos de la columna anterior, mediante los siguientes pasos:

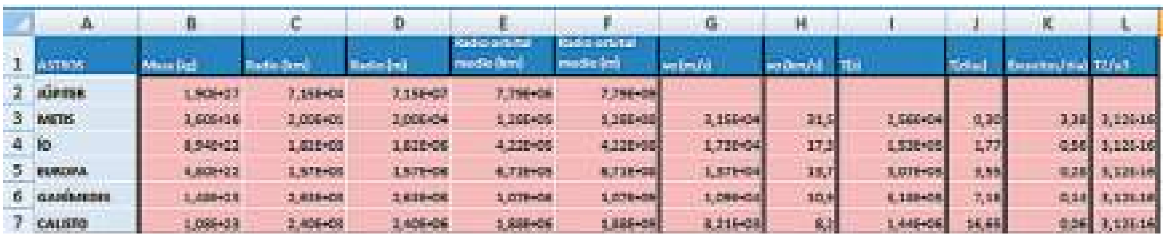
En la nueva celda D3 escribimos "=C3*1000" y en la nueva F3 "=E3*1000". En ambos casos, arrastramos hacia abajo para copiar la fórmula al resto de filas.

Decidimos las magnitudes orbitales que calcularemos para los 5 satélites de Júpiter de nuestra base de datos. Estas serán la velocidad orbital en m/s y en km/s, el período orbital en s y en días y la frecuencia del movimiento en vueltas por día.

Para ello nos posicionamos en la celda G1 y creamos el campo v_o (m/s), correspondiente a la velocidad orbital. En G3 escribimos la fórmula para su cálculo. Luego en H1 creamos el campo v_o (km/s) y en H3 pasamos a km/s la velocidad obtenida. Para el cálculo del período nos situamos en I1 y creamos el campo T (s) y en I3 escribimos la fórmula para su cálculo. En J1 creamos el campo T (días) y en J3 pasamos el período a días. Para la frecuencia usaremos la columna K. Todas las fórmulas a las que hemos hecho referencia aparecen resumidas en la siguiente tabla:

Magnitud orbital	Expresión matemática	Fórmula Excel
Velocidad orbital v_o	$v = \sqrt{\dfrac{G \cdot M_J}{r}}$	G3"=RAIZ(6.67E-11*1,9E+27/F3)" H3"=G3/1000"
Período orbital T	$T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot R}{v}$	I3"=2*PI()*F3/G3" J3"=I3/86400"
Frecuencia f	$f = \dfrac{1}{T}$	K3"=1/J3"

El resultado puede verse en la imagen que se adjunta:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio (m)	Radio orbital medio (km)	Radio orbital medio (m)	vo (m/s)	vo (km/s)	T(s)	T(días)	[illegible]	[illegible]
2	JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,15E+07	7,78E+08	7,78E+08						
3	METIS	3,60E+16	2,00E+01	2,00E+04	1,28E+05	1,28E+08	3,15E+04	31,5	2,56E+04	0,30	3,38	3,12E-16
4	ÍO	8,94E+22	1,82E+03	1,82E+06	4,22E+05	4,22E+08	1,73E+04	17,3	1,53E+05	1,77	0,56	3,12E-16
5	EUROPA	4,80E+22	1,57E+03	1,57E+06	6,71E+05	6,71E+08	1,37E+04	13,7	3,07E+05	3,55	0,28	3,12E-16
6	GANÍMEDES	1,48E+23	2,63E+03	2,63E+06	1,07E+06	1,07E+09	1,09E+04	10,9	6,18E+05	7,16	0,14	3,12E-16
7	CALISTO	1,08E+23	2,40E+03	2,40E+06	1,88E+06	1,88E+09	8,21E+03	8,2	1,44E+06	16,69	0,06	3,12E-16

Por último, comprobamos que el sistema estudiado es kepleriano, demostrando que se rige por la tercera ley de Kepler. El cociente T^2/r^3 debe ser el mismo para todos los satélites de Júpiter. Para ello, en L1, escribiremos T^2/r^3 como enunciado de campo y en L3"=I3^2/F3^3".

Finalmente, arrastramos hacia abajo el rango G3:L3 y copiamos al resto de filas.

A continuación, marcamos las celdas correspondientes a T y r e insertamos un gráfico de puntos. Quedará así:

2 **Realiza esta misma hoja de cálculo para cada uno de los sistemas keplerianos que puedas formar con la hoja de datos que hemos elaborado.**

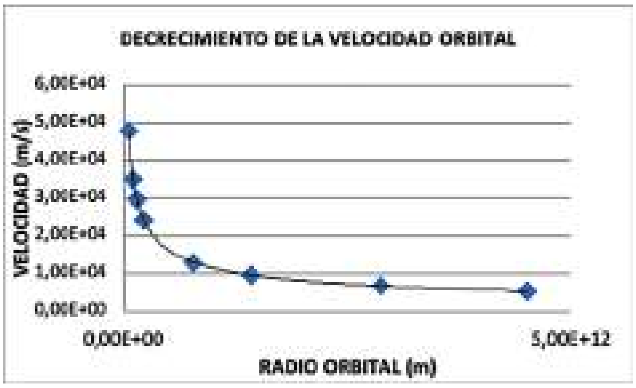
El procedimiento es idéntico al realizado en la actividad 1, la diferencia estriba en el filtrado que hagamos. Por ejemplo, si decidimos estudiar el sistema solar con sus planetas naturales, en la HOJA1, al situarnos sobre la celda E1, filtraremos seleccionando las celdas que contengan la palabra Sol, excepto Sol Enano, por razones obvias. Obtendríamos esta tabla reducida:

ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio orbital medio (km)	SATÉLITE DE...
SOL	1,99E+30	6,95E+05	CENTRO	SOL
MERCURIO	3,30E+23	2,44E+03	5,79E+07	SOL MERCURIO
VENUS	4,87E+24	6,05E+03	1,08E+08	SOL VENUS
TIERRA	5,97E+24	6,37E+03	1,50E+08	SOL TIERRA
MARTE	6,42E+23	3,40E+03	2,28E+08	SOL MARTE
JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,78E+08	SOL JÚPITER
SATURNO	5,69E+26	6,03E+04	1,43E+09	SOL SATURNO
URANO	8,69E+25	2,56E+04	2,87E+09	SOL URANO
NEPTUNO	1,02E+26	2,48E+04	4,50E+09	SOL NEPTUNO

A continuación, procederemos como en la actividad 1. Obteniendo la hoja de cálculo que habremos construido en la HOJA2:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	ASTROS	Masa (kg)	Radio (km)	Radio orbital medio (km)	Radio orbital medio (m)	[illegible]	[illegible]	T(s)	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	SOL	1,99E+30	6,95E+05	CENTRO							
3	MERCURIO	3,30E+23	2,44E+03	5,79E+07	5,79E+10	4,79E+04	4,79E+01	7,60E+06	8,80E+01	1,14E+02	2,97E-19
4	VENUS	4,87E+24	6,05E+03	1,08E+08	1,08E+11	3,50E+04	3,50E+01	1,94E+07	2,25E+02	[illegible]	2,97E-19
5	TIERRA	5,97E+24	6,37E+03	1,50E+08	1,50E+11	2,98E+04	2,98E+01	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,97E-19
6	MARTE	6,42E+23	3,40E+03	2,28E+08	2,28E+11	2,41E+04	2,41E+01	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,97E-19
7	JÚPITER	1,90E+27	7,15E+04	7,78E+08	7,78E+11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2,97E-19
8	SATURNO	5,69E+26	6,03E+04	1,43E+09	1,43E+12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1,08E+04	[illegible]	2,97E-19
9	URANO	8,69E+25	2,56E+04	2,87E+09	2,87E+12	6,80E+03	6,80E+00	[illegible]	3,07E+04	[illegible]	2,97E-19
10	NEPTUNO	1,02E+26	2,48E+04	4,50E+09	4,50E+12	5,43E+03	5,43E+00	[illegible]	6,02E+04	[illegible]	2,97E-19

La gráfica que representa el decrecimiento orbital será como la que sigue:



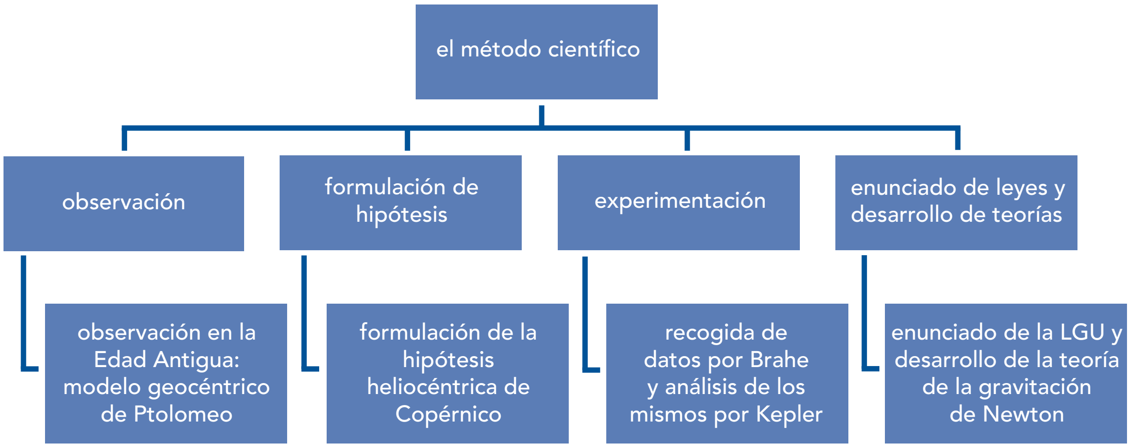
TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.7.6. (EA.7.6.1.-7.6.2.) CE.7.7. (EA.7.7.1.-7.7.2.) CE.7.8. (EA.7.8.1.-7.8.2.)

Página 330

El camino hacia la LGU

1 **Elabora un mapa conceptual en el que relaciones las fases del método científico con los pasos seguidos a lo largo de la historia de la astronomía para desarrollar la teoría de la gravitación de Newton.**



Este mapa conceptual es de tipo jerárquico. En **anayaeducacion.es** dispone de más información sobre las características de los distintos tipos de mapas conceptuales.

2 **Realiza una tabla en la que resumas las diferencias y las semejanzas entre los modelos del universo desarrollados por Ptolomeo, Copérnico, Brahe y Kepler.**

AUTORES	Ptolomeo	Copérnico	Brahe	Kepler
Modelo	Geocéntrico	Heliocéntrico	Mixto Geo-Helio	Heliocéntrico
Órbitas	Circulares: epiciclos y deferentes	Circulares	Circulares	Elípticas
Centro	Tierra	Sol	Tierra; el Sol y la Luna giran en torno a la Tierra, pero los planetas giran en torno al Sol	Sol
Siglo	S. II a.C.	S. XVI	S. XVI	S. XVII

3 **Busca información en Internet y explica qué significado tiene y a quién se le atribuye la frase: «E pur si muove…».**

Esta frase se le atribuye a Galileo Galilei y significa «Y, sin embargo, se mueve…».

Galileo Galilei es, sin duda, el mayor responsable del nacimiento de la ciencia moderna. Galileo siempre apoyó las ideas copernicanas, encontrando evidencias empíricas que sostenían el heliocentrismo. Los fieles seguidores de Aristóteles se aliaron con la Iglesia para impedir que el modelo de Copérnico cobrase seguidores. La iglesia católica, temerosa de que el protestantismo ganara la batalla religiosa que traían entre sí, hizo que Galileo adjurara de sus teorías, llevándolo a un juicio ante la Inquisición que lo condenaría a un arresto domiciliario de por vida.

Se dice que, tras el juicio, Galileo murmuró: «Y, sin embargo, se mueve…» refiriéndose a la Tierra, a una Tierra que se mueve en torno al Sol, por mucho que la Iglesia quisiera negarlo.

4 **A pesar de que Tycho Brahe no consiguió elaborar un modelo matemático sobre los movimientos planetarios, sus aportaciones fueron imprescindibles para el desarrollo de la LGU. Argumenta este hecho.**

La experimentación es la base del método científico, método de trabajo capaz de dar explicación a los fenómenos naturales. Para ello, se necesitan hacer medidas y recoger datos que puedan posteriormente ser analizados. Ninguna ley puede elaborarse sin unos datos que la avalen. Es por ello por lo que la multitud de datos recogidos por Brahe a lo largo de su vida fueron imprescindibles para que, más tarde, llegara Kepler y, haciendo uso de las mediciones de Brahe, fuera capaz de construir sus leyes empíricas del movimiento planetario.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información sobre las características de los textos argumentativos, lo que le será de utilidad para elaborar la respuesta a esta pregunta.

Leyes de Kepler

5 **Enuncia la segunda ley de Kepler y explica cómo varía la velocidad de un planeta a lo largo de su trayectoria alrededor del Sol.**

Para que la velocidad areolar permanezca constante es necesario que el radio vector del planeta cubra áreas iguales en tiempo iguales a lo largo del barrido que hace sobre la elipse que dibuja. Como consecuencia, cuando el planeta está más alejado del Sol debe ir más rápido y cuando está más cerca del Sol debe ir más lento, de esta forma, el área barrida por unidad de tiempo en ambos casos debe ser la misma, tal y como enuncia la segunda ley de Kepler.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información sobre las características de los textos expositivos.

6 **Los valores aproximados de la distancia media de Urano al Sol y del período de revolución de Venus alrededor del Sol son 2,9 · 10⁹ km y 225 días, respectivamente. Asimismo, la distancia entre la Tierra y el Sol es de 1 ua y el período de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365,25 días. Calcula:**

a) La distancia entre Venus y el Sol en ua.

b) La duración, en días, de una vuelta completa de Urano en torno al Sol.

a) Aplicando la tercera ley de Kepler para Venus y la Tierra:

$$\frac{T_V^2}{r_V^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{225^2}{r_V^3} = \frac{365{,}25^2}{1^3}$$

$$r_V \approx 0{,}72 \text{ ua}$$

b) Nuevamente, aplicamos la tercera ley de Kepler para Urano y la Tierra:

$$\frac{T_U^2}{r_U^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{T_U^2}{\left(2{,}9 \cdot 10^{12}\right)^3} = \frac{365{,}25^2}{\left(1{,}5 \cdot 10^{11}\right)^3}$$

$$T_U = 31\,049{,}19 \text{ días} \approx 31\,000 \text{ días}$$

7 **Los dos únicos planetas que carecen de satélites naturales en el sistema solar son Mercurio y Venus. Por el contrario, Júpiter tiene hasta 69 satélites naturales. Los más importantes, por ser los de mayor masa, son cuatro: Ío, Europa, Ganímedes y Calisto. Fueron descubiertos en 1610 por Galileo, por lo que también se les denomina lunas galileanas. Sabiendo que Ío tarda 1,7 días terrestres en completar una vuelta en torno a Júpiter, calcula el período de revolución de los principales satélites de Júpiter.**

Utiliza los datos que aparecen en la siguiente tabla:

Satélites	Ío	Europa	Ganímedes	Calisto
Radio orbital (km)	421 600	671 100	1 070 400	1 882 700

Aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_{IO}^2}{r_{IO}^3} = \frac{T_{EUROPA}^2}{r_{EUROPA}^3} = \frac{T_{GANÍMEDES}^2}{r_{GANÍMEDES}^3} = \frac{T_{CALISTO}^2}{r_{CALISTO}^3}$$

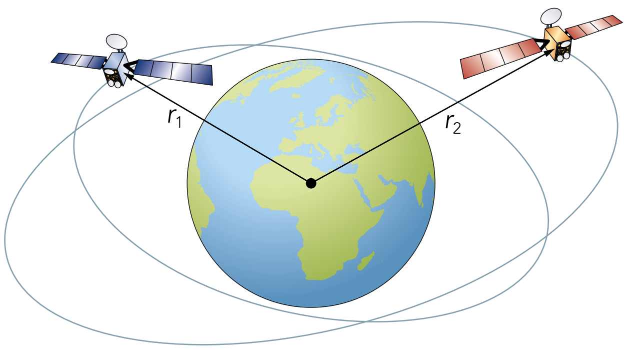
$$\frac{T_{IO}^2}{r_{IO}^3} = \frac{T_{EUROPA}^2}{r_{EUROPA}^3} \rightarrow T_{EUROPA} = \sqrt{\frac{1{,}7^2 \cdot 671\,100^3}{421\,600^3}} = 3{,}414 \text{ días}$$

$$\frac{T_{IO}^2}{r_{IO}^3} = \frac{T_{GANÍMEDES}^2}{r_{GANÍMEDES}^3} \rightarrow T_{GANÍMEDES} = \sqrt{\frac{1{,}7^2 \cdot 1\,070\,400^3}{421\,600^3}} = 6{,}877 \text{ días}$$

$$\frac{T_{IO}^2}{r_{IO}^3} = \frac{T_{CALISTO}^2}{r_{CALISTO}^3} = \rightarrow T_{CALISTO} = \sqrt{\frac{1{,}7^2 \cdot 1\,882\,700^3}{421\,600^3}} = 16{,}042 \text{ días}$$

$T_{EUR} \approx 3{,}4$ días; $T_{GAN} \approx 7$ días; $T_{CAL} \approx 16$ días

8 **Dos satélites artificiales orbitan la Tierra en órbitas circulares de radios r_1 = 7 500 km y r_2 = 9 500 km. Calcula la relación que existe entre sus períodos de revolución alrededor de la Tierra.**



Aplicando la tercera ley de Kepler para ambos satélites:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{7\,500^3}{9\,500^3}} = 0{,}70$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 0{,}7$$

9 **El período de revolución del planeta Marte alrededor del Sol es de 1,88 años terrestres y el de Mercurio de 0,24 años terrestres. Mercurio es el planeta más cercano al Sol, siendo su órbita la más excéntrica de todos los planetas del sistema solar, con un valor de 0,2056. Además, la distancia máxima de Mercurio al Sol es 0,47 ua y la mínima 0,31 ua. Calcula:**

a) **La relación que existe entre las velocidades de Mercurio en su perihelio y su afelio.**

b) **El semieje mayor, a, de la trayectoria elíptica que recorre Mercurio en torno al Sol.**

c) **La distancia media de Marte al Sol.**

a) La segunda ley de Kepler enuncia que el radio vector de un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales; esto supone que, en las zonas en las que planeta se acerca al Sol, debe aumentar su celeridad y, en las zonas en las que se aleja, se reduzca dicha celeridad, cumpliéndose para el afelio y para el perihelio que:

$$r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p$$

Si aplicamos esta relación al planeta Mercurio:

$$0{,}47 \cdot v_a = 0{,}31 \cdot v_p \quad \rightarrow \quad \frac{v_p}{v_a} = \frac{0{,}47}{0{,}31} = 1{,}516$$

$$\frac{v_p}{v_a} \approx 1{,}52$$

b) Aplicando la primera ley de Kepler, las órbitas de los planetas son elípticas y cumplen que:

$$2 \cdot a = r_a + r_p \rightarrow$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{0{,}47 + 0{,}31}{2} = 0{,}39 \text{ ua}$$

c) Aplicando la tercera ley de Kepler a Marte y Mercurio:

$$\frac{T^2_{MARTE}}{a^3_{MARTE}} = \frac{T^2_{MERCURIO}}{a^3_{MERCURIO}}$$

Conocido el semieje mayor de la elipse de Mercurio podemos calcular el semieje mayor de Marte:

$$a_{MARTE} = \sqrt[3]{\frac{T^2_{MARTE}}{T^2_{MERCURIO}}} \cdot a_{MERCURIO} = 1{,}538 \text{ ua}$$

$$a_{MARTE} \approx 1{,}5 \text{ ua}$$

Si suponemos que el planeta Marte realiza un movimiento aproximadamente circular y uniforme alrededor del Sol podemos decir que:

$$r_{MARTE} \sim 1{,}5 \text{ ua}$$

Ley de gravitación universal

10 Describe las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. ¿En qué circunstancias se puede utilizar la LGU para cuerpos extensos?

La fuerza gravitatoria con la que se atraen dos cuerpos cualesquiera del universo es **directamente proporcional al producto de sus masas** e **inversamente proporcional al cuadrado de la distancia** que separa sus centros. Su expresión matemática es:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

En esta expresión:

- F es la fuerza con la que los cuerpos se atraen, medida en N.
- M y m son las masas de ambos cuerpos, medidas en kg.
- G es la constante de proporcionalidad y su valor es: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².

Esta ley no solo demostraría la caída de los cuerpos hacia el centro de la Tierra, sino todos los movimientos orbitales que a lo largo de la historia habían intentado explicarse.

La LGU está diseñada para masas puntuales, pero la utilizamos para cuerpos extensos siempre que tengamos en cuenta la siguiente hipótesis:

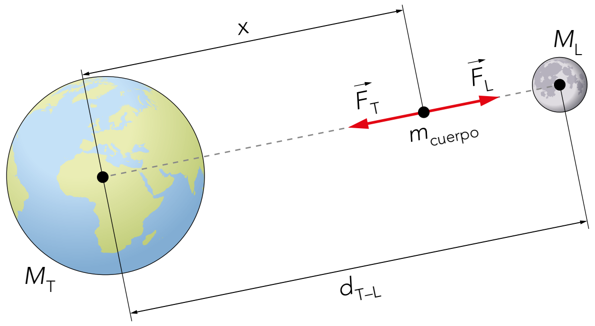
«La fuerza gravitatoria que ejerce una esfera homogénea de radio R y masa M es la misma que ejercería una partícula puntual de la misma masa situada en su centro de gravedad».

El centro de gravedad, CG, de un cuerpo es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre sus partículas. En el caso de cuerpos con alta simetría y densidad uniforme, el CG se sitúa sobre su centro de simetría o centro geométrico.

11 **Una sonda de 2 000 kg de masa es lanzada al espacio en dirección a la Luna. Cuando la sonda se localiza a $2 \cdot 10^8$ m de la superficie terrestre se encuentra totalmente alineada con la Tierra y la Luna. ¿Qué fuerza gravitatoria neta se ejerce sobre la sonda en ese momento? Extrae conclusiones sobre el resultado obtenido.**

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $R_T = 6\,371$ km; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg;
$M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; $d_{T-L} = 3{,}84 \cdot 10^8$ m.

Realizamos un diagrama de fuerzas para una mejor comprensión del problema:



La fuerza que ejerce la Tierra a esa distancia es:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{x^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 2\,000}{\left(2{,}06 \cdot 10^8\right)^2}$$

$$F_T = 18{,}70 \text{ N}$$

La fuerza que ejerce la Luna a esa distancia es:

$$F_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{\left(d_{T-L} - x\right)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} \cdot 2\,000}{\left(1{,}78 \cdot 10^8\right)^2}$$

$$F_L = 0{,}31 \text{ N}$$

Si aplicamos el principio de superposición, la resultante de fuerzas sobre el cuerpo es:

$$F_R = 18{,}70 - 0{,}31 = 18{,}39 \text{ N} \sim 18{,}4 \text{ N}$$

A la distancia que propone el enunciado del ejercicio, la fuerza que ejerce la Tierra sobre el satélite ha disminuido enormemente con respecto a la superficie, cuyo valor sería:

$$P = m \cdot g = 2\,000 \cdot 9{,}8 = 19\,600 \text{ N}$$

12 **Supuesta la Luna como una esfera homogénea de radio $R_L = 0{,}27 \cdot R_T$ y masa $M_L = 0{,}012 \cdot M_T$, calcula la densidad del satélite terrestre.**

Datos: g_0 (Tierra) = 9,8 m/s²; $R_T = 6\,371$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Los datos que aporta el problema permiten calcular la masa de la Tierra:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \;\rightarrow\; M_T = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{G}$$

Que necesitaremos para el cálculo de la densidad de la Luna, como vemos:

$$\rho_L = \frac{M_L}{V_L} = \frac{0{,}012 \cdot M_T}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_L^3} = \frac{0{,}012 \cdot M_T}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}27^3 \cdot R_T^3} = \frac{0{,}012 \cdot \frac{g_0 \cdot R_T^2}{G}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}27^3 \cdot R_T^3}$$

Sustituyendo datos:

$$\rho_L = \frac{0{,}012 \cdot \dfrac{g_0 \cdot R_T^2}{G}}{\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}27^3 \cdot R_T^3} = 3\,356{,}56 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{Luna} \sim 3\,360 \text{ kg/m}^3$$

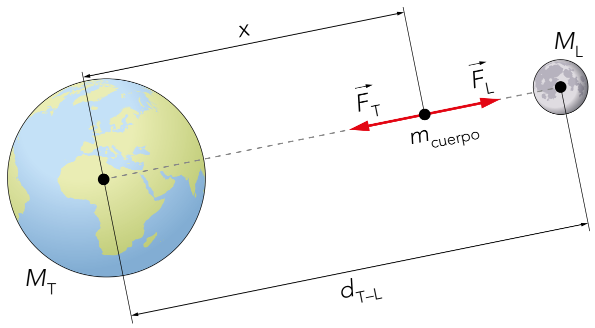
Página 331

13 Calcula la fuerza neta a la que se vería sometido un cuerpo de masa 500 kg, situado sobre la recta que une los centros de la Tierra y la Luna, a una distancia de la Tierra de 0,9 · $d_{T\text{-}L}$. Dibuja un diagrama de fuerzas.

Datos: G = 6,67 · 10^−11^ N · m²/kg²; M_T = 5,97 · 10^24^ kg;

M_L = 7,35 · 10^22^ kg; $d_{T\text{-}L}$ = 3,84 · 10^8^ m.

Realizaremos un diagrama de fuerzas para una mejor comprensión del problema, suponiendo que el cuerpo se encuentra totalmente alineado con la Tierra y la Luna y las únicas fuerzas que aparecen sobre él son las producidas por estos dos astros.



Aplicando la LGU:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(0{,}9\ d_{T\text{–}L})^2}$$

$$F_L = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{(0{,}1\ d_{T\text{–}L})^2}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{0{,}1^2}{0{,}9^2} \cdot \frac{M_T}{M_L} = 1{,}002\,8 \approx 1 \;\rightarrow\; F_T \approx F_L$$

Aplicando el principio de superposición, se obtiene la fuerza resultante:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_T + \vec{F}_L = 0$$

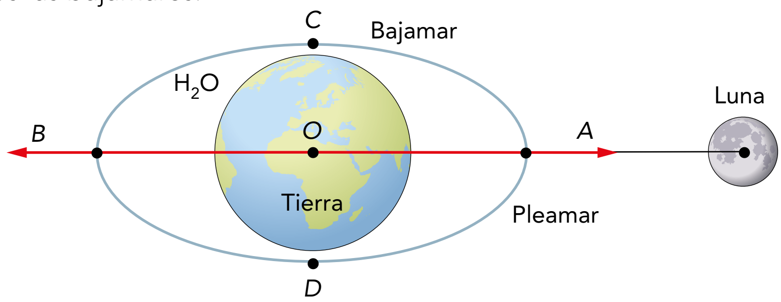
Por tanto, $F_R \sim 0$ N.

14 Busca información en Internet y, utilizando la LGU, escribe un informe en el que expongas cómo se produce el fenómeno de las mareas.

Las mareas se producen de manera cíclica, y consisten en los movimientos de subida y bajada del nivel del mar que se repiten dos veces al día. La subida del nivel del mar se denomina marea alta (pleamar) y, transcurridas 6 horas y 13 minutos de media, comienza la bajada del nivel del mar o marea baja (bajamar). En un día, ocurren dos mareas altas y dos mareas bajas.

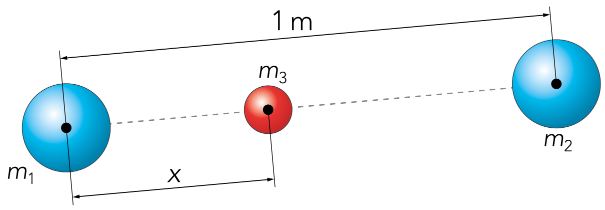
Newton estudió estos fenómenos y fue capaz de explicarlos mediante su ley de gravitación: la atracción que sufren los mares y los océanos debida a las fuerzas gravitatorias que ejercen la Luna y el Sol sobre ellos produce las mareas.

Explicar la ***fuerza de marea*** requiere entender dos cosas. La primera de ellas consiste en comprender que la Tierra está formada por una capa de agua que se encuentra en su superficie, y que ese fluido superficial puede modificar su forma dependiendo de las fuerzas que se apliquen. La segunda es que la Luna ejerce una fuerza sobre los mares y los océanos, de manera que las aguas que están más cerca de la Luna (A) se ven atraídas con mayor fuerza que las que se encuentran en sus antípodas (B), sufriendo estas menor atracción. El resultado es una deformación elipsoidal de las aguas cuyos vértices, A y B, se encuentran en la dirección de la Luna. En estos vértices se produce la pleamar, mientras que en las posiciones C y D encontraremos las bajamares.

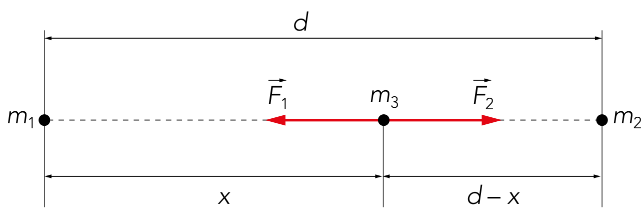


Le sugerimos que recomiende a su alumnado la consulta de los apartados Plan Lingüístico y TIC, que encontrará en los recursos relacionados con las claves del proyecto, en **anayaeducacion.es**.

15 **Dos partículas m_1 y m_2, una con el doble de masa que la otra ($m_1 = 2 \cdot m_2$), se encuentran separadas una distancia d = 1 m. Calcula en qué punto del segmento que las une, medido desde la masa m_1, se anula la fuerza gravitatoria resultante sobre una tercera masa puntual $m_3 = 0{,}5 \cdot m_2$ colocada en dicho punto.**



La situación que nos expone el problema puede representarse mediante el siguiente diagrama:



Representaremos por x la distancia entre la masa m_3 y la m_1. Como la distancia entre las dos masas m_1 y m_2 es d, nos queda que la distancia entre m_2 y m_3 es $d - x$. A esa distancia, las fuerzas que ejercen las masas m_1 y m_2 sobre la m_3 deben anularse.

Aplicando el principio de superposición:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \;\rightarrow\; \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Esto implica que los módulos de dichas fuerzas tengan que ser iguales, para poder anularse sus vectores:

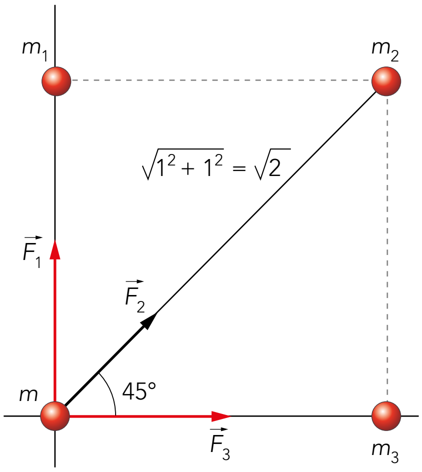
$$F_1 = F_2 \;\rightarrow\; G \cdot \frac{m_1 \cdot m_3}{x^2} = G \cdot \frac{m_2 \cdot m_3}{(d-x)^2}$$

$$\cancel{G} \cdot \frac{2\,\cancel{m_2} \cdot \cancel{m_3}}{x^2} = \cancel{G} \cdot \frac{\cancel{m_2} \cdot \cancel{m_3}}{(d-x)^2} \;\rightarrow\; \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

$$x \approx 0{,}6 \text{ m}$$

16 **Calcula la fuerza gravitatoria resultante sobre una masa m = 1 kg, situada en el punto (0,0) de un sistema de referencia cartesiano, debida al sistema de partículas formado por tres masas puntuales iguales de 1 kg, m_1, m_2 y m_3, distribuidas en los puntos (0,1), (1,1), (1,0), respectivamente, medidos en metros.**

Realizamos un diagrama de fuerzas para una mejor comprensión del problema:



$$\vec{F}_1 = G \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = G \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = G \cdot \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{2^2}} \cdot \cos 45 \cdot \vec{i} + G \cdot \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{2^2}} \cdot \operatorname{sen} 45 \cdot \vec{j}$$

Aplicando el principio de superposición, hacemos la suma vectorial de las tres fuerzas y obtenemos la fuerza resultante sobre la masa m.

$$\vec{F} = 9{,}03 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{i} + 9{,}03 \cdot 10^{-11} \cdot \vec{j} \text{ N}$$

La gravedad y el peso de los cuerpos

17 **Si dejamos caer dos cuerpos de diferente masa sobre la superficie de la Tierra, razona si lo harán con la misma aceleración.**

Cualquier cuerpo que caiga sobre la Tierra desde una misma altura se verá sometido a la misma aceleración de la gravedad y llegará al suelo con la misma velocidad. Hay que hacer notar que esto ocurrirá si está sometido únicamente a la fuerza de la gravedad; es decir, en ausencia de fuerzas exteriores como los rozamientos.

La aceleración de la gravedad no depende de la masa del cuerpo, depende de la masa del planeta que crea la gravedad y de la distancia a la que se encuentra el cuerpo.

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Por tanto, todos los cuerpos se ven igualmente acelerados en sus caídas, independientemente de la masa que tengan.

18 **Calcula el valor de la gravedad en una órbita situada a 5 000 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Si a esa altura hacemos orbitar un satélite artificial de 1 200 kg, ¿cuál será su peso?**

Datos: g_0(Tierra) = 9,8 m/s^2; R_T = 6 371 km.

La aceleración de la gravedad queda definida a través de la siguiente expresión:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r^2}$$

Donde $r = R_T + h = 6{,}371 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6 = 1{,}1371 \cdot 10^7$ m

Como los datos que nos aporta el enunciado del ejercicio son g_0 y R_T, no podemos utilizar G y M_T en la expresión, así que, relacionaremos estas magnitudes mediante la definición de gravedad en la superficie terrestre de la siguiente forma:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Y, sustituyendo en la definición de la aceleración de la gravedad:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2} = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}371 \cdot 10^6)^2}{(1{,}1371 \cdot 10^7)^2} = 3{,}076 \text{ m/s}^2$$

$$g \approx 3{,}08 \text{ m/s}^2$$

Para el cálculo del peso del cuerpo aplicamos: $P = m \cdot g$

$$P = 1\,200 \cdot 3{,}08 = 3\,696 \text{ N}$$

19 Si dejamos caer un cuerpo sobre la superficie lunar desde una altura *h* igual al radio del satélite lunar, R_L; ¿en qué proporción habrá aumentado su peso al llegar a la superficie respecto del que tenía momentos antes de la caída?

La falta de datos en el enunciado del ejercicio nos hace suponer que podremos calcular la proporción en la que habrá aumentado el peso del cuerpo al llegar a la superficie respecto del que tenía momentos antes de la caída mediante relaciones. Por tanto, expresaremos el peso sobre la superficie terrestre y el peso a cierta altura $h = R_L$, y dividiremos ambas expresiones:

$$P_0 = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{R_L^{\,2}}$$

$$P_h = G \cdot \frac{M_L \cdot m}{\left(R_L + R_L\right)^2}$$

El resultado de dividir las dos expresiones es:

$$P_0 = 4\,P_h$$

20 Calcula qué relación existe entre la aceleración de la gravedad en la superficie de cualquiera de los planetas del sistema solar y la gravedad a una altura $h = 2 \cdot R$. Siendo *R* el radio del planeta.

La falta de datos en el enunciado del ejercicio nos hace suponer que podremos calcular la relación existente entre la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta de radio R y la gravedad a una altura $h = 2 \cdot R$ mediante relaciones. Por tanto, expresaremos la gravedad a cierta altura h y la gravedad sobre la superficie del planeta y dividiremos ambas expresiones:

$$g_h = G \cdot \frac{M}{(R + 2\,R)^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

El resultado de dividir las dos expresiones es: $g_h = \dfrac{1}{9}\, g_0$

21 ¿A qué altura tiene que orbitar un satélite de 590 kg sobre la superficie de Marte para que su peso se reduzca a la mitad respecto del que tendría en la superficie marciana?

Dato: $R_{Marte} = 3\,397$ km.

Utilizamos la LGU aplicada sobre la superficie del planeta y a cierta altura del planeta:

$$P_0 = G \cdot \frac{M_M \cdot m}{{R_M}^2}$$

$$P_h = \frac{P_0}{2} = G \cdot \frac{M_M \cdot m}{\left(R_M + h\right)^2}$$

Al dividir las dos expresiones se obtiene que:

$$2 = \frac{\left(R_M + h\right)^2}{R_M^2}$$

Despejando h se obtiene:

$$h = (\sqrt{2} - 1) \cdot R_M = (\sqrt{2} - 1) \cdot 3{,}397 \cdot 10^6 = 1\,407\,083{,}5 \text{ m}$$

$$h \approx 1\,400 \text{ km}$$

22 Puesto que la gravedad en la superficie lunar es una sexta parte de la gravedad terrestre, si midiéramos el valor de la constante de la gravedad *G* utilizando la balanza de Cavendish en la Luna, ¿cuál sería el valor encontrado para *G* en la superficie lunar?

El experimento de la balanza de torsión de Cavendish arrojaría el mismo valor para la constante G independientemente del astro en el que se realizara el experimento, ya que se trata de una constante universal, lo que indica que las fuerzas gravitatorias aparecen entre cuerpos materiales en cualquier lugar del universo, cumpliéndose la misma ley: la LGU.

23 Si el planeta Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su misma masa, ¿en qué proporción se vería afectada la gravedad sobre la superficie de la nueva Tierra?

Para calcular la relación entre gravedades en diferentes situaciones, expresaremos la gravedad en la superficie de la Tierra de radio R_T y la gravedad en la superficie de una hipotética Tierra de radio $R_T/2$:

$$g'_0 = G \cdot \frac{M_T}{\left(\dfrac{R_T}{2}\right)^2}$$

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{{R_T}^2}$$

Si dividimos ambas expresiones obtenemos:

$$g_0' = 4\, g_0$$

24 Si la Luna duplicase su volumen y modificase su masa de tal forma que la gravedad en su superficie siguiera siendo la misma, ¿en qué factor variaría la densidad del satélite?

Para contestar a esta pregunta, representaremos el volumen de la hipotética Luna con relación a la Luna original como:

$$V' = 2 \cdot V$$

Si consideramos la Luna como un astro de forma esférica podemos sustituir el volumen de la esfera en la relación anterior:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R'^3 = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Obteniéndose así la relación entre el radio de la hipotética Luna y la Luna original: $R' = \sqrt[3]{2} \cdot R$

La relación entre la masa de la nueva Luna M' y la original M no es conocida. A partir de la relación entre gravedades de ambos astros, obtendremos la relación entre M' y M:

$$g' = G \cdot \frac{M'}{R'^2} = G \cdot \frac{M'}{\left(\sqrt[3]{2} \cdot R\right)^2}$$

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Dividiendo las dos expresiones obtenemos:

$$M' = 1{,}587\,40\ M$$

Una vez que conocemos la relación entre masas y también la relación entre volúmenes, calcularemos la densidad de la hipotética Luna y la original y volveremos a dividir las dos expresiones:

$$\rho' = \frac{M'}{V'} = \frac{1{,}587\,4\ M}{2 \cdot V}$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Al dividir las dos expresiones, se obtiene que: $\rho' = 0{,}79\ \rho$.

25 **Si la gravedad en la superficie de la Tierra es 2,6 veces mayor que la gravedad en la superficie de Marte, ¿cuánto pesaría un cuerpo de 200 kg sobre la superficie marciana?**

Datos: g_0(Tierra) = 9,8 m/s².

Para calcular el peso en la superficie marciana, utilizaremos la expresión reducida de la LGU:

$$P_M = m \cdot g_M$$

Puesto que: $g_T = 2{,}6\ g_M \rightarrow g_M = \dfrac{9{,}8}{2{,}6} = 3{,}769\ \text{m/s}^2$

Sustituyendo en el peso:

$$P_M = m \cdot g_M = 200 \cdot 3{,}769 = 753{,}85\ \text{N}$$

26 **Se deja caer un cuerpo desde una altura de 300 m sobre la superficie de la Luna. Calcula la velocidad con la que impactaría al llegar al suelo lunar, sabiendo que la Luna tiene una masa 0,012 veces la de la Tierra y su radio es 0,27 veces el terrestre.**

Dato: g_0(Tierra) = 9,8 m/s².

Si despreciamos los 300 m de altura frente al radio lunar, podríamos calcular la velocidad con la que se deja caer un cuerpo sobre la superficie de un astro desde una altura *h*, aplicando las ecuaciones cinemáticas del movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado, siendo esta aceleración la de la gravedad en el astro, *g*:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Conocida la altura desde la que cae el cuerpo, nos interesa encontrar la gravedad en la Luna, g_L:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = G \cdot \frac{0{,}012 \cdot M_T}{(0{,}27 \cdot R_T)^2}$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$g_L = \frac{0{,}012}{0{,}27^2} \cdot g_T = 1{,}613\,17\ \text{m/s}^2$$

Encontrada la gravedad en la Luna, obtenemos la velocidad de caída:

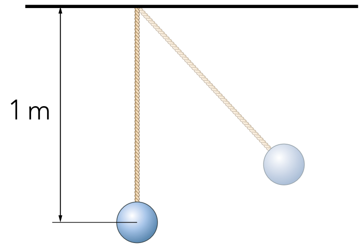
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1{,}613\,17 \cdot 300} = 30{,}98\ \text{m/s}$$

Puesto que la velocidad es de caída, la componente *Y* del vector que la representa sería negativa:

$$v \approx -31\ \text{m/s}$$

27 **Calcula el período de oscilación de un péndulo de 1 m de longitud situado en la superficie de Marte.**

Datos: $M_{Marte} = 0{,}107 \cdot M_T$; $R_{Marte} = 0{,}53 \cdot R_T$; g_0(Tierra) = 9,8 m/s².



El período de oscilación de un péndulo puede calcularse mediante la expresión:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Siendo l = 1 m, la longitud del péndulo, y g, la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte.

Necesitamos, por tanto, calcular la gravedad marciana. Y lo haremos a partir de la gravedad terrestre:

$$g_M = G \cdot \frac{M_M}{R_M{}^2} = G \cdot \frac{0{,}107\ M_T}{(0{,}53\ R_T)^2}$$

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{R_T{}^2}$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos:

$$g_M = 3{,}733\ \text{m/s}^2$$

Y, con ello, podemos calcular el período de oscilación:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{1}{3{,}733}} = 3{,}25\ \text{s}$$

$$T \approx 3{,}3\ \text{s}$$

28 **Explica qué es la velocidad de escape. ¿Qué ocurriría si lanzáramos un cuerpo desde la superficie de la Tierra hacia el espacio con una velocidad mayor a la velocidad de escape? ¿Y si lo lanzáramos con una velocidad menor que la de escape?**

Las fuerzas gravitatorias que ejercen los astros sobre los cuerpos impiden que estos escapen del campo gravitatorio que generan.

Este campo es más intenso en las proximidades del astro y se va debilitando conforme nos alejamos de él, terminando por anularse.

Se llama **velocidad de escape** a la velocidad mínima que habría que imprimir a un cuerpo para que escapase del campo gravitatorio del astro.

Esta velocidad es mayor cuanto mayor es la masa del astro; sin embargo, disminuye cuando aumenta el radio, no dependiendo de la masa del cuerpo que pretende escapar.

Si la velocidad de lanzamiento es mayor que la velocidad de escape, el cuerpo se perderá en el universo rumbo al infinito y no volverá jamás, siempre que no sea interceptado por ningún otro astro que lo desvíe y lo capture en su campo gravitatorio.

Si la velocidad de lanzamiento es menor que la de escape, el cuerpo acabará parándose a cierta altura y volverá a ser atrapado por el planeta cayendo sobre aquel.

Página 332

Movimientos orbitales

29 **La masa del Sol es $2 \cdot 10^{30}$ kg, y la de la Tierra, $6 \cdot 10^{24}$ kg, aproximadamente. Si la aceleración centrípeta con la que se desplaza la Tierra en torno al Sol tiene un valor de 0,0059 m/s², y suponiendo el movimiento orbital circular y uniforme, calcula la distancia que separa ambos astros, medida de centro a centro.**

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

La aceleración centrípeta se define como:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

En nuestro problema, *v* es la velocidad orbital de la Tierra y *r* es la distancia que separa el Sol de la Tierra y que despejaremos de la expresión anterior para proceder a su cálculo:

$$r = \frac{v_o^2}{a_c}$$

Necesitamos calcular la velocidad orbital de la Tierra, para lo que recurriremos al concepto de fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c$$

$$G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{r^2} = M_T \cdot \frac{v_o^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior, obtendremos la expresión para la distancia pedida:

$$r = \frac{v_o^2}{a_c} = \frac{\frac{G \cdot M_S}{r}}{a_c} = \frac{G \cdot M_S}{r \cdot a_c} \rightarrow r^2 = \frac{G \cdot M_S}{a_c}$$

$$r = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{a_c}}$$

Sustituyendo los datos, se tiene que: $r \approx 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m.

30 **Deduce la expresión de la velocidad orbital de un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra y explica qué significado tiene.**

Los satélites naturales giran en torno a sus planetas en órbitas estables, a la velocidad necesaria para que no se salgan de la órbita ni precipiten sobre el planeta. Esta velocidad se denomina velocidad orbital, y puede calcularse combinando la segunda ley de la dinámica de Newton y la ley de la gravitación universal.

La segunda ley dice que la resultante de las fuerzas aplicadas sobre un sistema es igual al producto de su masa por la aceleración que experimenta: $F_R = m \cdot a$

En este caso, el movimiento es circular y uniforme, por lo que la aceleración experimentada es únicamente aceleración normal o centrípeta, ya que es provocada por una fuerza dirigida hacia el centro de la Tierra: la fuerza centrípeta.

Por tanto: $F_c = m \cdot a_c \rightarrow F_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$

Esa fuerza centrípeta es una fuerza real, causante del movimiento orbital, es la fuerza de atracción gravitatoria que se define como:

$$F_g = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2}$$

Por tanto, podemos igualar ambas ecuaciones y despejar la velocidad orbital:

$$F_c = F_g \;\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

31 **Calcula la velocidad y el período orbital de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra.**

Datos: g_0 = 9,8 m/s²; R_T = 6 371 km; $d_{T\text{-}L}$ = 384 400 km.

Sabemos que la fuerza de atracción gravitatoria sobre la Luna es una fuerza centrípeta, por lo que podemos obtener la velocidad orbital de esta igualdad:

$$F_c = F_g \;\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{d_{T-L}}}$$

Como los datos que nos aporta el enunciado del ejercicio son g_0 y R_T, no podemos utilizar ni G ni M_T en la expresión, así que, relacionaremos estas magnitudes mediante la definición de gravedad en la superficie terrestre de la siguiente forma:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \;\rightarrow\; g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad orbital:

$$\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{d_{T-L}}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (6{,}371 \cdot 10^6)^2}{3{,}844 \cdot 10^8}}$$

$$v_o = 1\,017{,}25 \text{ m/s} \sim 1\,017 \text{ m/s}$$

Para el cálculo del período, supondremos que el movimiento de la Luna es, aproximadamente, circular y uniforme y se cumple:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot d_{T-L}}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3{,}844 \cdot 10^8}{1017} = 2\,374\,883{,}414 \text{ s}$$

Expresado en días: $T \approx 27{,}5$ días.

32 **Calcula el período de revolución de un satélite alrededor de la Tierra, si sabemos que orbita a una altura de 1000 km sobre la superficie terrestre.**

Datos: M_T = 5,97 · 10²⁴ kg; R_T = 6 371 km; G = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m²/kg².

Supondremos que el movimiento que sigue el satélite es, aproximadamente, circular y uniforme y se cumple:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(R_T + h\right)}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(6.371 \cdot 10^6 + 10^6\right)}{v_o}$$

Necesitamos la velocidad orbital del satélite, que conseguiremos a partir de:

$$F_c = F_g \;\rightarrow\; v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}371 \cdot 10^6 + 10^6}}$$

$$v_o = 7\,349{,}99 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \left(6{,}371 \cdot 10^6 + 10^6\right)}{7\,349{,}99} \approx 6\,301 \text{ s}$$

El período en minutos: $T \approx 105$ min.

33 **Si conocemos las características del movimiento de un satélite artificial que orbita la Tierra, es decir, su velocidad, período y radio orbital, ¿podríamos calcular con estos datos la masa del satélite? ¿Y la masa de la Tierra? Razona tu respuesta.**

Las características del movimiento de un satélite vienen determinadas por la masa de la Tierra y la distancia a la que orbita, siendo independientes de la masa del satélite. Por tanto, conocidas las características del movimiento de un satélite artificial que orbita la Tierra, es decir, su velocidad, periodo y radio orbital, solo podríamos conocer la masa de la Tierra y no la del propio satélite. Puede comprobarse con las siguientes expresiones:

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_o}$$

34 **¿Qué radio orbital medio debe tener la trayectoria de un satélite artificial que gira en torno a la Tierra con una velocidad lineal de 4550 m/s?**

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el satélite es la causante de que este realice un movimiento orbital, comportándose la fuerza gravitatoria como una fuerza centrípeta:

$$F_c = F_g \rightarrow v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Sustituyendo datos:

$$4\,550 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{r}}$$

Despejando el radio orbital: $r \approx 1{,}93 \cdot 10^7$ m.

35 **Saturno tiene más de 60 satélites con órbitas estables. El más grande se llama Titán, tan grande como el planeta Mercurio. Titán gira en una órbita de $1{,}22 \cdot 10^6$ km y tarda 15,9 días en dar una vuelta alrededor de Saturno. Calcula la masa de Saturno.**

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Supuesto que el satélite realiza un MCU, se cumple que:

$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$, entonces se tiene que: $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$

Donde el radio orbital es $r = 1{,}22 \cdot 10^9$ m y el período es:

$T = 15{,}9$ días · 86 400 s/día = 1 373 760 s.

Y, como la fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, se tiene:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_S \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad orbital: $\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}$

De donde despejaremos la masa de Saturno:

$$M_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = 5{,}69 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

$$M_S \approx 5{,}7 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

36 **Como sabes, la Estación Espacial Internacional, ISS, se encuentra a una altura de unos 415 km sobre la superficie terrestre y posee una masa de unas 400 toneladas. Calcula el período orbital de la ISS y el valor del campo gravitatorio a esa altura. ¿Cuál sería su energía potencial?**

Datos: g_0(Tierra) = 9,8 m/s²; R_{Tierra} = 6371 km.

Supuesto que la ISS realiza un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_o}$$

Siendo $r = 6\,371 + 415$ km $= 6\,786$ km $= 6{,}786 \cdot 10^6$ m.

Su velocidad orbital puede encontrarse mediante la expresión:

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Los datos que aporta el enunciado del problema nos hacen realizar un cambio de variable:

$$G \cdot M_T = g_o \cdot R_T^2$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}} = 7\,656{,}2 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en la expresión del período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_o} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}786 \cdot 10^6}{7\,656{,}2} = 5\,569{,}036 \text{ s}$$

Que en minutos se obtiene: $T \approx 93$ min.

Para calcular el valor del campo gravitatorio en la posición en la que se encuentra la ISS, sustituimos datos en la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{r^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r^2}$$

$$g = \frac{9{,}8 \cdot \left(6{,}37 \cdot 10^6\right)^2}{\left(6{,}78 \cdot 10^6\right)^2}$$

Obtenemos: $g = 8{,}7$ N/kg.

37 Calcula la altura sobre la superficie de la Tierra a la que tiene que orbitar un satélite para que su velocidad orbital sea 3,5 km/s.

Datos: $g_0 = 9{,}8$ m/s²; $R_T = 6\,371$ km

Sabemos que la fuerza gravitatoria se comporta como una fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2}$$

Puesto que solo podemos utilizar los datos que nos ofrecen en el enunciado del ejercicio, vamos a encontrar la relación entre G y M_T con g_0 y R_T.

La gravedad sobre la superficie terrestre se expresa mediante la LGU como:

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow g_0 \cdot R_T^2 = G \cdot M_T$$

Ahora, sí podemos utilizar la expresión obtenida previamente:

$$R_T + h = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{v^2}$$

Sustituyendo los datos y despejando h:

$$h = 2{,}61 \cdot 10^7 \text{ m}$$

38 **¿Cuál será el radio orbital de un satélite que gira en torno a la Tierra con un período orbital de 6 h? Expresa el resultado en función del radio terrestre.**

Dato: g_0 = 9,8 m/s².

Supuesto que el satélite realiza un MCU, se cumple que:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}, \text{ entonces se tiene que: } v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Y, como la fuerza gravitatoria actúa como una fuerza centrípeta sobre el satélite, se tiene:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot M_{satélite}}{r^2} = M_{satélite} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad orbital:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}}$$

Sustituyendo datos y despejando *r*:

$$r = 487 \cdot \sqrt[3]{R_T^2}$$

39 **El planeta Marte orbita en torno al Sol con un período de 1,88 años terrestres y a una distancia de 1,52 ua. Calcula:**

a) La fuerza centrípeta a la que se ve sometido Marte.

b) La aceleración tangencial y la aceleración centrípeta que le genera dicha fuerza.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{Marte} = 6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg; $M_{Sol} = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

a) La fuerza de atracción gravitatoria actúa como fuerza centrípeta, por lo que:

$$F_c = F_g = G \cdot \frac{M_{Sol} \cdot M_{Marte}}{r^2}$$

Pasando los datos al SI y sustituyendo:

$$F_c = 1{,}64 \cdot 10^{21}\ \text{N}$$

b) En los MCU como el que nos ocupa, la a_t es nula y la a_n puede calcularse como:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}\right)^2}{r}$$

Pasando los datos al SI y sustituyendo: $a_n = 2{,}56 \cdot 10^{-3}$ m/s².

Fuerzas centrales

40 **Investiga qué planetas no giran sobre sí mismos en sentido directo. ¿A qué se debe esta anomalía?**

El movimiento de rotación de los planetas tiene sentido directo, esto es, observado un planeta desde el polo norte solar, su sentido de giro es antihorario. Sin embargo, los planetas Venus y Urano no rotan en el mismo sentido que el resto de los planetas del sistema solar. Los científicos no saben con seguridad cuál es la explicación de esta anomalía, aunque existen diferentes hipótesis. Una de ellas expone que estos planetas podrían haber sufrido una colisión de otro cuerpo celeste en su fase de formación volcando su eje de inclinación y cambiado así su sentido de rotación.

41 **Calcula la velocidad areolar de la Tierra en torno al Sol, sabiendo que su radio orbital medio es 1,5 · 10^{11} m, y su período, de 365,25 días.**

Se deduce, de la segunda ley de Kepler, la relación:

$$v_{areolar} = \frac{L}{2 \cdot m} = \frac{m \cdot v \cdot r}{2 \cdot m} = \frac{\dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2}{T}$$

Sustituyendo valores:

$$v_{areolar} = \frac{\pi \cdot r^2}{T} = \frac{\pi \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^{11}\right)^2}{365{,}25 \cdot 86\,400}$$

$$v_{areolar} = 2{,}24 \cdot 10^{15}\ \text{m}^2/\text{s}$$

42 **Utilizando el principio de conservación del momento angular, encuentra la relación entre las velocidades máximas y mínimas de los planetas en su órbita elíptica en torno al Sol.**

Los puntos de máxima y mínima velocidad coinciden con el afelio (mínimo alejamiento del Sol) y el perihelio (máximo alejamiento del Sol), respectivamente.

$$v_{máx} = v_{afelio} \text{ y } v_{mín} = v_{perihelio}$$

En estos puntos se cumple que los vectores r y p son perpendiculares entre sí, por lo que el módulo del momento angular será:

$$L = r \cdot p \cdot \text{sen}\,90° = r \cdot p = r \cdot m \cdot v$$

El principio de conservación del momento angular asegura que el momento angular se mantiene constante a lo largo de toda la trayectoria del planeta en su órbita en torno al Sol. Por tanto:

$$L_{afelio} = L_{perihelio}$$

$$m \cdot r_{afelio} \cdot v_{afelio} = m \cdot r_{perihelio} \cdot v_{perihelio}$$

De donde obtenemos la relación:

$$\frac{v_{afelio}}{v_{perihelio}} = \frac{r_{perihelio}}{r_{afelio}}$$

Así:

$$\frac{v_{máx}}{v_{mín}} = \frac{r_{máx}}{r_{mín}}$$

43 **Explica qué son fuerzas centrales y pon varios ejemplos de fuerzas que lo sean, razonando tu decisión.**

Se denominan fuerzas centrales a aquellas que apuntan siempre hacia un mismo lugar, denominado centro de fuerzas. Estas fuerzas dependen exclusivamente de la distancia, r, que las separa del punto al que se dirigen, pudiendo expresarse en la forma: $\vec{F} = F(r) \cdot \vec{u}_r$. Las fuerzas centrales se comportan como fuerzas centrípetas produciendo trayectorias cerradas estables, como las circulares o elípticas.

Las fuerzas eléctricas, las elásticas y las gravitatorias son fuerzas centrales. Las fuerzas elásticas y gravitatorias están dirigidas siempre hacia el centro de fuerzas, y llevan igual dirección y sentido contrario al vector de posición del cuerpo sobre el que actúan. En el caso de las fuerzas eléctricas, funcionan igual exceptuando que el sentido de la fuerza no siempre es contrario al vector de posición de la carga sobre la que actúan, sino que dependerá de los signos de las cargas que interactúan.

44 Explica por qué las fuerzas centrales conservan el momento angular o cinético.

El momento angular respecto a un punto origen se expresa como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\vec{v}$$

Donde $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento del cuerpo que gira y $\vec{r}$ su vector de posición respecto al origen elegido.

Para entender la conservación de L, derivaremos dicha magnitud respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\,\vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\,\vec{v} + \vec{r} \times m\,\frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$$= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times m\,\vec{a} = 0 + \vec{r} \times \vec{F}$$

En el caso de fuerzas centrales, puesto que $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son paralelos, el producto vectorial entre sus vectores es nulo, demostrándose que para estas fuerzas se cumple la conservación de L.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \;\rightarrow\; \vec{L} = \text{cte}$$

45 Infórmate en Internet sobre la inclinación del plano orbital de los planetas del sistema solar respecto de la eclíptica y del sentido de giro de estos en torno al Sol. Elabora una tabla de datos al respecto.

Se denomina eclíptica a la línea imaginaria que describe la Tierra en torno al Sol. El plano de la eclíptica es el plano que contiene a la órbita terrestre. Los planos en los que orbitan el resto de los planetas están levemente inclinados respecto al plano de la eclíptica. Todos los planetas giran en sentido directo en torno al Sol; se trata de sentido antihorario si observamos el movimiento desde el polo norte solar.

Con respecto al sentido de giro en su rotación sobre sí mismos, todos los planetas, excepto Venus y Urano, giran en sentido directo.

Los datos se recogen en la siguiente tabla:

Objetos	Inclinación del plano orbital	Excentricidad de la órbita	Sentido de giro en torno al Sol
Mercurio	7,004870°	0,205630690	Directo
Venus	3,390000°	0,006800000	Directo
Tierra	0°	0,016710220	Directo
Marte	1,850610°	0,093412330	Directo
Júpiter	1,305300°	0,048392660	Directo
Saturno	2,484460°	0,054150600	Directo
Urano	0,772556°	0,044405586	Directo
Neptuno	1,769170°	0,008585870	Directo

Estos datos se han extraído de la página web:

http://www.astronoo.com/es/articulos/posiciones-de-los-planetas.html

En esta misma página de Internet aparece un simulador en el que puede observarse la revolución de los planetas desde distintos ángulos. Accede a ella y juega con los movimientos planetarios.

46 **Busca información sobre el concepto de fuerzas conservativas y explica por qué las fuerzas centrales son conservativas. Explica qué son fuerzas centrales y pon varios ejemplos de fuerzas que lo sean, razonando tu decisión.**

Se denominan **fuerzas centrales** aquellas que cumplen los siguientes requisitos:

– Las fuerzas centrales siempre se dirigen hacia el centro de fuerzas, independientemente del tipo de órbita.

– Dependen exclusivamente de la distancia, r, que las separa del punto al que se dirigen, pudiendo expresarse en la forma: $\vec{F} = F\left(r\right) \cdot \vec{u}_r$.

Como consecuencia:

Conservan la energía mecánica en un desplazamiento, siendo **fuerzas conservativas.** En el recorrido de los planetas en torno al Sol, y puesto que en el espacio exterior no existen fricciones que produzcan pérdidas de energía, la energía mecánica del planeta se mantiene constante, cumpliéndose el principio de conservación de la energía:

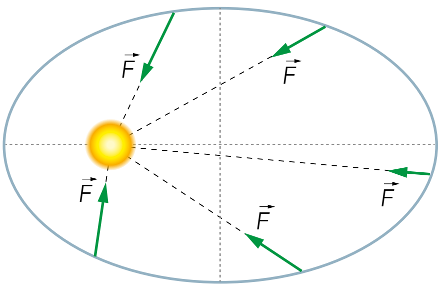
$$\Delta E_M = 0$$

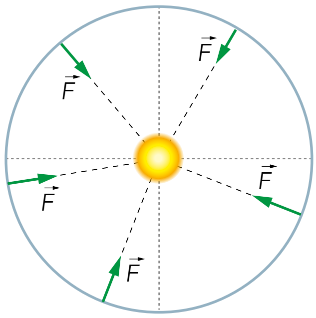
Se puede demostrar que el trabajo, ***W,*** conservativo que realiza la fuerza gravitatoria, ejercida por un astro de masa ***M,*** al desplazar otro cuerpo de masa ***m,*** no depende de la trayectoria seguida, sino de las posiciones inicial y final de su recorrido. Esto significa que la fuerza gravitatoria es conservativa. Para estas fuerzas se cumple el **teorema de la energía potencial:** «El trabajo que realiza una fuerza conservativa es igual a la disminución que experimenta la energía potencial».

$$W_c = -\Delta E_p \qquad \text{siendo} \qquad E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

¿Qué ocurre en las órbitas circulares? La energía potencial no varía en la órbita, el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria en cualquier desplazamiento orbital es nulo.

¿Qué ocurre en las órbitas elípticas? La energía potencial varía en la órbita, en media vuelta aumenta al alejarse del Sol, en dirección al afelio ($W_c < 0$) y en la otra media vuelta disminuye al acercarse el planeta al perihelio ($W_c > 0$). En una vuelta completa, el trabajo que habrá realizado la fuerza es nula.





47 **Demuestra que los planetas aumentan su momento angular respecto del Sol al alejarse de este. Siendo r_1 y r_2, $r_2 > r_1$, los radios orbitales de dos satélites artificiales de igual masa $m_1 = m_2$ que orbitan la Tierra con MCU, demuestra la siguiente relación entre sus momentos angulares, L_1 y L_2, respecto de la Tierra:**

$$\frac{L_2}{L_1} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

El módulo del momento angular se expresa como: $L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,\theta$

En el caso de órbitas circulares:

$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,90° = m \cdot r \cdot v$, siendo m la masa del planeta, r el radio orbital y v la velocidad orbital.

Y, puesto que la velocidad orbital puede calcularse como:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Sol}}{r}}$$

Sustituyendo en la expresión del momento angular:

$$L = m \cdot r \cdot v = m \cdot \sqrt{G \cdot M_{Sol} \cdot r}$$

De forma que, si el planeta se aleja del Sol, aumentando r, también lo hace el momento angular, L.

A partir de las definiciones de momento angular para cada satélite:

$$\vec{L}_1 = m_1 \cdot \left(\vec{r}_1 \times \vec{v}_1\right)$$

$$L_1 = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1 \cdot \text{sen}\, 90 = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1$$

$$\vec{L}_2 = m_2 \cdot \left(\vec{r}_2 \times \vec{v}_2\right)$$

$$L_2 = m_2 \cdot v_2 \cdot r_2 \cdot \text{sen}\, 90 = m_2 \cdot v_2 \cdot r_2$$

Sabemos que la velocidad orbital puede expresarse mediante:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Particularizando para cada satélite:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_1}}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_2}}$$

Sustituyendo la velocidad orbital en la expresión del momento angular:

$$L_1 = m_1 \cdot v_1 \cdot r_1 = m_1 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_1}} \cdot r_1 = m_1 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot r_1^{\cancel{2}}}{\cancel{r_1}}}$$

$$L_2 = m_2 \cdot v_2 \cdot r_2 = m_2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_2}} \cdot r_2 = m_2 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T \cdot r_2^{\cancel{2}}}{\cancel{r_2}}}$$

Dividiendo ambas expresiones, sabiendo que $m_1 = m_2$:

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

Página 333

48 Demuestra que la relación que existe entre el momento angular de la Tierra en el afelio y en el perihelio es $L_{perihelio}/L_{afelio} = 1$.

Si acudimos al principio de conservación del momento angular, el cual asegura que el momento angular permanece constante a lo largo de la trayectoria de la Tierra en torno al Sol, entonces, debe cumplirse que:

$$L_{perihelio} = L_{afelio} \rightarrow \frac{L_{perihelio}}{L_{afelio}} = 1$$

49 Calcula el momento angular de la Tierra en su movimiento de traslación con respecto al Sol, supuesto este circular y uniforme.

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $d_{T\text{-}S} = 1$ ua; $T = 1$ año.

Sabiendo que el módulo del momento angular de un cuerpo que rota en torno a un centro con un movimiento circular y uniforme es:

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot \text{sen}\, 90° = m \cdot v \cdot r$$

Puesto que suponemos movimiento circular y uniforme:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

Sustituyendo datos en la expresión de L:

$$L = m \cdot r \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{31\,557\,600} = 2{,}67 \cdot 10^{40}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$L \approx 2{,}7 \cdot 10^{40}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

50 **La Luna describe una órbita de 384 400 km de radio medio en torno a la Tierra. Calcula el área que barre por segundo el radio vector que posiciona la Luna respecto de la Tierra.**

Datos: $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Se define la velocidad areolar de un astro que orbita en torno a otro, como el área que barre su radio vector en la unidad de tiempo. Por tanto, vamos a calcular la velocidad areolar y, con ello, tendremos la solución al problema.

Podemos calcular la velocidad areolar mediante la siguiente expresión:

$$v_{\text{areolar}} = \frac{L}{2 \cdot m}$$

Y puesto que el momento angular L de la Luna respecto a la Tierra, supuesto un movimiento circular y uniforme de radio 384 400 km = $3{,}844 \cdot 10^8$ m, puede calcularse como:

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot \text{sen}\,90° = m \cdot r \cdot v$$

Donde m es la masa de la Luna, r es el radio orbital de la Luna en torno a la Tierra y v es la velocidad orbital de la Luna. Podemos calcular esta velocidad sabiendo que la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la Luna se comporta como una fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Sustituyendo esta expresión en la de la velocidad areolar:

$$v_{\text{areolar}} = \frac{L}{2 \cdot m} = \frac{\cancel{m} \cdot r \cdot v}{2 \cdot \cancel{m}} = \frac{r \cdot v}{2} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Y sustituyendo datos:

$$v_{\text{areolar}} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \frac{3{,}844 \cdot 10^8}{2} \cdot \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{3{,}844 \cdot 10^8}}$$

Obtenemos como solución: $v_{\text{areolar}} \approx 1{,}96 \cdot 10^{11}$ m²/s.

Modelos del universo

51 **Explica, según la teoría de la gravitación de Einstein, cómo la luz puede desviarse al pasar cerca de una estrella masiva.**

El fundamento físico de este hecho se basa en la geometría del espacio-tiempo y se encuentra desarrollado en la teoría de la relatividad general de Einstein. Se trata de un universo deformable, como si de una gran sábana tensa se tratara; sobre esta descansan las estrellas curvando dicha sábana en sus proximidades. Si un cuerpo más pequeño como un planeta se lanzara en las cercanías de una estrella acabaría girando en torno a ella describiendo círculos sobre la sábana. En un universo así, la luz se desplazaría sobre la sábana curvándose en las zonas donde la sábana está curvada, justamente en las cercanías de las estrellas, siguiendo la deformación del propio espacio-tiempo.

El astrofísico Eddington observó como la luz procedente de una estrella lejana se curvaba en las proximidades del Sol. Demostrando, así, la teoría de Einstein.

52 Sumamos. **Explica las diferencias entre materia oscura y energía oscura.**

La materia oscura es materia de origen desconocido que no emite luz, la gran cantidad de materia oscura que se encuentra en los cúmulos de galaxias proporciona una gran gravedad que evita la disolución de dichos cúmulos.

La energía oscura, por el contrario, produce otro efecto. Las observaciones realizadas sobre las galaxias también evidenciaron que el universo no solo se expande, sino que lo hace de forma acelerada. Se ideó, entonces, una nueva clase de energía que debía provocar dicha aceleración y se la denominó energía oscura.

En **anayaeducacion.es** explicamos cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Sumamos», propuesta para la resolución de esta actividad en grupo.

53 ¿Qué otras alternativas a la muerte térmica han barajado los científicos para explicar el destino del universo?

El futuro del universo depende de dos variables: la expansión acelerada producida por la energía oscura y la atracción gravitatoria que produce la materia oscura. Si la expansión supera a la atracción, tendremos la muerte térmica. Si la atracción supera a la expansión, podría ocurrir un *Big-Crunch* o gran implosión, consistente en la contracción del universo hasta una situación de colapso de alta temperatura y densidad donde todo quedaría reducido en una singularidad o un punto, tal y como el que originó el universo a través del *Big-Bang* o gran explosión.

54 Documéntate y realiza un informe sobre las aportaciones que ha hecho el físico Stephen Hawking al desarrollo de la teoría de los agujeros negros.

Los agujeros negros son el resultado del colapso o muerte de una estrella muy masiva. En un agujero negro, existe una concentración de materia tan elevada que es capaz de generar un campo gravitatorio tan potente que nada puede escapar de él, ni siquiera su propia luz. La teoría de los agujeros negros trata de dar explicación a esa región del espacio-tiempo que, debido a su inmensa gravedad, queda desconectada del resto del universo.

Las aportaciones de Stephen Hawking a esta teoría consisten, básicamente, en:

- El tiempo deja de transcurrir en el interior de los agujeros negros.
- Los agujeros negros poseen una línea a su alrededor de no retorno, denominada horizonte de sucesos, nada que supere esa línea puede salir del agujero.
- Los agujeros negros emiten algo de energía, es la llamada radiación de Hawking, que muy lentamente hará que vayan perdiendo masa.
- La pérdida de masa dará lugar a un universo que, conforme se expanda, irá enfriándose y las estrellas apagándose hasta que finalmente muera térmicamente.