9 DINÁMICA. LAS FUERZAS Y SUS EFECTOS

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

1 LAS FUERZAS COMO MEDIDA DE LAS INTERACCIONES

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.1. (EA.7.1.1.)

Página 242

1 **Según lo estudiado, ¿es correcto decir que un levantador de pesas tiene fuerza? Justifica tu respuesta.**

El levantador de pesas no tiene fuerza, sino que aplica fuerza para producir un cambio en el estado de reposo al mover las pesas. Lo correcto sería decir que tiene energía.

2 **¿Es posible que actúen varias fuerzas sobre un mismo objeto, y este no se deforme ni varíe su estado de movimiento? Pon un ejemplo.**

Sí, es posible. Si la resultante de las fuerzas aplicadas es nula, el objeto no se moverá.

Por ejemplo, un libro situado en una mesa. Actúan la fuerza del libro sobre la mesa y su recíproca, la de la mesa sobre el libro. Además, también actúan la del libro sobre la Tierra y la de la Tierra sobre el libro. En cuanto a las deformaciones, los cuerpos que llamamos rígidos sufren deformaciones tan pequeñas que son inapreciables para nuestros sentidos.

3 **Las siguientes fuerzas, expresadas en newtons, actúan sobre el mismo cuerpo. Dibuja y calcula la resultante.**

$$\vec{F}_1 = -20 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_2 = 30 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_3 = 10 \cdot \vec{i} + 20 \cdot \vec{j}$$

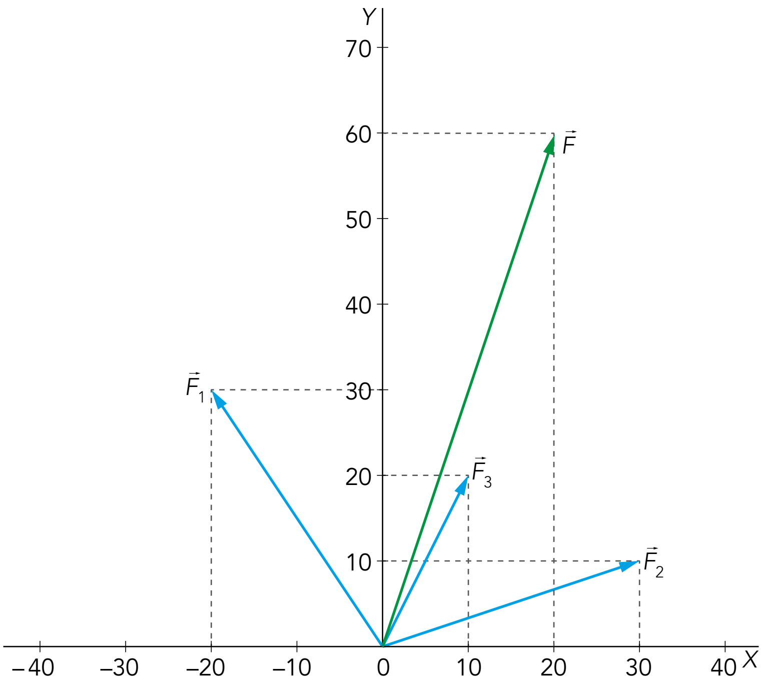
Para calcular la resultante de la fuerza, se suman las componentes de la fuerza en *x* y las componentes en *y*:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-20 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j}) + (30 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j}) + (10 \cdot \vec{i} + 20 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{F} = (-20 + 30 + 10) \cdot \vec{i} + (30 + 10 + 20) \cdot \vec{j} \text{ N}$$

$$\vec{F} = (20 \cdot \vec{i} + 60 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Gráficamente:



Página 243

4 **Busca información y elabora un informe sobre los trabajos anteriores a la unificación de Maxwell, en los que este se basó para enunciar sus leyes del electromagnetismo.**

Maxwell introdujo el concepto de electromagnetismo, permitiendo una descripción matemática de la interacción entre electricidad y magnetismo. Para ello, formuló ecuaciones que describen y cuantifican los campos de las fuerzas, basados en los trabajos anteriores de:

- Carl Friedrich Gauss, para la electricidad y el magnetismo.

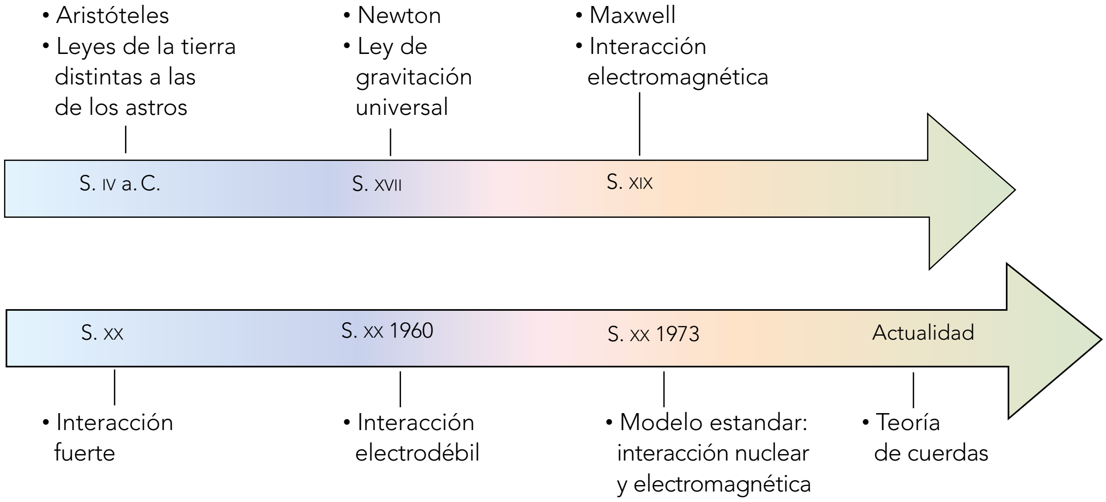
- Michael Faraday, para la inducción electromagnética.

- André-Marie Ampère, que relaciona el campo magnético y la causa que lo produce.

5 Línea de tiempo. **Diseña una línea cronológica con las unificaciones comentadas en el texto.**

En anayaeducacion.es su alumnado puede consultar el documento que explica las características del organizador gráfico que solicita el enunciado de esta actividad.

A partir de lo leído en el texto, podemos representar la siguiente línea cronológica:



6 **Busca información acerca de la intensidad y el alcance de las interacciones mencionadas.**

Respuesta abierta. La tabla siguiente muestra un resumen de la información:

Interacción	Intensidad (relativa)	Alcance	Sentido	Fuente
Fuerte	Fuerte (1)	Corto, 10^{-15} m	Atractivo o repulsivo (a muy cortas distancias)	Estabilidad del núcleo
Electromagnética	Fuerte (10^{-2})	Largo	Atractivo o repulsivo	Carga eléctrica
Débil	Débil (10^{-12})	Corto, $< 10^{-17}$ m	No aplicable	Reacciones entre partículas
Gravitatoria	Débil (10^{-40})	Largo	Atractivo	Masa

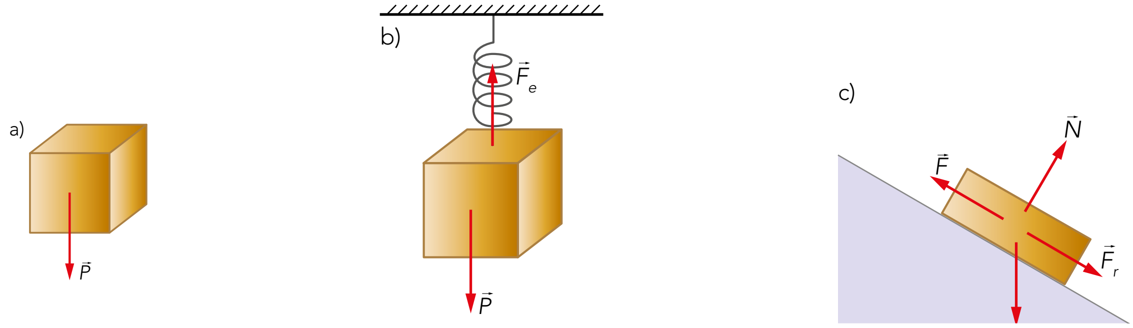
7 **Busca en Internet el vídeo del «universo elegante» de Brian Greene. Después de verlo, ¿crees que algún día se llegará a enunciar la teoría del todo? ¿Será una teoría definitiva?**

Respuesta abierta.
Siempre que se pide realizar una búsqueda de información en Internet, es recomendable que su alumnado recuerde las normas básicas de ciudadanía digital, disponibles en anayaeducacion.es.

Página 245

8 **Lo común. Indica las interacciones, y dibuja los diagramas de fuerzas, de un objeto en caída libre, un cuerpo colgado del techo mediante un muelle y un cuerpo que sube deslizando por un plano inclinado con rozamiento.**

En un objeto en caída libre solo actúa el peso del objeto (figura a). En un cuerpo colgado del techo mediante un muelle, actúan el peso y la fuerza elástica (figura b). En el caso de un cuerpo que sube deslizando por un plano inclinado, las fuerzas que actúan son el peso, la fuerza de rozamiento, la fuerza aplicada sobre el objeto para que suba (que puede estar o no presente) y la normal (figura c).



En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la llave para el desarrollo del pensamiento «Lo común».

9 **Calcula tu peso en la superficie de la Tierra. Si la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es la sexta parte que en la de la Tierra, ¿cuánto pesarías en la Luna? ¿Qué masa tendrías allí?**

El peso es masa por gravedad. Suponiendo una masa de 50 kg, el peso sería:

$$P = m \cdot g = 50 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 490 \text{ N}$$

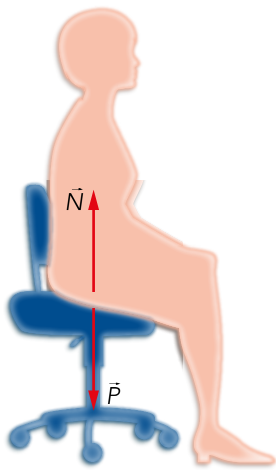
En la Luna, el peso será la sexta parte que en la Tierra:

$$P_L = m \cdot \frac{1}{6} \cdot g = 50 \text{ kg} \cdot \frac{1}{6} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 81{,}67 \text{ N}$$

La masa será la misma en la Tierra y en la Luna (se pueden despreciar los efectos relativistas).

10 **Dibuja las fuerzas que actúan sobre ti cuando estás sentado en una silla, calcula sus módulos, e identifica qué cuerpos las ejercen.**

Las fuerzas que actúan sobre una persona sentada en una silla son el peso, fuerza que ejerce la Tierra sobre la persona, y la normal ejercida por la silla:

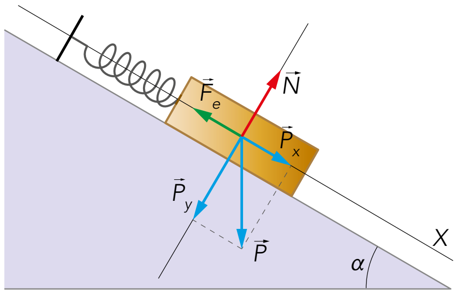


Las dos fuerzas tienen el mismo módulo y actúan en la misma dirección, pero tienen sentido contrario, y por eso se anulan. Para una persona de 50 kg:

$$P = N = m \cdot g = 50 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 490 \text{ N}$$

11 **Una de las condiciones para que un cuerpo esté en reposo es que la fuerza neta que actúa sobre él sea nula. Sabiendo esto, calcula la elongación del muelle y la fuerza normal en el ejercicio resuelto 3, si la masa del cuerpo es de 60 kg, y k = 5 000 N/m.**

El diagrama de fuerzas es:



La fuerza neta es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e$$

Expresada en componentes cartesianas:

$$\vec{F} = (P_x - F_e) \cdot \vec{i} + (N - P_y) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F} = (m \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha - k \cdot x) \cdot \vec{i} + (N - m \cdot g \cdot \cos \alpha) \cdot \vec{j}$$

Al estar en reposo, la fuerza neta será nula. De esta forma, deducimos la elongación del muelle de la fuerza en el eje *X*:

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha - k \cdot x = 0$$

$$x = \frac{m \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha}{k} = \frac{60 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \text{sen}\, 30°}{5\,000 \text{ N/m}}$$

$$x = 0{,}059 \text{ m} = 5{,}9 \text{ cm}$$

La fuerza normal será igual a la componente *Y* del peso:

$$N = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 60 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 30° = 509{,}7 \text{ N}$$

2 PRINCIPIOS DE LA DINÁMICA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.) CE.7.1. (EA.7.1.1.)

Página 246

12 **Según el principio de inercia, explica qué le sucede a un pasajero que viaja de pie en un autobús cuando, de repente, el vehículo:**

a) Frena.

b) Acelera.

c) Toma una curva hacia la derecha.

Según el principio de inercia, todos los cuerpos mantienen su estado de reposo o movimiento uniforme, excepto que se vean forzados a cambiarlo por una fuerza externa. Por tanto:

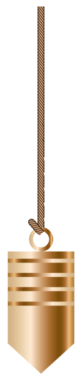
a) Cuando el autobús frena, el viajero tiende a continuar su movimiento y se desplaza hacia la parte delantera del vehículo.

b) Cuando el autobús acelera, el viajero tiende a ir hacia la parte trasera.

c) Al tomar una curva hacia la derecha, el viajero tiende a seguir recto. Respecto del autobús, se desplaza hacia la parte izquierda.

13 **Idea un método para comprobar si un vehículo está o no acelerando, utilizando una plomada.**

Una plomada es un instrumento que se utiliza para definir la vertical. Está compuesto por una pesa de metal (normalmente plomo) con una forma prismática o cilíndrica que termina en cono, unido a una cuerda que marca una línea vertical, como vemos en el ejemplo de la figura:



Si colocamos la plomada en el interior de un vehículo con movimiento rectilíneo unifrome, su posición será perpendicular al suelo. En el momento en el que el vehículo varíe su velocidad adquiriendo una aceleración, el ángulo de la plomada variará, comprobándose que el vehículo tiene aceleración.

14 **Busca en Internet el vídeo «inercia universo mecánico», que trata sobre la inercia. Después de verlo, explica por qué hemos dicho que unos científicos se basan en los trabajos de otros.**

Respuesta abierta.

Página 247

15 **Un observador está sentado en la tribuna de un circuito de motocicletas.**

El sistema de referencia de una moto que atraviesa la recta de meta acelerando, ¿es inercial?

¿Y el del director de carrera, que está sentado en la torre de control? Justifica tus respuestas.

La moto está acelerando respecto del observador de tribuna; por tanto, en este sistema de referencia, no se puede aplicar el principio de inercia. Luego, no es un sistema de referencia inercial.

El director de carrera, que está en reposo respecto al observador de tribuna, sí cumple el principio de inercia, por lo que se puede considerar un sistema de referencia inercial.

16 **Visualiza el vídeo de la Universidad de Toronto: «Frames of reference». Puedes encontrarlo, dividido en dos partes, utilizando las palabras clave «sistemas referencia universidad Toronto».**

A continuación, responde; ¿existe en el universo algún sistema de referencia inercial?

Respuesta abierta.

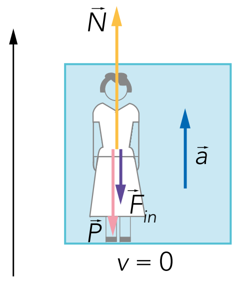
Página 248

17 **Cuando un ascensor (P = 3000 N) arranca con a = 0,2 m/s², ¿qué fuerza inercial siente una persona de 70 kg? ¿Qué fuerza ejerce el cable que lo eleva?**

La fuerza inercial la calculamos al aplicar la segunda ley de Newton:

$$F_i = m \cdot a = 70 \text{ kg} \cdot 0{,}2 \text{ m/s}^2 = 14 \text{ N}$$

Para calcular la fuerza que ejerce el cable que eleva el ascensor, proponemos el siguiente esquema de fuerzas:



De donde decimos que, según la segunda ley de Newton:

$$F - P_T = m \cdot a \rightarrow F = P_T + m \cdot a = m_T \cdot g + m_T \cdot a = m_T \cdot (g + a) \qquad [1]$$

Siendo m la masa total (suma de la masa del ascensor y de la persona) y P_T, el peso total. Para calcular la masa del ascensor, utilizamos su peso y despejamos desde ahí:

$$P = m \cdot g = m \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 3000 \text{ N} \rightarrow m = 305{,}8 \text{ kg}$$

Por tanto, la masa total será:

$$m_T = 305{,}8 \text{ kg} + 70 \text{ kg} = 375{,}8 \text{ kg}$$

Así, sustituyendo en [1], la fuerza será:

$$F = m_T \cdot (g + a) = 375{,}8 \text{ kg} \cdot (9{,}81 \text{ m/s}^2 + 0{,}2 \text{ m/s}^2) = 3761{,}8 \text{ N}$$

18 **En el caso del ejercicio resuelto 4, ¿qué fuerza tendríamos que aplicar para que el cuerpo describiera un MRU?**

Para que el movimiento sea rectilíneo uniforme, según el principio de inercia, la fuerza resultante debe ser nula. Por tanto, la fuerza que se debe aplicar es la misma que la obtenida en el ejercicio resuelto 4, pero en sentido contrario:

$$\vec{F} = (-2 \cdot \vec{i} - \vec{j}) \text{ N}$$

19 **En el caso del ejercicio resuelto 5, ¿con qué aceleración máxima puede arrancar el camión para que un paquete de 30 kg no deslice si el coeficiente de rozamiento estático entre el suelo del cajón y el paquete es μ_e = 0,4?**

Como vimos en el ejemplo 5, cuando el camión arranca con una aceleración $\vec{a}$, añade una fuerza inercial $\vec{F} = -m \cdot \vec{a}$. Para que el paquete no deslice, el módulo de la fuerza de rozamiento debe ser mayor o igual al de esta fuerza; por tanto:

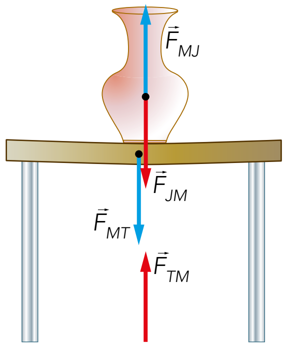
$$F = m \cdot a \quad ; \quad F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot g \cdot m$$

$$m \cdot a = \mu \cdot g \cdot m \rightarrow a = \mu \cdot g = 0{,}4 \cdot 9{,}8 = 3{,}92 \text{ m/s}^2$$

Página 249

20 El espejo. **Repite el ejercicio resuelto 6, esta vez centrando el estudio de fuerzas en la mesa en lugar de en el jarrón. ¿Qué condición se ha de cumplir para que la mesa esté en reposo?**

Las fuerzas son las mismas que en el ejercicio resuelto 6 para las fuerzas jarrón-mesa. Hay que tener en cuenta también la fuerza de la mesa sobre la Tierra y la recíproca de la Tierra sobre el jarrón:



Para que la mesa esté en reposo, la fuerza neta debe ser nula.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de desarrollo del pensamiento «El espejo», propuesta para resolver esta actividad.

21 **Si consideramos inercial un sistema de referencia situado en la superficie de la Tierra, razona si lo es, o no, el situado en:**

a) La terraza de tu casa.

b) Un cuerpo en caída libre.

c) Un ascensor.

a) La terraza es un sistema inercial, ya que está en reposo respecto a la superficie terrestre.

b) Un cuerpo en caída libre es acelerado, por tanto, no es un sistema inercial.

c) Durante el arranque y la parada no es sistema de referencia inercial, pues el ascensor acelera. Sí lo es durante el resto del trayecto, si lo hace con MRU.

Su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** el documento que explica las características de los textos argumentativos, así como consejos para elaborar este tipo de textos.

3 CANTIDAD DE MOVIMIENTO O MOVIMIENTO LINEAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.2. (EA.7.2.1.) CE.7.4. (EA.7.4.1-7.4.2.)

Página 250

22 **Una pelota de pádel llega a la raqueta con una velocidad $\vec{v}_0 = (-12 \cdot \vec{i} + 15 \cdot \vec{j})$ m/s. Después de ser golpeada sale con $\vec{v} = (30 \cdot \vec{i} + 22 \cdot \vec{j})$ m/s. Si la masa de la pelota es *m* = 58 g, calcula:**

a) El impulso de la raqueta sobre la pelota.

b) La fuerza (constante) que ejerce la raqueta sobre la pelota, si están en contacto durante 3 cs.

a) A partir de la expresión del impulso, calculamos el que ejerce la raqueta sobre la pelota:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m \cdot \Delta\vec{v}$$

$$\vec{I} = 0{,}058 \text{ kg} \cdot [(30 - (-12)) \cdot \vec{i} + (22 - 15) \cdot \vec{j}\,] \text{ m/s} = 0{,}058 \text{ kg} \cdot (42 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j}\,) \text{ m/s}$$

$$\vec{I} = (2{,}4 \cdot \vec{i} + 0{,}4 \cdot \vec{j}\,) \text{ N/s}$$

b) El impulso mecánico de una fuerza es el producto de la fuerza por el tiempo durante el que actúa. Por tanto, en este caso, la fuerza tiene un valor de:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{2{,}4 \cdot \vec{i} + 0{,}4 \cdot \vec{j}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ s}} = (80 \cdot \vec{i} + 13{,}3 \cdot \vec{j}\,) \text{ N}$$

Página 252

23 Si estuvieras en reposo en medio de un lago helado, sobre una capa de hielo sin rozamiento, ¿cómo podrías conseguir llegar a la orilla?

Sobre una superficie sin rozamiento podríamos movernos lanzando un objeto en la dirección en la que queramos desplazarnos, pero en sentido contrario al deseado. Al tratarse de un sistema (persona-objeto) sin fuerzas externas (netas), se conservaría la cantidad de movimiento y, en módulos:

$$m \text{ (persona)} \cdot v \text{ (persona)} = m \text{ (objeto)} \cdot v \text{ (objeto)}$$

Así, cuanto mayor sea la masa del objeto lanzado, y mayor la velocidad con la que se haga, mayor será la velocidad de la persona, en la misma dirección, y sentido contrario, a la velocidad de lanzamiento.

24 Una bala de 30 g impacta sobre un bloque de madera de 500 g, quedando incrustada en él. Justo antes del impacto, la bala se desplaza a 250 km/h, y el bloque lo hace, en la misma dirección y sentido contrario, a 20 km/h. Calcula la velocidad final del conjunto.

En primer lugar, se expresan las velocidades de la bala y el bloque en unidades del SI:

$$\vec{v}_{bala} = 250 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = 69{,}4 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{madera} = -20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} = -5{,}56 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

Si aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento, podemos calcular la velocidad final:

$$\vec{p}_{\text{b}} + \vec{p}_{\text{m}} = \vec{p}_{\text{b,m}}$$

$$m_b \cdot \vec{v}_b + m_m \cdot \vec{v}_m = m_{b,m} \cdot \vec{v}_{b,m}$$

$$\vec{v}_{b,m} = \frac{m_b \cdot \vec{v}_b + m_m \cdot \vec{v}_m}{m_{b,m}} = \frac{0{,}03 \text{ kg} \cdot 69{,}4 \cdot \vec{i} \text{ m/s} + 0{,}5 \text{ kg} \cdot (-5{,}56 \cdot \vec{i}\,) \text{ m/s}}{0{,}53 \text{ kg}} = -1{,}3 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

25 Comenta la siguiente frase: «El descubrimiento del neutrino es un ejemplo del desarrollo de la física basado en los principios de conservación».

Hay dos principios de conservación que afirman que en un sistema de partículas libre de fuerzas externas, tanto la masa como la cantidad de movimiento deben permanecer constantes. En las primeras investigaciones teóricas sobre la descomposición del neutrón en dos partículas, electrón y protón, se vio que no se cumplían estos principios. Por tanto, tras muchos estudios y experimentos, se llegó a la conclusión de que debía producirse otra partícula durante la reacción. A esa nueva partícula se la denominó neutrino. Por eso, su descubrimiento es una prueba de que se ha de confiar en los principios de conservación.

26 **Un objeto, de 1,5 kg, se rompe en 4 pedazos cuando se mueve con $\vec{v}_0 = (40 \cdot \vec{i} - 50 \cdot \vec{j})$ m/s. Un trozo, de 750 g, sale con $\vec{v}_1 = (150 \cdot \vec{i} + 115 \cdot \vec{j})$ m/s; otro, de 0,5 kg, con $\vec{v}_2 = (-25 \cdot \vec{i} - 76 \cdot \vec{j})$ m/s y el tercero, de 100 g, con $\vec{v}_3 = 43 \cdot \vec{i}$ m/s. ¿Con qué velocidad sale el cuarto?**

La masa del cuarto pedazo será:

$$m_4 = m_T - (m_1 + m_2 + m_3) = 1{,}5 \text{ kg} - (0{,}75 \text{ kg} + 0{,}5 \text{ kg} + 0{,}1 \text{ kg}) \rightarrow m_4 = 0{,}15 \text{ kg}$$

El principio de conservación del movimiento nos dice que la cantidad de movimiento antes de romperse será igual a después de romperse:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \rightarrow m_T \cdot \vec{v}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + m_3 \cdot \vec{v}_3 + m_4 \cdot \vec{v}_4$$

Despejando $\vec{v}_4$ obtenemos:

$$\vec{v}_4 = \frac{m_T \cdot \vec{v}_0 - m_1 \cdot \vec{v}_1 - m_2 \cdot \vec{v}_2 - m_3 \cdot \vec{v}_3}{m_4}$$

$$\vec{v}_4 = \frac{1{,}5 \text{ kg} \cdot (40 \cdot \vec{i} - 50 \cdot \vec{j}) \text{ m/s} - 0{,}75 \text{ kg} \cdot (150 \cdot \vec{i} + 115 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}}{0{,}15 \text{ kg}} +$$

$$+ \frac{-0{,}5 \text{ kg} \cdot (-25 \cdot \vec{i} - 76 \cdot \vec{j}) \text{ m/s} - 0{,}1 \text{ kg} \cdot (43 \cdot \vec{i}) \text{ m/s}}{0{,}15 \text{ kg}}$$

$$\vec{v}_4 = (-295{,}3 \cdot \vec{i} - 821{,}7 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}$$

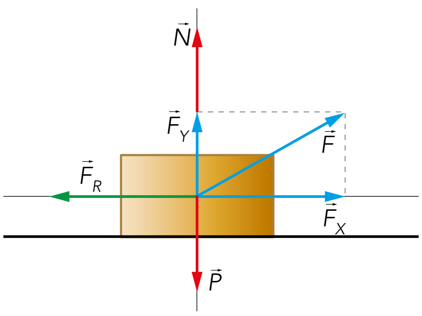
5 ESTUDIO DINÁMICO DE SITUACIONES COTIDIANAS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.2. (EA.7.2.2.-7.2.3.) CE.7.3. (EA.7.3.1.-7.3.2.-7.3.3.) CE.7.5. (EA.7.5.1.)

Página 255

27 **Se arrastra un cajón de 35 kg tirando de él con una cuerda que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el suelo y el cajón es μ_e = 0,3, y el dinámico, μ_d = 0,25. ¿Qué fuerza mínima habrá que aplicar para que el cajón deslice? Si se ejerce una fuerza doble, ¿cuál es la aceleración?**

Dibujamos el diagrama de fuerzas en donde el eje *X* positivo es hacia donde tiene lugar el movimiento:



La fuerza mínima necesaria para que el cajón empiece a moverse corresponderá con la fuerza de rozamiento. El coeficiente de rozamiento que aplicamos para empezar el movimiento será el estático:

$$F_R = \mu_e \cdot N = \mu_e \cdot (P - F_y) = \mu_e \cdot (m \cdot g \cdot - F \cdot \text{sen}\ \alpha)$$

$$F_R = F_x = F \cdot \cos\alpha$$

Igualamos ambas ecuaciones y despejamos la fuerza:

$$F \cdot \cos\alpha = \mu_e \cdot \text{m} \cdot g - \mu_e \cdot F \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$F = \frac{\mu_e \cdot m \cdot g}{\cos\alpha + \mu_e \cdot \text{sen}\,\alpha} = \frac{0{,}3 \cdot 35\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{\cos 30° + 0{,}3 \cdot \text{sen}\,30°} = 101{,}4\ \text{N}$$

Si la fuerza aplicada es el doble, la resultante de las fuerzas en el eje X, según la segunda ley de Newton, corresponde a:

$$F' = 2 \cdot F = 202{,}8\ \text{N}$$

$$F'_X - F_R = m \cdot a$$

En este caso, la fuerza de rozamiento se calcula con el coeficiente dinámico, ya que el cajón ya está en movimiento. Así, la aceleración será:

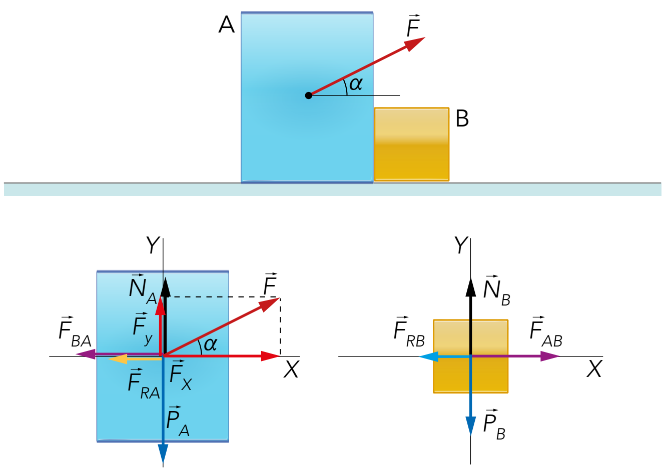
$$F' \cdot \cos\alpha - \mu_d \cdot (m \cdot g - F' \cdot \text{sen}\ \alpha) = m \cdot a$$

$$a = \frac{F' \cdot \cos\alpha - \mu_d \cdot (m \cdot g - F' \cdot \text{sen}\,\alpha)}{m} =$$

$$a = \frac{202{,}8\,\text{N} \cdot \cos 30° - 0{,}25 \cdot (35\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 202{,}8\,\text{N} \cdot \text{sen}\,30°)}{35\,\text{kg}} \rightarrow a = 3{,}3\ \text{m/s}^2$$

28 Si en el ejercicio resuelto 11, m_A = 15 kg, m_B = 20 kg, μ_A = 0,2, μ_B = 0,6, y el operario ejerce la fuerza de modo que α = 15° y F = 300 N, ¿qué valor se obtiene para la aceleración? ¿Qué fuerza ejerce un cuerpo sobre el otro?

El esquema de fuerzas es como el del ejercicio resuelto 11:



Aplicando la segunda ley de Newton para cada una de las cajas:

Caja A: $F_x - F_{RA} - F_{BA} = m_A \cdot a_A$ Caja B: $F_{AB} - F_{RB} = m_B \cdot a_B$

Teniendo en cuenta que:

$$a_A = a_B = a \quad ; \quad F_{AB} = F_{BA} \quad ; \quad F_R = F_{RA} + F_{RB}$$

Sumando ambas ecuaciones y despejando la aceleración:

$$F_x - F_{RA} - F_{RB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$F_x - \mu_A \cdot (m_A \cdot g - F_y) - \mu_B \cdot m_B \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{F \cdot \cos\alpha - \mu_A \cdot (m_A \cdot g - F \cdot \text{sen}\,\alpha) - \mu_B \cdot m_b \cdot g}{m_A + m_B}$$

$$a = \frac{300\,\text{N} \cdot \cos 15° - 0{,}2 \cdot (15\,\text{kg} - 9{,}81\,\text{m/s}^2 - 300 \cdot \text{sen}\,15°) - 0{,}6 \cdot 20\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{15\,\text{kg} + 20\,\text{kg}} = 4{,}5\ \text{m/s}^2$$

Así, la fuerza que ejerce uno sobre el otro será:

$$F_{AB} - F_{RB} = m_B \cdot a$$

$$F_{AB} = m_B \cdot a + \mu_B \cdot m_B \cdot g = m_B\,(a + \mu_B \cdot g)$$

$$F_{AB} = 20\ \text{kg} \cdot (4{,}5\ \text{m/s}^2 + 0{,}6 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2)$$

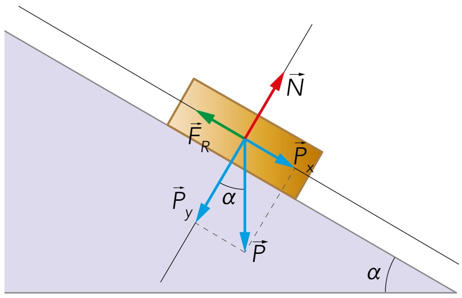
$$F_{AB} = F_{BA} = 207{,}7\ \text{N}$$

29 En lo más alto de un plano inclinado 25° con la horizontal se deja un cuerpo de masa *m*, que desciende deslizando con una aceleración *a* = 1,5 m/s². Calcula el coeficiente de rozamiento, la variación de altura entre *t* = 1 s y *t* = 2 s, y la variación de la cantidad de movimiento en ese intervalo si:

a) *m* = 5 kg.

b) *m* = 10 kg.

El esquema de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es:



La resultante de las fuerzas en el eje *X* será igual a la masa por la aceleración del cuerpo:

$$P_x - F_R = m \cdot a$$

$$P \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot P \cdot \cos\alpha = m \cdot a$$

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a$$

Despejando el coeficiente de rozamiento obtenemos el siguiente valor:

$$\mu_A = \frac{g \cdot \text{sen}\,\alpha - a}{g \cdot \cos\alpha} = \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,25° - 1{,}5\,\text{m/s}^2}{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 25°} = 0{,}3$$

Para ambas masas, el coeficiente de rozamiento será el mismo, ya que no depende de la masa del cuerpo.

La diferencia de altura será la misma para ambas masas. Se determina la diferencia del espacio recorrido entre $t = 1$ s y $t = 2$ s:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_2^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s})^2 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (1\ \text{s})^2$$

$$\Delta s = 2{,}25\ \text{m}$$

La diferencia de altura será este espacio por el seno del ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal:

$$\Delta h = \Delta s \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$\Delta h = 2{,}25\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 25° = 0{,}95\ \text{m}$$

La variación de cantidad de movimiento es:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m \cdot v_2 - m \cdot v_1 = m \cdot a \cdot t_2 - m \cdot a \cdot t_1$$

$$\Delta p = m \cdot a \cdot (t_2 - t_1)$$

Así, para cada uno de los cuerpos será:

- $m = 5$ kg

$$\Delta p_a = 5\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s} - 1\ \text{s}) = 7{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

- $m = 10$ kg

$$\Delta p_b = 10\ \text{kg} \cdot 1{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s} - 1\ \text{s}) = 15\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

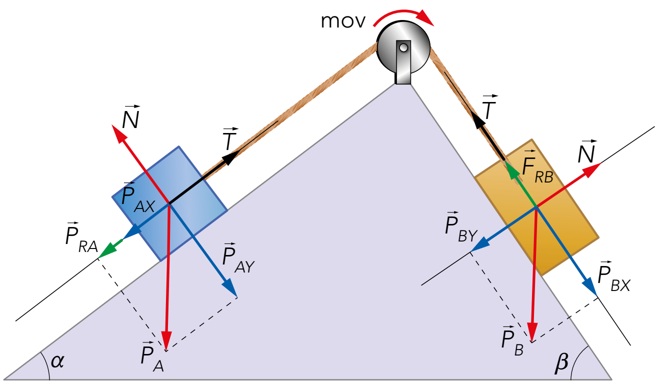
30 En el ejercicio resuelto 12, los numeradores de la expresión del tiempo total tienen un signo «–», en uno de los sumandos, incluso dentro de una raíz cuadrada. ¿Se trata de un error matemático? Razona tu respuesta.

No es un error matemático, ya que hay que tener en cuenta que la aceleración de subida tiene signo negativo. Por tanto, el primer término tendrá signo positivo, igual que en el segundo; al dividir entre la aceleración de subida, la raíz será positiva.

Página 259

31 Si en el ejercicio resuelto 14, m_A = 10 kg, m_B = 15 kg, α = 45°, β = 30° y μ = 0,3, calcula la aceleración y el sentido del movimiento. Si pulimos las superficies hasta hacer $\mu \approx 0$, ¿cuánto valdrá la aceleración?

En primer lugar, asignamos que el sentido del movimiento es horario. Su esquema de fuerzas es el siguiente:



Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

Cuerpo A: $T - P_{XA} - F_{RA} = m_A \cdot a$

Cuerpo B: $P_{XB} - F_{RB} - T = m_B \cdot a$

Si sumamos ambas ecuaciones obtenemos la aceleración:

$$P_{XB} - P_{XA} - F_{RA} - F_{RB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_{XB} - P_{XA} - \mu \cdot P_{YA} - \mu \cdot P_{YB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_B \cdot \text{sen}\, \beta - P_A \cdot \text{sen}\, \alpha - \mu \cdot P_A \cdot \cos \alpha - \mu \cdot P_B \cdot \cos \alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

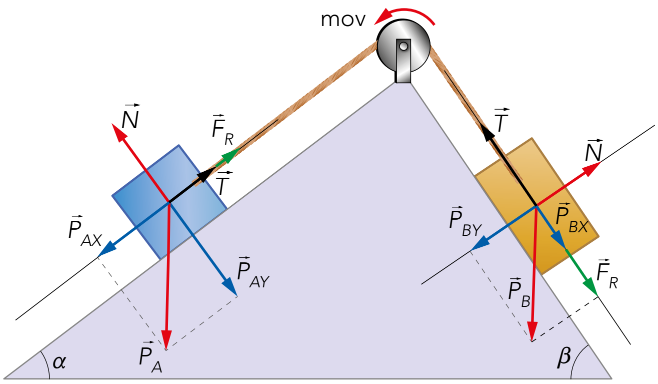
$$m_B \cdot g \cdot \text{sen}\, \beta - m_A \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha - \mu \cdot m_A \cdot g \cdot \cos \alpha - \mu \cdot m_B \cdot g \cdot \cos \alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,30° - 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,45°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} -$$

$$- \frac{0{,}3 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 45° - 0{,}3 \cdot 5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 30°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}}$$

$$a = -2{,}19\ \text{m/s}^2$$

Al ser la aceleración negativa, replanteamos el problema suponiendo que se mueve en sentido antihorario:



Si aplicamos la segunda ley de Newton:

Cuerpo *A*: $P_{XA} - F_{RA} - T = m_A \cdot a$

Cuerpo *B*: $T - P_{XB} - F_{RB} = m_B \cdot a$

Y sumando ambas ecuaciones, obtenemos la aceleración:

$$P_{XA} - F_{RA} - P_{XB} - F_{RB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_{XA} - \mu \cdot P_{YA} - P_{XB} - \mu \cdot P_{YB} = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$P_A \cdot \text{sen}\, \alpha - \mu \cdot P_A \cdot \text{sen}\, \alpha - P_B \cdot \text{sen}\, \beta - \mu \cdot P_B \cdot \text{sen}\, \beta = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$m_A \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha - \mu \cdot m_A \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha - m_B \cdot g \cdot \text{sen}\, \beta - \mu \cdot m_B \cdot g \cdot \text{sen}\, \beta = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,45° - 0{,}3 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 45°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} -$$

$$- \frac{15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,30° - 0{,}3 \cdot 15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \cos 30°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} = -2{,}53\ \text{m/s}^2$$

Al ser la aceleración también negativa, diremos que el sistema está en reposo. Por tanto, $a = 0\ \text{m/s}^2$.

En el caso de que no exista rozamiento, vamos a suponer que el movimiento es en sentido horario, pues $m_B > m_A$. Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo:

Cuerpo *A*: $T - P_{AX} = m_A \cdot a$

Cuerpo *B*: $P_{BX} - T = m_B \cdot a$

Y sumando ambas ecuaciones, obtenemos la aceleración:

$$P_{BX} - P_{AX} = (m_A + m_B) \cdot a$$

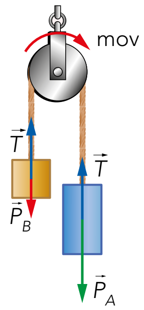
$$P_B \cdot \text{sen}\,\beta - P_A \cdot \text{sen}\,\alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$m_B \cdot g \cdot \text{sen}\,\beta - m_A \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{15\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,30° - 10\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,45°}{10\,\text{kg} + 15\,\text{kg}} = 0{,}17\ \text{m/s}^2$$

32 Una cuerda pasa por una polea sin rozamiento. Si de un lado cuelga un cuerpo de 7 kg, y en el otro uno de 5 kg, calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

El esquema de las fuerzas es:



Aplicando la segunda ley de Newton a los dos cuerpos, y sabiendo que el movimiento será en el sentido horario pues $m_A > m_B$:

Cuerpo *A*: $P_A - T = m_A \cdot a$

Cuerpo *B*: $T - P_B = m_B \cdot a$

Sumando ambas ecuaciones y despejando la aceleración, obtenemos su valor:

$$P_A - P_B = (m_A + m_B) \cdot a$$

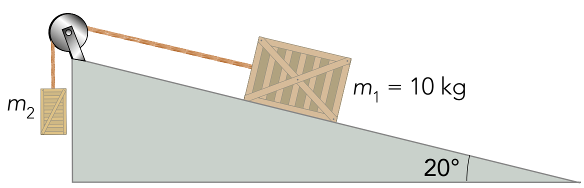
$$m_A \cdot g - m_B \cdot g = (m_A + m_B) \cdot a$$

$$a = \frac{g \cdot (m_A - m_B)}{m_A + m_B} = \frac{9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot (7\,\text{kg} - 5\,\text{kg})}{7\,\text{kg} + 5\,\text{kg}} = 1{,}635\ \text{m/s}^2$$

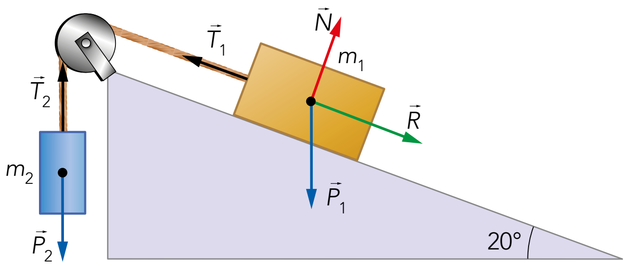
Con el valor de la aceleración, podemos calcular cuánto vale la tensión despejando en una de las dos ecuaciones (hemos elegido la de *A*):

$$T = m_A \cdot g - m_A \cdot a = 7\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 7\ \text{kg} \cdot 1{,}635\ \text{m/s}^2 = 57{,}24\ \text{N}$$

33 ¿Cuál debe ser la masa del bloque 2 para que el sistema esté en reposo si no existe rozamiento? ¿Y si el rozamiento estático es $\mu_e = 0{,}2$?



El diagrama de fuerzas es el siguiente:



a) Si no hay rozamiento, para que el sistema esté en reposo se debe cumplir que:

$$P_{1x} = P_2 \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\,20 = m_2 \cdot g \Rightarrow m_2 = m_1 \cdot \text{sen}\,20 = 3{,}42\,\text{kg}$$

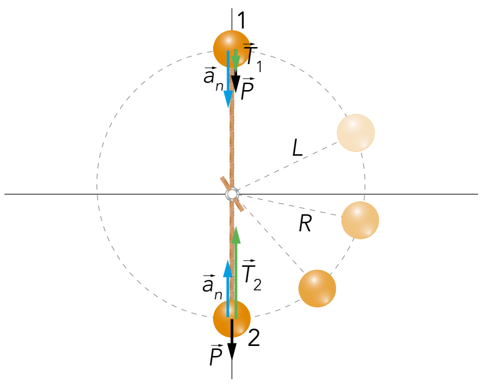
b) Si hay rozamiento:

$$P_{1x} - R = m_2 \cdot g \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot \text{sen}\,20 - \mu_e \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos 20 = m_2 \cdot g \Rightarrow$$

$$m_2 = m_1\,(\text{sen}\,20 - \mu_e \cdot \cos 20) = 1{,}54\,\text{kg}$$

34 Una cuerda (l = 80 cm) se rompe al colgar de ella un cuerpo de 15 kg. Calcula la velocidad máxima con que puede girar una piedra de 250 g sujeta a su extremo sin que se rompa, y la tensión de la cuerda en el punto más alto de la trayectoria.

En primer lugar, dibujamos el esquema de fuerzas que representa la situación dada por el enunciado:



En el punto más alto, el peso y la tensión tienen la misma dirección y sentido. En el punto más bajo, sus sentidos son contrarios. Si planteamos sus ecuaciones, obtenemos:

- Punto más alto: $$m \cdot g + T_1 = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{l}$$
- Punto más bajo: $$T_2 - m \cdot g = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{l}$$

La tensión máxima que soporta la cuerda es la del punto más bajo. Esta se corresponde cuando la tensión es igual al peso máximo que puede soportar justo antes de romperse; es decir:

$$T_2 = p_2 = m \cdot g = 15\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 = 147{,}15\text{ N}$$

Pero ahora tenemos que calcular la velocidad máxima para una masa de 250 g. Esta velocidad la alcanza en el punto de máxima tensión; el punto más bajo. Así, su valor será:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{(T_{máx} - m \cdot g) \cdot l}{m}} = \sqrt{\frac{(147{,}15\,\text{N} - 0{,}25\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2) \cdot 0{,}8\,\text{m}}{0{,}25\,\text{kg}}}$$

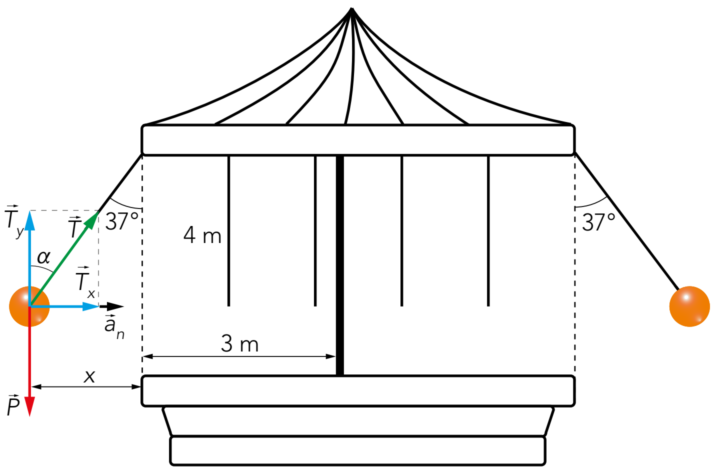
$$v_{máx} = 21{,}52\ \text{m/s}$$

Por tanto, la tensión en el punto más alto llevando esa velocidad será:

$$T_1 = m \cdot \frac{v^2}{l} - m \cdot g = 0{,}25\ \text{kg} \cdot \frac{(21{,}52\,\text{m/s})^2}{0{,}8\,\text{m}} - 0{,}25\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 142{,}27\ \text{N}$$

35 Un tiovivo consta de un aro horizontal de 3 m de radio del que cuelgan cuerdas de 4 m de longitud. Si en su extremo se sienta un hombre de 80 kg, ¿con qué velocidad angular girará el tiovivo para que la cuerda forme 37° con la vertical?

El movimiento del tiovivo es el de un péndulo cónico, cuyo esquema de fuerzas es:



Aplicando la segunda ley de Newton:

$$T_x = m \cdot a_n \rightarrow T \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow T \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Donde R es la suma de los 3 m del radio de base más x. Calculamos x por trigonometría:

$$\text{sen}\ 37° = \frac{x}{4} \rightarrow x = 4 \cdot \text{sen}\ 37° = 2{,}41\ \text{m}$$

Por tanto, diremos que:

$$R = 3\ \text{m} + 2{,}41\ \text{m} = 5{,}41\ \text{m}$$

Podemos calcular la tensión de la cuerda, asumiendo que el peso de la persona será igual a la componente Y de la tensión:

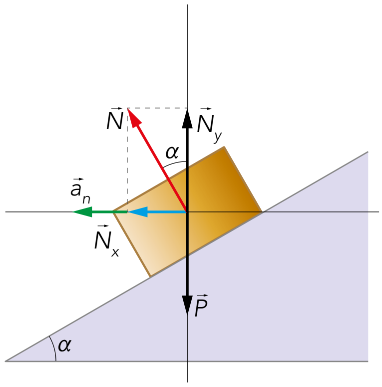
$$T_y = P \rightarrow T \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot g \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} = \frac{80\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{\cos 37°} = 982{,}68\ \text{N}$$

Por tanto, la velocidad angular del tiovivo es:

$$\omega = \sqrt{\frac{T \cdot \text{sen}\,\alpha}{m \cdot R}} = \sqrt{\frac{982{,}68\,\text{N}}{80\,\text{kg} \cdot 5{,}41\,\text{m}}} = 1{,}17\ \text{rad/s}$$

36 **Un vehículo circula sobre una curva peraltada de 60 m de radio. Suponiendo que no existe fuerza de rozamiento, ¿cuál debe ser el ángulo de peralte para que el vehículo pueda tomar la curva a 60 km/h sin derrapar? Manteniendo este ángulo, ¿con qué velocidad podría tomarla si el coeficiente de rozamiento fuese μ = 0,3?**

El esquema de fuerzas del movimiento es:



Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3\,600\ \text{s}} = 16{,}67\ \text{m/s}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en el eje *X* y en el eje *Y*:

$$N_x = m \cdot a_n \rightarrow N_x = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow N \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

$$N_y = P \rightarrow N \cdot cos\ \alpha = P$$

Despejamos la normal de la ecuación anterior y sustituimos en la componente *X*:

$$N = \frac{P}{\cos\alpha} \rightarrow \frac{P \cdot \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow m \cdot g \cdot \text{tg}\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

Luego, el ángulo será:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{v^2}{R \cdot g} = \frac{(16{,}67\ \text{m/s})^2}{60\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}47 \rightarrow \alpha = 25{,}3°$$

Para obtener la velocidad teniendo en cuenta el rozamiento del coche, aplicamos la segunda ley de Newton en los dos ejes:

Eje *X*: $F_{Rx} + N_x = m \cdot \frac{v^2}{R} \rightarrow F_R \cdot \cos\ \alpha + N \cdot \text{sen}\ \alpha = m \cdot \frac{v^2}{R}$

Eje *Y*: $N_y = F_{Ry} + P \rightarrow N \cdot \cos\ \alpha = \mu \cdot N \cdot \text{sen}\ \alpha + m \cdot g$

De esta segunda expresión se despeja la normal y se sustituye en la primera:

$$N = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} \rightarrow \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

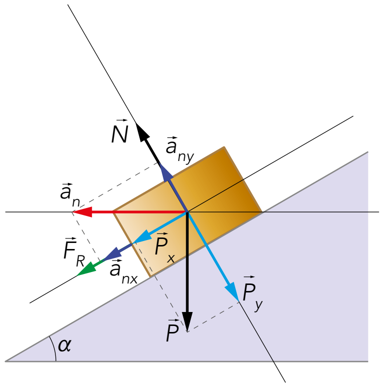
Así, ya despejamos la velocidad máxima:

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot (\mu \cdot \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha)}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha}} = \sqrt{\frac{60\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}3 \cdot \cos 25{,}3° + \text{sen}\,25{,}3°)}{\cos 25{,}3° - 0{,}3 \cdot \text{sen}\,25{,}3°}}$$

$$v_{máx} = 23{,}02\ \text{m/s} = 82{,}8\ \text{km/h}$$

37 ¿Qué pasaría si en el **estudio de la curva peraltada se usa un sistema de referencia en el que el eje *X* sea paralelo al plano de peralte? ¿Se obtienen las mismas expresiones?**

Tomando como sistema de referencia el eje *X* paralelo al plano del peralte, el esquema de las fuerzas y la descomposición de la aceleración normal es:



En este caso, aplicamos la segunda ley de Newton a los dos ejes, ya que hay componente *x* e *y* de la aceleración normal:

Eje *X*: $F_R + P_x = m \cdot a_{nx}$; $\mu \cdot N + P \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a_n \cdot \cos\alpha$

$$\mu \cdot N + m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a_n \cdot \cos\alpha$$

Eje *Y*: $N - P_y = m \cdot a_{ny}$; $N - P \cdot \cos\alpha = m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha$

$$N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha$$

Despejamos la fuerza normal de la componente *y*, y sustituimos en *x*:

$$N = m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha + m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$\mu \cdot m \cdot a_n \cdot \text{sen}\,\alpha + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a_n \cdot \cos\alpha$$

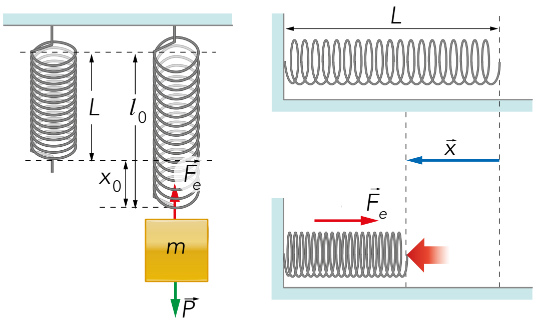
Despejando la aceleración normal, y teniendo en cuenta que $a_n = \dfrac{v^2}{R}$:

$$a_n = \frac{g \cdot (\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} \qquad v = \sqrt{g \cdot R \cdot \frac{\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha}}$$

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la técnica de desarrollo del pensamiento «¿Qué pasaría si?», propuesta para resolver esta actividad.

38 Un muelle sujeto al techo se estira 5 cm cuando de él se cuelga una masa de 200 g. El sistema se coloca en una superficie horizontal sin rozamiento, con un extremo del muelle sujeto a una pared, y se empuja el cuerpo hasta que el muelle se comprime 10 cm. Calcula los parámetros del movimiento originado cuando el cuerpo se suelta del muelle que está sujeto al techo.

Las representaciones de las situaciones que nos proporciona el enunciado son:



La ecuación general del movimiento es:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

De la situación de equilibrio que posee el muelle al estar en vertical, deducimos la constante de elasticidad:

$$P - F_e = 0 \rightarrow m \cdot g - k \cdot x_0 = 0$$

$$k = \frac{m \cdot g}{x_0} = \frac{0{,}2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}05\,\text{m}} = 39{,}24\ \text{N/m}$$

Cuando el muelle se comprime se obtienen los otros parámetros del movimiento:

– La amplitud será 10 cm = 0,1 m, ya que el enunciado indica que es la máxima compresión.

– La frecuencia angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\omega}} = \sqrt{\frac{39{,}24\,\text{N/m}}{0{,}2\,\text{kg}}} = 14\ \text{rad/s}$$

Calculamos el desfase sabiendo que a $t = 0$, la amplitud es máxima; es decir:

$$x_{(t=0)} = A \rightarrow \cos \phi_0 = 1 \rightarrow \phi_0 = \pi\ \text{rad}$$

39 **Un péndulo simple está formado por una masa de 200 g que cuelga de un hilo de 64 cm. Calcula el período y la frecuencia de las oscilaciones. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo, si la amplitud de las oscilaciones es de 2 cm? Si al medir el período del péndulo obtenemos el valor 1,65 s, ¿cuánto vale *g* en ese lugar?**

La frecuencia angular del péndulo es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}64\,\text{m}}} = 3{,}91\ \text{rad/s}$$

Con este dato, calculamos su período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{3{,}91\,\text{rad/s}} = 1{,}6\ \text{s}$$

Y la frecuencia será el inverso del período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}6\,\text{s}} = 0{,}63\ \text{Hz}$$

La aceleración máxima del péndulo es:

$$a_{máx} = \omega^2 \cdot x = (3{,}91\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}02\ \text{m} = 0{,}306\ \text{m/s}^2$$

Por tanto, la fuerza correspondiente a esta aceleración será:

$$F_{\text{máx}} = 0{,}2\ \text{kg} \cdot 0{,}306\ \text{m/s}^2 = 0{,}06\ \text{N}$$

Para $T = 1{,}65$ s, y sabiendo el valor de la longitud de la cuerda, podemos calcular g en este lugar:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot L}{T^2}$$

$$g = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}64\,\text{m}}{(1{,}65\,\text{s})^2} = 9{,}28\ \text{m/s}^2$$

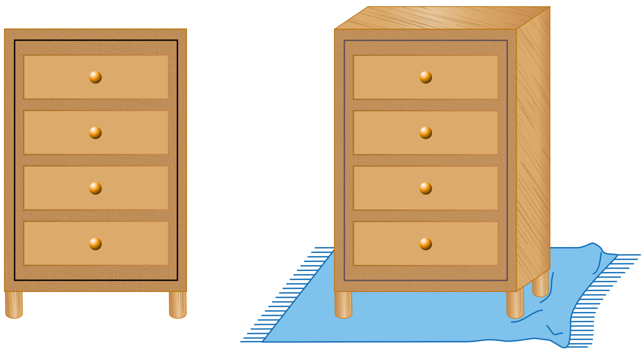
TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.6.1. (EA.6.1.1.) CE.7.1. (EA.7.1.1.-7.1.2.) CE.7.2. (EA.7.2.1.-7.2.2.-7.2.3.) CE.7.3. (EA.7.3.1.-7.3.2.-7.3.3.) CE.7.4. (EA.7.4.1.-7.4.2.) CE.7.5. (EA.7.5.1.)

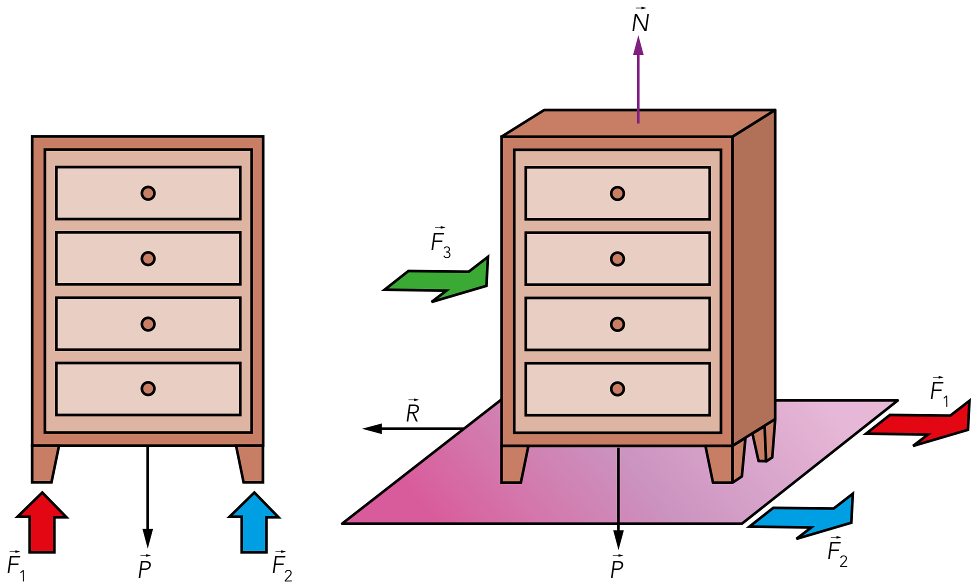
Página 266

Fuerzas e interacciones

1 **Deseas cambiar de sitio el armario de tu habitación con la ayuda de dos amigos. Primero, lo levantáis entre dos para ponerlo encima de una manta, y luego lo arrastráis: tus amigos tiran de la manta y tú empujas el armario. Indica las interacciones del armario cuando lo estáis levantando, y cuando lo arrastráis por el suelo.**



Para explicar las interacciones que existen, realizamos un esquema explicativo:



En el primer paso, las interacciones que se producen son:

– El peso del armario y su reacción, que actúa sobre la Tierra.

– La fuerza que ejercen las personas para levantarlo y su reacción (normal), que actúa sobre las personas en sentido contrario.

Cuando se coloca la manta bajo el armario y se arrastra sobre el suelo, las interacciones son:

– El peso del armario y su reacción, que actúa sobre la Tierra.

– La fuerza que ejerce el armario sobre la alfombra y su reacción (normal), que actúa sobre la alfombra en sentido contrario.

– La fuerza que yo ejerzo sobre el armario al empujarlo y su reacción, que actúa sobre mí en sentido contrario.

– La fuerza que ejerce la alfombra sobre cada pata y su reacción, que actúa sobre la alfombra en sentido contrario.

2 Indica, justificando tu respuesta, la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Para arrastrar una barca por un canal hacen falta dos caballerías, una en cada orilla.

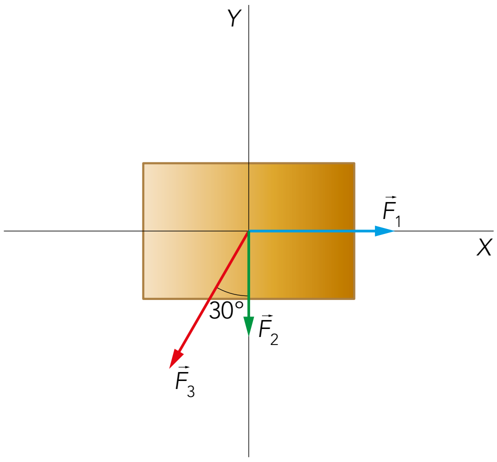
b) Dos fuerzas del mismo módulo y sentidos contrarios siempre producen equilibrio.

a) Verdadero, siempre y cuando las caballerías tiren de la barca con la misma fuerza. Así, la barca avanzará en línea recta y no se girará hacia ninguna de las orillas.

b) Falso, pues si sus puntos de aplicación no coinciden, pueden producir giro.

3 Sobre un cuerpo actúan las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1$, de 400 N, está dirigida hacia el este; $\vec{F}_2$, de 200 N, dirigida hacia el sur, y $\vec{F}_3$, de 400 N, dirigida hacia el suroeste formando un ángulo de 30° con la dirección sur. Dibuja el diagrama de fuerzas, y calcula el módulo, dirección y sentido de la resultante. ¿Cuál debería ser el módulo, dirección y sentido de una cuarta fuerza, $\vec{F}_4$, para que la resultante fuese nula?

El esquema de las fuerzas en un eje de coordenadas, considerando dirección norte el eje *Y* positivo, y el este el eje *X* positivo, será:



Descomponemos la $\vec{F}_3$ en sus componentes:

$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{i} + F_3 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{j} = -400 \cdot \text{sen}\,30° \cdot \vec{i} - 400 \cdot \cos 30° \cdot \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = (-200 \cdot \vec{i} - 346{,}4 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Sumamos las fuerzas situadas en el eje *X* y en el eje *Y*:

$$\vec{F}_x = 400 \cdot \vec{i} - 200 \cdot \vec{i} = 200 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{F}_y = -200 \cdot \vec{j} - 346{,}4 \cdot \vec{j} = -546{,}4 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Por tanto, el valor de la fuerza resultante es:

$$\vec{F} = (200 \cdot \vec{i} - 546{,}4 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Para que la resultante fuera nula, $\vec{F}_4$ debe ser del mismo módulo y dirección de $\vec{F}$, pero con sentido contrario. Esta será:

$$\vec{F}_4 = (-200 \cdot \vec{i} + 546{,}4 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

Su módulo:

$$|\vec{F}_4| = \sqrt{200^2 + (-546{,}4)^2} = \sqrt{40\,000 + 298\,553} = 582 \text{ N}$$

Que formará un ángulo con el eje *X* tal que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{546{,}4 \text{ N}}{-200 \text{ N}} = -2{,}732 \rightarrow \alpha = 110°$$

La dirección es noroeste, y forma 110° con el eje *X*.

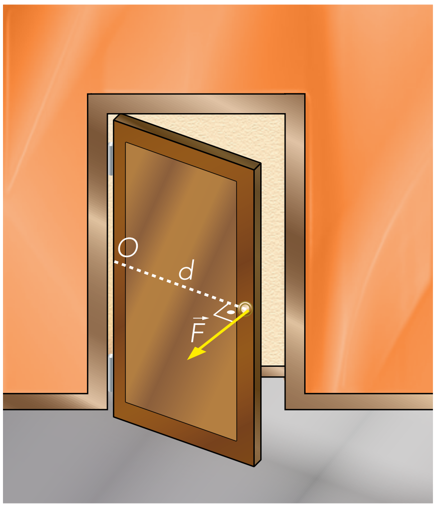
4 **Si estás sentado y tu peso es de 550 N, ¿qué objeto te aplica la fuerza necesaria para que no te hundas, y cuál es su valor? ¿En qué principio de la dinámica has basado tu respuesta?**

La silla en la que nos sentamos es la que aplica la fuerza necesaria para que no nos hundamos. La denominamos fuerza normal, y su valor es igual al del peso; es decir, N = 550 N.

Está basado en la tercera ley de Newton, que afirma que para toda acción hay siempre una reacción en sentido opuesto pero igual en módulo y dirección.

5 **La fuerza resultante para abrir una puerta tirando del pomo es la centésima parte de su peso. Si la masa de la puerta es de 10 kg, y la distancia del pomo al eje de giro es de 1 m, calcula la fuerza necesaria para abrirla si se aplica a 50 cm del eje**.

Teniendo en cuenta el esquema del movimiento:



La fuerza que se ejerce tirando del pomo es la siguiente:

$$F = \frac{P}{100} = \frac{m \cdot g}{100} = \frac{10\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m/s}}{100} = 0{,}98\,\text{N}$$

Para abrirla tirando desde una distancia de 50 cm, la mitad que desde el pomo, si se quiere ejercer el mismo momento, se deberá aplicar doble de fuerza:

$$M = r \cdot F = r' \cdot F' \rightarrow 1\,\text{m} \cdot 0{,}98\,\text{N} = 0{,}5\,\text{m} \cdot F' \rightarrow F' = \frac{0{,}98}{0{,}5} = 1{,}96\,\text{N}$$

Leyes de Newton

6 **¿Cómo podría comprobar un astronauta, sin instrumentos de medida, si su cápsula espacial está moviéndose o no con celeridad constante?**

Un astronauta que orbita alrededor de la Tierra lo hace con un movimiento circular uniforme, por lo que no experimenta aceleración tangencial. Si su velocidad no es constante, experimentará esta aceleración notando, respecto de la nave, un movimiento hacia delante si la velocidad disminuye o hacia atrás si aumenta, según el principio de inercia.

7 **Indica si los siguientes sistemas de referencia son inerciales o no, considerando que el de un observador situado en la orilla es inercial:**

a) **Un observador situado en la orilla opuesta.**

b) **Un observador arrastrado por el río con velocidad constante.**

c) **Un observador situado en una lancha motora en el momento de arrancar.**

d) **Un observador que se ha lanzado al río desde un helicóptero.**

a) Será un sistema de referencia inercial, pues el observador está inmóvil respecto al primero.

b) Al ser su velocidad constante respecto al primero, es decir un movimiento rectilíneo uniforme, el observador será un sistema de referencia inercial.

c) Un observador situado en una lancha motora al arrancar presenta aceleración. Por tanto, no será un sistema de referencia inercial.

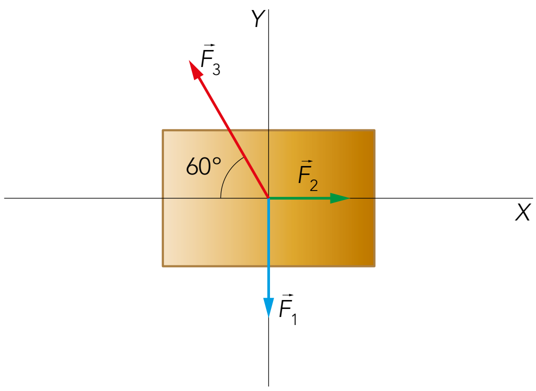
d) Al lanzarse al río, el observador cae con la aceleración de la gravedad, por lo que no será un sistema de referencia inercial.

8 **Sobre un cuerpo situado en el origen de coordenadas actúan las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1$, de 43,3 N, dirigida verticalmente hacia abajo; $\vec{F}_2$, de 25 N, dirigida horizontalmente hacia la derecha, y $\vec{F}_3$, de 50 N, dirigida hacia arriba y hacia atrás formando 60° con la horizontal. Calcula la posición del cuerpo a los 5 s si inicialmente:**

a) Estaba en reposo.

b) Se estaba moviendo horizontalmente hacia la derecha a 2 m/s.

El siguiente esquema describe las fuerzas que actúan sobre el cuerpo:



Las fuerzas que actúan en cada uno de los ejes son:

$$\vec{F}_x = (F_2 - F_3 \cdot \cos 60°) \cdot \vec{i} = (25 - 50 \cdot \cos 60°) \cdot \vec{i} = (25 - 25) \cdot \vec{i} \text{ N} = 0 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{F}_y = (F_1 - F_3 \cdot \text{sen}\, 60°) \cdot \vec{j} = (43{,}3 - 43{,}3 \cdot \text{sen}\, 60°) \cdot \vec{j} = (43{,}3 - 43{,}3) \cdot \vec{j} \text{ N} = 0 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

La fuerza resultante es, por tanto, nula. Así:

a) Si el cuerpo está en reposo, continúa en reposo y su posición es $\vec{x}_1 = 0$.

b) El cuerpo continúa moviéndose con un MRU. Por tanto, el espacio recorrido es:

$$x = v \cdot t = 2 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 10 \text{ m}$$

Al desplazarse a lo largo del eje X, su posición a los cinco segundos será:

$$\vec{x}_2 = 10 \cdot \vec{i} \text{ m}$$

9 **Cuando un objeto se mueve en el seno de un fluido (por ejemplo, un cuerpo que cae en la atmósfera) la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad. Sin embargo, la segunda ley de Newton indica que la fuerza es proporcional a la aceleración. ¿Supone esto una contradicción?**

No supone una contradicción. Cuando un cuerpo cae en el seno de un fluido, la fuerza resultante será, aplicando la segunda ley de Newton:

$$\left.\begin{array}{l} F_R = b \cdot v \\ P = m \cdot g \end{array}\right\} \begin{array}{l} P - F_R = m \cdot a \\ m \cdot g - b \cdot v = m \cdot a \end{array}$$

Por tanto, vemos que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad de caída, y que, a su vez, la fuerza neta es proporcional a la aceleración.

10 **Siendo la fuerza la misma, ¿produce el mismo efecto al actuar durante 1 s sobre un cuerpo de 10 kg que al actuar 10 s sobre un cuerpo de 1 kg?**

Si aplicamos el teorema del impulso mecánico en las dos situaciones obtenemos los siguientes resultados:

- Para $\Delta t = 1$ s y $m = 10$ kg:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \rightarrow \Delta v = \frac{F \cdot \Delta t}{m} = \frac{F}{10}$$

- Para $\Delta t = 10$ s y $m = 1$ kg:

$$F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v \rightarrow \Delta v = \frac{F \cdot \Delta t}{m} = 10 \cdot F$$

Por tanto, los efectos son diferentes:

– En el primer caso se produce un aumento de velocidad de la décima parte del valor de la fuerza aplicada (en unidades del SI).

– En el segundo se produce un incremento de diez veces el valor de dicha fuerza (también en unidades del SI).

11 **Calcula la fuerza que tiene que hacer el cable de un ascensor de 500 kg en cada uno de los casos siguientes:**

a) Para que suba con una aceleración de 2 m/s².

b) Para que suba a velocidad constante de 2 m/s.

c) Para que frene, mientras sube, con *a* = 3 m/s².

a) La fuerza que tiene que hacer el cable vendrá dada por la segunda ley de Newton:

$$F - P = m \cdot a$$

$$F = m \cdot a + m \cdot g = 500 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s}^2 + 500 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 5\,905 \text{ N}$$

b) Al subir con velocidad constante, el sumatorio de las fuerzas debe ser 0. Según la primera ley de Newton, la fuerza será:

$$F - P = m \cdot a = 0$$

$$F = P = 500 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 4\,905 \text{ N}$$

c) La fuerza de frenado la obtenemos a partir de la segunda ley de Newton:

$$F - P = m \cdot a$$

$$F = m \cdot a + m \cdot g = 500 \text{ kg} \cdot (-3 \text{ m/s}^2) + 500 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 3\,405 \text{ N}$$

Página 267

12 **En un plano inclinado, la mitad superior carece de rozamiento, mientras que la inferior lo tiene muy elevado. Si por él se deja resbalar un cuerpo, representa su velocidad en función del camino recorrido.**

En un MRUA, la velocidad tiene la siguiente ecuación:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

Donde la pendiente de la recta es $2 \cdot a$. Teniendo en cuenta que en el primer tramo no hay rozamiento y en el segundo sí, podemos decir que:

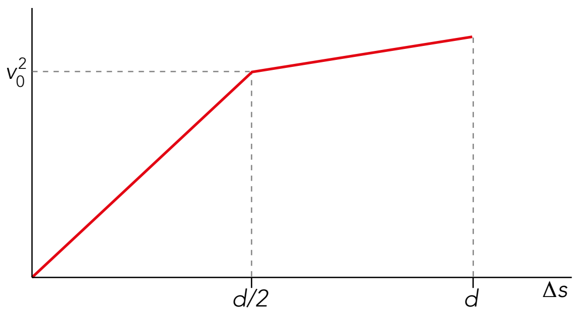
- Tramo sin rozamiento, $\mu = 0$:

$$v_0 = 0 \rightarrow v^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta s$$

- Tramo con rozamiento, $\mu \neq 0$:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a' \cdot \Delta s$$

Como $a > a'$, la pendiente del primer tramo es mayor que la del segundo. Así, la gráfica que lo representa es:



13 **Un cuerpo de 30 kg recorre una circunferencia de 50 m de radio con rapidez constante de 20 m/s. Calcula la aceleración del cuerpo y la fuerza que actúa sobre él.**

Conocida la velocidad del cuerpo, su aceleración normal es:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \cdot \vec{n} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{50 \text{ m}} \cdot \vec{n} = 8 \cdot \vec{n} \text{ m/s}^2$$

Por tanto, la fuerza que actúa sobre el cuerpo es la fuerza centrípeta:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_n = 30 \text{ kg} \cdot 8 \cdot \vec{n} \text{ m/s}^2 = 240 \cdot \vec{n} \text{ N}$$

14 **Siendo así que a toda acción se opone una reacción, ¿cómo se explica que podamos mover un cuerpo empujándolo si ambas fuerzas se anulan entre sí y, por tanto, deben producir reposo?**

Aunque las fuerzas actúan de manera simultánea, cada una actúa sobre uno de los cuerpos que interaccionan. Por tanto, las que actúan sobre uno de los cuerpos no se anulan entre sí.

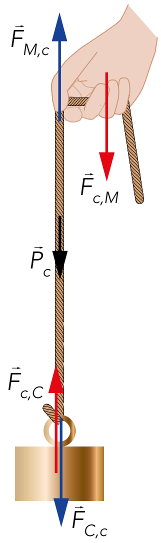
15 **Mantienes suspendido en el aire un cuerpo pesado mediante una cuerda que sujetas con tu mano. Indica:**

a) Las interacciones de la cuerda.

b) Las fuerzas que actúan sobre la cuerda.

c) Sobre qué cuerpo actúa la reacción correspondiente a cada una de ellas.

El esquema de fuerzas de esta situación es el siguiente:



La cuerda interacciona con la Tierra (a distancia), con la mano y con el bloque suspendido de ella.

Las fuerzas que actúan sobre la cuerda son:

- La fuerza cuerda-mano que es la reacción a la fuerza que la mano hace sobre la cuerda.
- La fuerza cuerda-cuerpo, que es la reacción al peso del cuerpo suspendido de esta.
- La fuerza peso de la cuerda, reacción de la fuerza de atracción de la Tierra, se puede considerar la masa de la cuerda despreciable, y no considerar esta fuerza.

Momento lineal e impulso mecánico

16 **Indica en cuáles de los siguientes movimientos permanece constante el momento lineal:**

a) Movimiento rectilíneo uniforme.

b) Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

c) Movimiento circular uniforme.

Sabiendo que el momento lineal tiene relación con la masa y la velocidad de esta forma:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

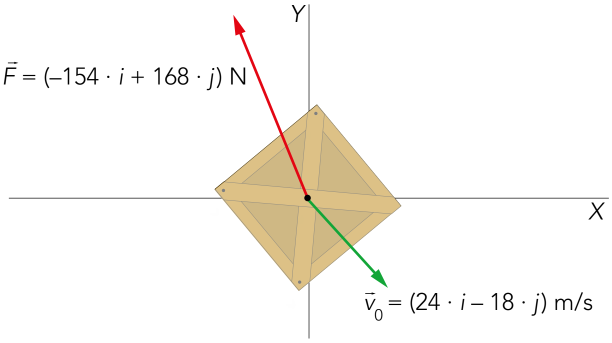
Al ser una magnitud vectorial, al igual que la velocidad, diremos que:

a) En un MRU, la velocidad del cuerpo permanece constante en módulo, dirección y sentido. Por tanto, el momento lineal lo es también en módulo, dirección y sentido.

b) En un MRUA, la dirección de la velocidad permanece constante, variando su módulo. Por tanto, el momento lineal, $\vec{p}$, no es constante.

c) En un MCU el vector velocidad cambia su dirección, pero el módulo es constante. Por tanto, la cantidad de movimiento será constante en módulo, cambiando la dirección. Así, $\vec{p}$ no es constante.

17 **Sobre un cuerpo de 70 kg, que se mueve con velocidad $\vec{v}_0 = (24 \cdot \vec{i} - 18 \cdot \vec{j})$ m/s, actúa la fuerza $\vec{F} = (-154 \cdot \vec{i} + 168 \cdot \vec{j})$ N durante 20 s. Calcula el momento lineal inicial, el impulso mecánico de la fuerza, el momento lineal final y la velocidad final del cuerpo.**



El momento lineal inicial es:

$$\vec{p}_0 = m \cdot \vec{v}_0 = 70 \text{ kg} \cdot (24 \cdot \vec{i} - 18 \cdot \vec{j}) \text{ m/s} = (1680 \cdot \vec{i} - 1260 \cdot \vec{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

El impulso mecánico de la fuerza es igual al producto de la fuerza por el tiempo que actúa; por tanto:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot t = (-154 \cdot \vec{i} + 168 \cdot \vec{j}) \text{ N} \cdot 20 \text{ s} = (-3\,080 \cdot \vec{i} + 3\,360 \cdot \vec{j}) \text{ N} \cdot \text{s}$$

Teniendo en cuenta el teorema del impulso mecánico, tenemos:

$$\vec{F} \cdot t = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

Luego:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{F} \cdot t = (1680 \cdot \vec{i} - 1260 \cdot \vec{j}) + (-3\,080 \cdot \vec{i} + 3\,360 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{p} = (-1400 \cdot \vec{i} + 2\,100 \cdot \vec{j}) \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Por tanto, aplicando de nuevo la ecuación matemática del momento lineal, la velocidad final será:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow [-1400 \cdot \vec{i} + 2\,100 \cdot \vec{j}] = 70 \text{ kg} \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{v} = (-20 \cdot \vec{i} + 30 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}$$

18 **Sobre un cuerpo de 40 kg que está inicialmente en reposo actúan, durante 2 minutos, las siguientes fuerzas: $\vec{F}_1 = (150 \cdot \vec{i} + 200 \cdot \vec{j})$ N; $\vec{F}_2 = -392 \cdot \vec{j}$ N; $\vec{F}_3 = (-142 \cdot \vec{i} + 192 \cdot \vec{j})$ N. Calcula la fuerza resultante y su impulso mecánico, el momento lineal final y la velocidad del cuerpo a los 2 minutos.**

La fuerza resultante será la suma de todas las fuerzas:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (150 - 142) \cdot \vec{i} + (200 - 392 + 192) \cdot \vec{j} = 8 \cdot \vec{i} \text{ N}$$

El impulso mecánico será:

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t = 8 \cdot \vec{i} \text{ N} \cdot 120 \text{ s} = 960 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La velocidad del cuerpo a los dos minutos es:

$$\vec{I} = m \cdot (\vec{v}_f - \vec{v}_0)$$

$$\vec{v}_f = \frac{\vec{I}}{m} = \frac{960 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{40 \text{ kg}} = 24 \cdot \vec{i} \text{ m/s}$$

Sabiendo que $\vec{I} = \Delta\vec{p}$ matemáticamente, podemos hallar el valor del momento lineal final:

$$\Delta\vec{p} = m \cdot \vec{v}_f = 40 \text{ kg} \cdot 24 \cdot \vec{i} \text{ m/s} = 960 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

19 **Para hacer un saque, una tenista lanza verticalmente hacia arriba la pelota y, cuando se encuentra a 2 m del suelo y desciende a 2 m/s, la golpea de forma que sale despedida horizontalmente a 25 m/s. Si la masa de la pelota es de 60 g y está en contacto con la raqueta 0,02 s, calcula:**

a) El momento lineal de la pelota antes y después de ser golpeada.

b) La fuerza, supuesta constante, que ejerce la raqueta sobre la pelota.

c) La distancia horizontal a la que cae la pelota, respecto de la posición de saque.

Tomaremos el eje *X* horizontal con su sentido positivo en la dirección del movimiento, y el eje *Y* vertical con el sentido positivo hacia arriba.

a) El momento lineal de la pelota antes de ser golpeada vale:

$$\vec{p}_0 = m \cdot \vec{v}_0 = 0{,}06 \cdot (-2 \cdot \vec{j}\,) = -0{,}12 \cdot \vec{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

El momento lineal de la pelota después de ser golpeada vale:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 0{,}06 \cdot (25 \cdot \vec{i}\,) = 1{,}5 \cdot \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

b) Aplicando el teorema de la cantidad de movimiento, podemos calcular la fuerza que ejerce la raqueta sobre la pelota:

$$\vec{F} \cdot t = \Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

$$\vec{F} \cdot 0{,}02 \text{ s} = (1{,}5 \cdot \vec{i}\,) - (-0{,}12 \cdot \vec{j}\,) = 1{,}5 \cdot \vec{i} + 0{,}12 \cdot \vec{j}$$

Despejando:

$$\vec{F} = \frac{1{,}5}{0{,}02} \cdot \vec{i} + \frac{0{,}12}{0{,}02} \cdot \vec{j} = (75 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j}\,) \text{ N}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{75^2 + 6^2} = \sqrt{5\,661} = 75{,}23 \text{ N}$$

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \frac{6}{75} = 0{,}08 \rightarrow \alpha = 4{,}5°$$

Por tanto, la raqueta ejerce una fuerza de 75,23 N formando un ángulo de 4,5° con la horizontal hacia arriba.

c) La pelota, una vez que abandona la raqueta, describe un movimiento parabólico correspondiente a un tiro horizontal desde una altura de 2 m y con una velocidad inicial de 25 m/s; luego, las ecuaciones de su movimiento son:

$$x = v_0 \cdot t = 25 \cdot t$$

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 2 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

Cuando llega al suelo, $y = 0$; luego:

$$0 = 2 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{2} \cdot 9{,}81}} = 0{,}638 \text{ s}$$

$$x = 25 \text{ m/s} \cdot 0{,}638 \text{ s} = 15{,}96 \text{ m}$$

Por tanto, la pelota cae a una distancia de 15,96 m del punto de saque.

20 **Un jugador de golf golpea una pelota de 20 g que está en reposo en el suelo, saliendo esta despedida con una elevación de 45°. Si la pelota cae a 125 m del lugar de lanzamiento, calcula:**

a) El módulo y las componentes de la velocidad de la pelota después de ser golpeada.

b) La fuerza que ejerce el palo sobre la pelota si están en contacto 0,01 s.

a) Las pelota realiza un tiro oblicuo con una elevación de 45°, por lo que las ecuaciones de su movimiento son:

$$x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos 45° \cdot t$$

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot \text{sen}\, 45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$$

Cuando la pelota llega al suelo, sabiendo que sen 45° = cos 45°; $x = 125$ m e $y = 0$; luego:

$$\left.\begin{array}{l} 125 = v_0 \cdot \cos 45° \cdot t \\ 0 = v_0 \cdot \text{sen}\, 45° \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 \end{array}\right\} \rightarrow 125 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{125}{\frac{1}{2} \cdot 9{,}81}} = 5{,}05 \text{ s}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$125 = v_0 \cdot \cos 45° \cdot 5{,}05 \rightarrow v_0 = \frac{125}{\cos 45° \cdot 5{,}05} = 35 \text{ m/s}$$

La velocidad inicial de la pelota en su movimiento parabólico, después de ser golpeada, es, por tanto:

$$\vec{v} = (v_{0x} \cdot \vec{i} + v_{0y} \cdot \vec{j}) = (35 \cdot \cos 45° \cdot \vec{i} + 35 \cdot \cos 45° \cdot \vec{j})$$

$$\vec{v} = 24{,}75 \cdot (\vec{i} + \vec{j}) \text{ m/s}$$

b) La velocidad que acabamos de calcular es la de la pelota después de ser golpeada. Como antes de ser golpeada estaba en reposo, $\vec{p}_0 = 0$, teniendo en cuenta el teorema del impulso mecánico, resulta:

$$\vec{F} \cdot t = \vec{p} = m \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{F} = \frac{\vec{p}}{t} = \frac{m \cdot \vec{v}}{t} = \frac{0{,}02 \text{ kg} \cdot (24{,}75 \cdot \vec{i} + 24{,}75 \cdot \vec{j}) \text{ m/s}}{0{,}01 \text{ s}}$$

$$\vec{F} = (49{,}5 \cdot \vec{i} + 49{,}5 \cdot \vec{j}) \text{ N}$$

21 Un cohete de 3 kg, que asciende verticalmente a 10 m/s, explota cuando se encuentra a 20 m de altura, fragmentándose en dos trozos. Si uno de ellos, de 2 kg, sale horizontalmente hacia la derecha a 15 m/s, ¿dónde cae el otro?

Como el sistema está libre de fuerzas externas, podemos afirmar que la cantidad de movimiento total permanece constante. Por tanto, la velocidad del segundo trozo es:

$$\Delta p_0 = \Delta p_F$$

$$m_0 \cdot \vec{v}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2 = \frac{m_0 \cdot \vec{v}_0 - m_1 \cdot \vec{v}_1}{m_2} = \frac{3 \text{ kg} \cdot 10 \cdot \vec{j} - 2 \text{ kg} \cdot 15 \cdot \vec{i}}{1 \text{ kg}} = 30 \cdot (\vec{j} - \vec{i}) \text{ m/s}$$

El movimiento está compuesto por dos componentes, una en el eje *X* y otra en el eje *Y*:

Eje *X*:

$$x = v_x \cdot t$$

$$v_x = v_{0x} = \text{cte}$$

Eje *Y*:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

Cuando el segundo trozo cae al suelo, $y = 0$. Luego, podemos calcular el tiempo que tarda en caer al suelo y, después, la distancia que ha alcanzado:

$$y = 0 = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 20 + 30 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$$

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81} \rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 6{,}73 \text{ s} \\ t_2 = -0{,}607 \text{ s} \end{array}$$

De donde desechamos el valor negativo del tiempo, pues no es posible físicamente. Así, la distancia recorrida por el segundo trozo será:

$$x = v_x \cdot t = -30 \text{ m/s} \cdot 6{,}73 \text{ s} = -201{,}9 \text{ m}$$

El signo negativo nos indica que este trozo cae hacia la izquierda de la vertical del punto de explosión.

Estudio dinámico de situaciones cotidianas

22 Una persona de 80 kg cuelga de una cuerda atada a un helicóptero que asciende verticalmente con a = 5 m/s². ¿Qué tensión soporta la cuerda? Si la cuerda se rompe cuando de ella se cuelgan 1200 N, ¿con qué aceleración máxima podrá subir el helicóptero para que la persona no caiga?

Según la segunda ley de Newton, la tensión que soporta la cuerda es:

$$T - P = m \cdot a$$

$$T = m \cdot a + m \cdot g = 80 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m/s}^2 + 80 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 1\,184{,}8 \text{ N}$$

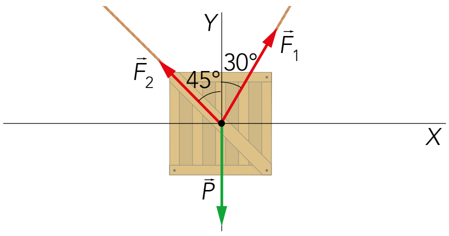
La aceleración máxima corresponderá a cuando la cuerda soporta su tensión máxima. Por tanto, su valor sería:

$$a = \frac{T_{máx} - P}{m} = \frac{1200 \text{ N} - 80 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{80 \text{ kg}} = 5{,}19 \text{ m/s}^2$$

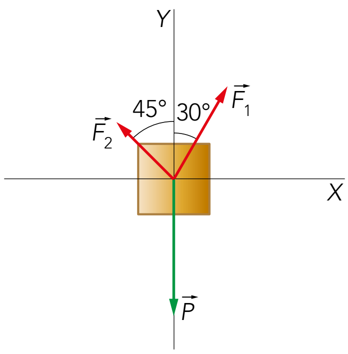
23 Para elevar verticalmente un cuerpo utilizamos dos cuerdas: una forma 30° con la vertical y tira hacia la derecha, y la otra tira hacia la izquierda formando 45° con la vertical. Si el peso del cuerpo es de 1 000 N, calcula la fuerza de cada una de las cuerdas para que el cuerpo:

a) Suba con velocidad constante.

b) Baje con velocidad constante.



Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:



Si el cuerpo se mueve con velocidad constante, tanto si sube como si baja, la suma de las fuerzas que actúan sobre él ha de ser nula; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = 0$$

Las componentes de cada fuerza son:

$$\vec{F}_1 = (F_1 \cdot \text{sen}\,30° \cdot \vec{i} + F_1 \cdot \cos 30° \cdot \vec{j}) = (F_1 \cdot 0{,}5 \cdot \vec{i} + F_1 \cdot 0{,}87 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{F}_2 = (-F_2 \cdot \text{sen}\,45° \cdot \vec{i} + F_2 \cdot \cos 45° \cdot \vec{j}) = (-F_2 \cdot 0{,}71 \cdot \vec{i} + F_2 \cdot 0{,}71 \cdot \vec{j})$$

$$\vec{P} = -1\,000 \cdot \vec{j} \text{ N}$$

Por tanto, en cada uno de los ejes, la fuerza es:

Eje *X*: $F_x = F_1 \cdot 0{,}5 - F_2 \cdot 0{,}71 = 0 \rightarrow F_1 \cdot 0{,}5 = F_2 \cdot 0{,}71 \rightarrow F_1 = 1{,}42 \cdot F_2$

Eje *Y*: $F_y = F_1 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 - 1\,000 = 0 \rightarrow F_1 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 = 1\,000$

Sustituyendo F_1, obtenemos:

$$F_1 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 = 1\,000 \rightarrow F_2 \cdot 1{,}42 \cdot 0{,}87 + F_2 \cdot 0{,}71 = 1\,000$$

$$F_2 \cdot 1{,}94 = 1\,000 \rightarrow F_2 = 514{,}03 \text{ N}$$

Y, por tanto:

$$F_1 = 1{,}42 \cdot F_2 = 1{,}42 \cdot 514{,}03 = 729{,}9 \text{ N} \approx 730 \text{ N}$$

Página 268

24 Sobre un cuerpo de 2 kg, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal, se aplica durante 4 s una fuerza de 15 N paralela a la superficie. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la superficie es de 0,5, calcula:

a) La aceleración del cuerpo a los 3 s y a los 5 s.

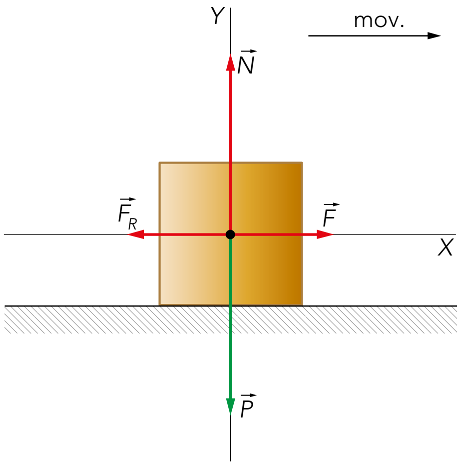
b) Su velocidad a los 4 s.

c) El tiempo que tarda en pararse, desde el instante inicial.

d) El espacio total recorrido.

a) Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la fuerza aplicada; luego:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Tomando el semieje *X* positivo en el sentido del movimiento, tenemos, para los ejes *X* e *Y*:

Eje *X*: $F - F_R = m \cdot a \rightarrow F - \mu \cdot N = m \cdot a$

Eje *Y*: $N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g$

$$F - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \rightarrow 15 \text{ N} - 0{,}5 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 2 \cdot a \rightarrow a = 2{,}6 \text{ m/s}^2$$

Luego, esta es la aceleración del cuerpo en cualquier instante mientras actúa la fuerza *F*, y es positiva (hacia la derecha). Cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$, la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

Descomponiendo la expresión anterior en los ejes *X* e *Y*, se obtiene:

Eje *X*: $-F_R = m \cdot a' \rightarrow -\mu \cdot N = m \cdot a'$

Eje *Y*: $N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g$

$$-\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a' \rightarrow -0{,}5 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 2 \cdot a' \rightarrow a' = -4{,}9 \text{ m/s}^2$$

Esta es la aceleración de frenado del cuerpo desde que deja de actuar la fuerza *F* hasta que este se detiene.

b) La velocidad del cuerpo a los 4 s, en el instante en que deja de actuar $\vec{F}$, vale:

$$v = a \cdot t = 2{,}6 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ s} = 10{,}4 \text{ m/s}$$

c) Cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$, el cuerpo disminuye su velocidad y se para en un tiempo:

$$v = v_0 + a' \cdot t \rightarrow 0 = 10{,}4 \text{ m/s} - 4{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot t_1 \rightarrow t_1 = 2{,}1 \text{ s}$$

Luego, el cuerpo tarda en pararse:

$$t_{detención} = 4 \text{ s} + 2{,}1 \text{ s} = 6{,}1 \text{ s}$$

d) El espacio recorrido por el cuerpo cuando actúa la fuerza $\vec{F}$ vale:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}6 \text{ m/s}^2 \cdot (4 \text{ s})^2 = 20{,}8 \text{ m}$$

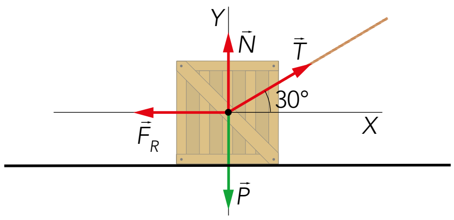
El espacio recorrido cuando deja de actuar la fuerza $\vec{F}$ vale:

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a' \cdot t^2 = 10{,}4 \text{ m/s} \cdot 2{,}1 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 4{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot (2{,}1 \text{ s})^2 = 11{,}0 \text{ m}$$

Luego, el espacio total recorrido vale:

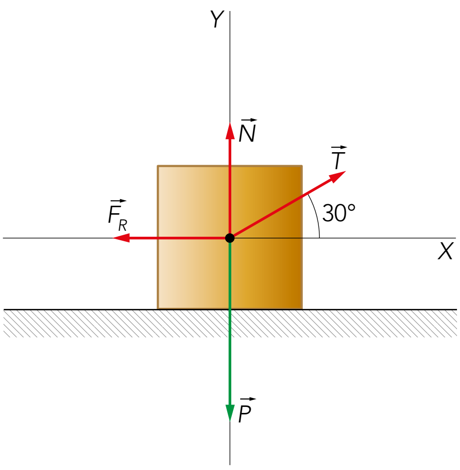
$$x = 20{,}8 \text{ m} + 11{,}0 \text{ m} = 31{,}8 \text{ m}$$

25 Atamos una cuerda a una caja de 40 kg que está apoyada en una superficie horizontal y tiramos de la cuerda hacia arriba formando 30° con la horizontal. La tensión de la cuerda justo antes de empezar a moverse la caja vale 116 N. Determina el coeficiente de rozamiento entre la caja y la superficie de apoyo.



Las fuerzas que actúan sobre la caja son el peso, la normal, la fuerza de rozamiento y la tensión de la cuerda; además, como la caja está a punto de moverse, la fuerza de rozamiento alcanza su máximo valor: $F_R = \mu \cdot N$, pero el cuerpo no se mueve; luego:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R + \vec{T} = 0$$



Por tanto, tenemos, para los ejes X e Y:

Eje X: $T_x - F_R = 0 \rightarrow T \cdot \cos\alpha - \mu \cdot N = 0$

Eje Y: $N + T_y - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g - T \cdot \text{sen}\,\alpha$

$$T \cdot \cos\alpha - \mu \cdot (m \cdot g - T \cdot \text{sen}\,\alpha) = 0$$

Luego, la fuerza normal vale:

$$N = m \cdot g - T \cdot \text{sen}\,\alpha = 40\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 116\ \text{N} \cdot 0{,}5 = 334{,}4\ \text{N}$$

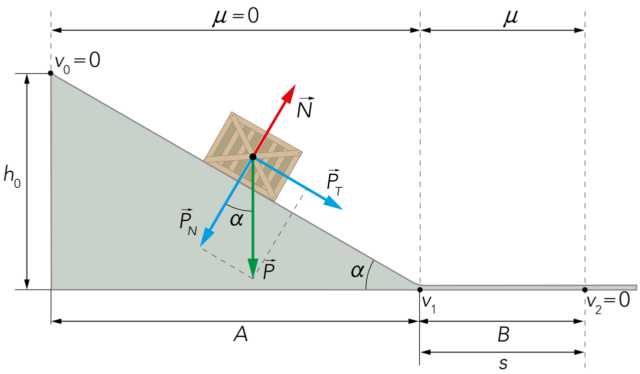
Ya la fuerza de rozamiento:

$$F_R = T \cdot \cos\alpha = 116\ \text{N} \cdot 0{,}866 = 100{,}46\ \text{N}$$

Por tanto, el coeficiente de rozamiento será:

$$\mu = \frac{F_R}{N} = \frac{100{,}46\ \text{N}}{334{,}4\ \text{N}} = 0{,}3$$

26 Desde una altura h_0 se suelta un cuerpo de masa m que baja deslizando, sin rozamiento, por un plano inclinado un ángulo α respecto a la horizontal, y continúa sobre una superficie horizontal de coeficiente de rozamiento μ. Calcula, en función de este coeficiente, el espacio que recorrerá sobre la superficie horizontal antes de detenerse.



Vamos a dividir el proceso en dos etapas distintas:

– En la primera, A, tenemos un MRUA en el que el cuerpo se desliza por un plano inclinado sin rozamiento, hasta llegar al suelo, P. Por tanto, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} v_1^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot d \\ P_T = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot a \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_1^2 = 2 \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot d = 2 \cdot g \cdot h_0 \\ a = g \cdot \text{sen}\,\alpha \end{array}$$

– En la segunda parte del movimiento, B, el cuerpo sigue deslizándose desde P en adelante con un MRUA pero con rozamiento. Así, en este caso, planteamos que:

$$\left.\begin{array}{l} v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot a \cdot s \\ F_R = \mu \cdot N = m \cdot a \end{array}\right\} \begin{array}{l} -v_1^2 = 2 \cdot (-\mu \cdot g) \cdot s \rightarrow v_1^2 = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s \\ a = \dfrac{\mu \cdot N}{m} = -\mu \cdot g \end{array}$$

Como v_1 tiene el mismo valor en las dos partes, igualamos las expresiones para hallar qué espacio horizontal ha recorrido:

$$2 \cdot g \cdot h_0 = 2 \cdot \mu \cdot g \cdot s \rightarrow \Delta s = \frac{h_0}{\mu}$$

27 Un cuerpo de 3 kg se lanza desde el punto más bajo de un plano inclinado 30° con una rapidez de 6 m/s, sube deslizando hasta detenerse y luego comienza a bajar. Si el coeficiente de rozamiento vale 0,35, calcula:

a) La aceleración de subida.

b) El espacio que recorre hasta detenerse.

c) La aceleración de bajada.

d) El tiempo que tarda en volver al punto de partida.

Hay que tener en cuenta que, tanto en la subida como en la bajada, la fuerza de rozamiento se opone al movimiento del cuerpo; las demás fuerzas que actúan sobre él, el peso y la normal, no cambian de sentido.

a) En la subida, tomando el semieje *X* positivo hacia arriba, tenemos, para los ejes *X* e *Y*:

Eje *X*: $-P_x - F_R = m \cdot a \rightarrow -m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a$

Eje *Y*: $N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$$-g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha = a$$

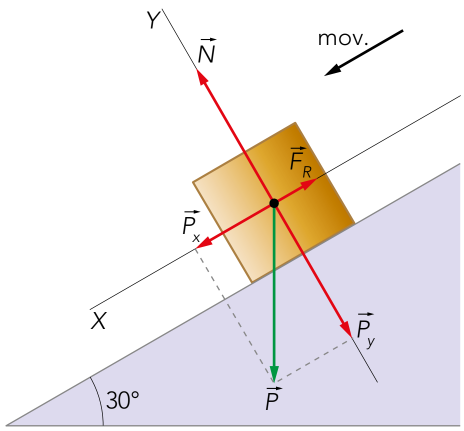
Luego, la aceleración de subida es:

$$a = -g \cdot (\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) = -9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}5 + 0{,}35 \cdot 0{,}866) = -7{,}9\ \text{m/s}^2$$

b) Al subir con un MRUA con aceleración negativa, cuando se detiene se cumple:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot s \rightarrow 0 - (6\ \text{m/s})^2 = 2 \cdot (-7{,}9\ \text{m/s}^2) \cdot s \rightarrow s = 2{,}3\ \text{m}$$

c) En la bajada, tomamos el semieje *X* positivo hacia abajo:



Así, las ecuaciones correspondiente en este movimiento, para los ejes *X* e *Y* son:

Eje *X*: $P_x - F_R = m \cdot a' \rightarrow m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot N = m \cdot a'$

Eje *Y*: $N - P_y = 0 \rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$$g \cdot \text{sen}\,\alpha - \mu \cdot g \cdot \cos\alpha = a'$$

Luego, la aceleración de bajada vale:

$$a' = g \cdot (\text{sen}\,\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}5 - 0{,}35 \cdot 0{,}866) = 1{,}9\ \text{m/s}^2$$

d) Calculamos el tiempo empleado en cada trayecto. En la subida, el cuerpo emplea un tiempo:

$$v - v_0 = a \cdot t \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-6\ \text{m/s}}{-7{,}9\ \text{m/s}^2} = 0{,}76\ \text{s}$$

Y en la bajada:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a' \cdot t'^2 \rightarrow 2{,}3\ \text{m} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}9\ \text{m/s}^2 \cdot t'^2 \rightarrow t' = 1{,}54\ \text{s}$$

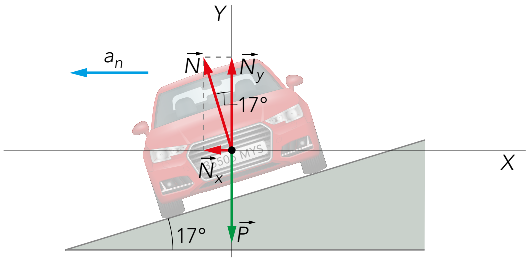
Por tanto, el tiempo que tarda en volver al punto de partida será la suma de estos dos valores. Así:

$$t_{total} = t + t' = 0{,}76\ \text{s} + 1{,}54\ \text{s} = 2{,}30\ \text{s}$$

28 **Calcula la máxima velocidad con que un automóvil puede tomar una curva peraltada 17° de 250 m de radio:**

a) Si consideramos despreciable el rozamiento.

b) Si el coeficiente de rozamiento vale 0,4.



a) Si consideramos despreciable el rozamiento, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están representadas en el diagrama de la figura, y la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$

Tomando el eje *X* horizontal con el sentido positivo hacia el centro de la curva, tenemos, para los ejes *X* e *Y*:

Eje *X*: $N_x = m \cdot a_n \rightarrow N \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$

Eje *Y*: $N_y - P = 0 \rightarrow N \cdot \cos\alpha = m \cdot g$

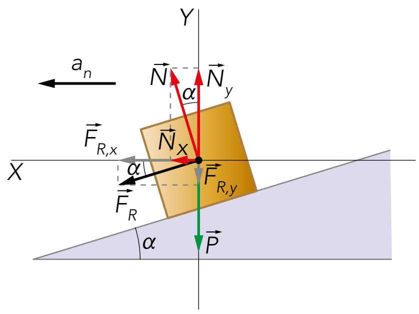
Dividiendo miembro a miembro ambas ecuaciones, tenemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{g \cdot R} \rightarrow v^2 = g \cdot R \cdot \text{tg}\,\alpha$$

$$v_{máx} = \sqrt{g \cdot R \cdot \text{tg}\,\alpha} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 250\ \text{m} \cdot \text{tg}\,17°} = 27{,}38\ \text{m/s}$$

b) Si existe rozamiento, el diagrama de fuerzas es el de la figura, y la fuerza resultante es:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_R = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$



Tomando el eje *X* horizontal con el sentido positivo hacia el centro de la curva tenemos, en cada eje:

Eje *X*: $N_x + F_{R,x} = m \cdot a_n \rightarrow N \cdot \text{sen}\,\alpha + \mu \cdot N \cdot \cos\alpha = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$

Eje *Y*: $N_y - F_{R,y} - P = 0 \rightarrow N \cdot \cos\alpha - \mu \cdot N \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot g$

Despejando en la segunda ecuación:

$$N = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha}$$

Y sustituyendo en la primera:

$$(\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha) \cdot \frac{m \cdot g}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

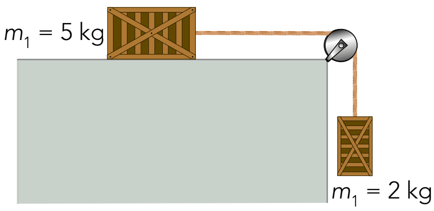
De donde se obtiene:

$$v^2 = g \cdot R \cdot \frac{\text{sen}\,\alpha + \mu \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha - \mu \cdot \text{sen}\,\alpha} =$$

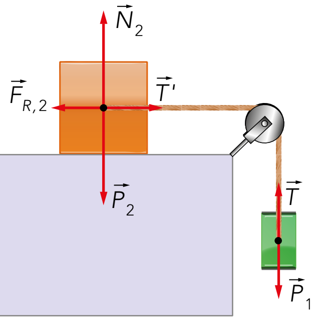
$$= 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 250\ \text{m} \cdot \frac{\text{sen}\,17° + 0{,}4 \cdot \cos 17°}{\cos 17° - 0{,}4 \cdot \text{sen}\,17°} = 1\,971{,}96\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 44{,}41\ \text{m/s} = 159{,}9\ \text{km/h}$$

29 Calcula la aceleración de los cuerpos de la figura y la tensión de la cuerda si el coeficiente de rozamiento vale 0,2. ¿Qué ocurre si a los 5 s de iniciado el movimiento se corta la cuerda?



Como los cuerpos están unidos, tienen la misma aceleración tangencial, $a_1 = a_2 = a$, y las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo son:



En el caso del cuerpo 1, actúan su peso y la tensión de la cuerda, y ninguna fuerza en el eje X. Tomando el semieje Y positivo hacia abajo, tenemos:

$$\Sigma\vec{F}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T} = m_1 \cdot \vec{a}_1 \rightarrow m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a \qquad [1]$$

Para el cuerpo 2, actuarán su peso, la normal, la tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento:

$$\Sigma\vec{F}_2 = \vec{P}_2 + \vec{T}' + \vec{N}_2 + \vec{F}_{R,2} = m_2 \cdot \vec{a}_2$$

Descomponiendo la anterior expresión en sus componentes, y teniendo en cuenta que $T' = T$:

Eje X: $\quad T - F_{R,2} = m_2 \cdot a \rightarrow T - \mu \cdot N_2 = m_2 \cdot a$

Eje Y: $\quad N_2 - m_2 \cdot g = 0 \rightarrow N_2 = m_2 \cdot g$

$$T - \mu \cdot m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \qquad [2]$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones [1] y [2], obtenemos la expresión que permite calcular la aceleración; a partir de ella, obtenemos el valor de la tensión:

$$m_1 \cdot g - \mu \cdot m_2 \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$a = \frac{m_1 - \mu \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{2\ \text{kg} - 0{,}2 \cdot 5\ \text{kg}}{7\ \text{kg}} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1{,}4\ \text{m/s}^2$$

$$T = m_2 \cdot a + \mu \cdot m_2 \cdot g = 5\ \text{kg} \cdot 1{,}4\ \text{m/s}^2 + 0{,}2 \cdot 5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 16{,}8\ \text{N}$$

Como los cuerpos realizan un MRUA, a los 2 s, los cuerpos se mueven con una velocidad:

$$v = a \cdot t = 1{,}4\ \text{m/s}^2 \cdot 5\ \text{s} = 7\ \text{m/s}$$

Si se corta la cuerda en ese instante, desaparece la tensión, y, por tanto:

– Cuerpo 1: como sobre él solo actúa el peso, cae con una aceleración igual a la de la gravedad, 9,81 m/s², y con una velocidad inicial de 7 m/s; luego, realiza un movimiento vertical hacia abajo, siendo sus ecuaciones:

$$v_1 = v_0 + g \cdot t = 7 \text{ m/s} + 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_0 + 7 \text{ m/s} \cdot t - 4{,}9 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$$

– Cuerpo 2: al desaparecer la tensión, la fuerza resultante coincide con la fuerza de rozamiento, y, por tanto, realiza un movimiento uniformemente acelerado con una velocidad inicial de 1,4 m/s y cuya aceleración vale:

$$-F_{R,\,2} = m_2 \cdot a'_2 \rightarrow a'_2 = -\mu \cdot g = -0{,}2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = -1{,}96 \text{ m/s}^2$$

El cuerpo 2 se detiene cuando $v_2 = 0$; luego:

$$v_2 = v_0 + a_2 \cdot t \rightarrow t = \frac{v_2 - v_0}{a_2} = \frac{-7 \text{ m/s}}{-1{,}96 \text{ m/s}^2} = 3{,}57 \text{ s}$$

Y recorre hasta detenerse:

$$s_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 7 \text{ m/s} \cdot 3{,}57 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 1{,}96 \text{ m/s}^2 \cdot (3{,}57 \text{ s})^2 = 37{,}48 \text{ m}$$

En ese tiempo, el cuerpo 1 ha descendido:

$$\Delta y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \rightarrow \Delta y = 7 \text{ m/s} \cdot 3{,}57 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (3{,}57 \text{ s})^2 = -37{,}5 \text{ m}$$

30 En el cálculo de la velocidad máxima con la que un vehículo puede tomar una curva, plana o peraltada, las expresiones obtenidas no dependen de la masa. Sin embargo, sabemos que un vehículo alto y pesado debe hacerlo a menor velocidad que otro más bajo y ligero. ¿Es esto una contradicción? (Repasa el concepto de momento, en el problema 1 de la estrategia de resolución de problemas de esta unidad).

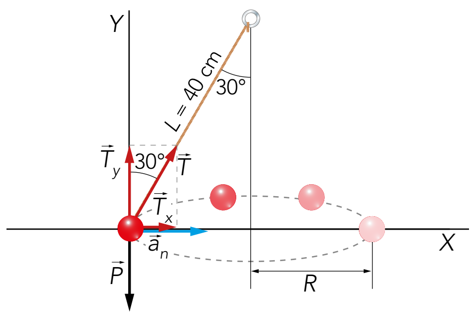
En el cálculo de la velocidad se considera una masa puntual. Así, las condiciones de equilibrio se reducen a que la resultante de las fuerzas sea cero. Al tener en cuenta la forma del cuerpo, debemos estudiar que los momentos estén en equilibrio también. Por tanto, como $\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F}$, el efecto del momento depende del brazo de la fuerza, siendo mayor cuanto mayor sea este. Por tanto, los vehículos altos han de tener el centro de masas lo más cercano posible al suelo, para no volcar en las curvas.

31 Una pequeña bola de 250 g, colgada de un alambre recto de masa despreciable y de 40 cm de longitud, describe circunferencias en un plano horizontal. El alambre forma un ángulo constante de 30° con la vertical. Calcula:

a) La tensión del alambre.

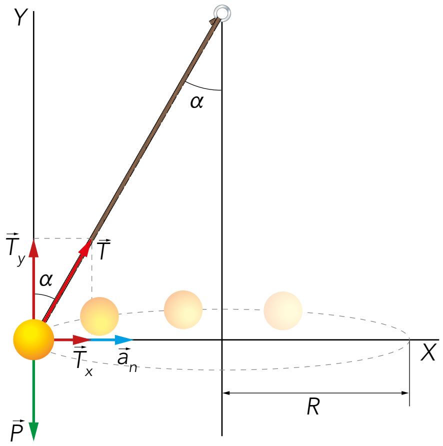
b) El radio de la trayectoria descrita por la bola.

c) La velocidad con la que la describe.



Las fuerzas que actúan sobre la bola son el peso y la tensión del alambre, y como describe un MCU en un plano horizontal, tenemos, de acuerdo con la siguiente figura:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_n$$



Al descomponer las fuerzas en los ejes *X* e *Y*, tenemos:

Eje *X*: $T_x = m \cdot a_n \rightarrow T \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot \dfrac{v^2}{R}$ [1]

Eje *Y*: $T_y - P = 0 \rightarrow T \cdot \cos\alpha = m \cdot g$ [2]

a) La tensión del alambre valdrá:

$$T = \frac{m \cdot g}{\cos\alpha} = \frac{0{,}25 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{0{,}866} = 2{,}8\ \text{N}$$

b) Si *L* es la longitud del alambre, el radio de la circunferencia descrita por la bola es:

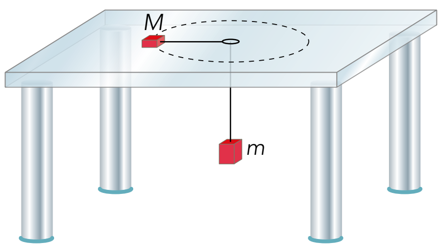
$$R = L \cdot \text{sen}\,\alpha = 0{,}4\ \text{m} \cdot 0{,}5 = 0{,}2\ \text{m}$$

c) Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones [1] y [2], obtenemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{g \cdot R} \rightarrow v = \sqrt{g \cdot R \cdot \text{tg}\,\alpha} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}58} = 1{,}1\ \text{m/s}$$

Página 269

32 **Un cuerpo *M*, de 250 g, describe un MCU de 30 cm de radio sobre una mesa horizontal, con un período *T* = 0,25 s. Se encuentra unido a otro cuerpo, de masa *m*, que cuelga verticalmente de una cuerda que pasa por un orificio de la mesa, según se indica en la figura.**



Calcula:

a) La aceleración del movimiento.

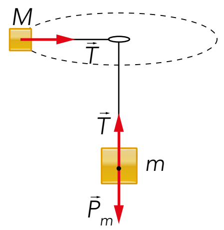
b) La tensión que soporta la cuerda.

c) El valor de *m* para que se obtengan los valores del enunciado.

La velocidad angular del cuerpo *M* es:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{0{,}25\ \text{s}} = 25{,}13\ \text{rad/s}$$

Y el esquema que representa las fuerzas en este movimiento es:



a) La aceleración normal podemos calcularla como:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (25{,}13 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}3 \text{ m} = 189{,}5 \text{ m/s}^2$$

b) La fuerza en el eje *X* será igual a la masa por la aceleración normal. Así, la tensión será:

$$T = M \cdot a_n = 0{,}25 \text{ kg} \cdot 189{,}5 \text{ m/s}^2 = 47{,}4 \text{ N}$$

c) Para que se den las condiciones del enunciado, el cuerpo *m* debe estar en equilibrio con el cuerpo *M*, es decir:

$$T - P_m = 0 \rightarrow T - m \cdot g = 0$$

$$m = \frac{T}{g} = \frac{47{,}4 \text{ N}}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 4{,}8 \text{ kg}$$

33 **Al colocar un bloque de 2 kg suspendido de un resorte se produce un alargamiento de 4 cm. Si, a continuación, se le estira otros 5 cm y se suelta dejándolo oscilar libremente, el bloque describe un MAS. Calcula:**

a) La constante recuperadora del muelle.

b) La frecuencia de las oscilaciones.

c) La fuerza máxima que actúa sobre el bloque.

d) La ecuación del movimiento.

a) Si el cuerpo está en equilibrio, el peso de la masa será igual a la fuerza elástica, por tanto:

$$P - F_e = 0 \rightarrow F_e = m \cdot g = 2 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 19{,}62 \text{ N}$$

Conocida la fuerza elástica, calculamos la constante del muelle:

$$F_e = k \cdot x \rightarrow k = \frac{F_e}{x} = \frac{19{,}62 \text{ N}}{0{,}04 \text{ m}} = 490{,}5 \text{ N/m}$$

b) Conocidas *k* y *m*, determinamos la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{490{,}5 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = 15{,}66 \text{ rad/s}$$

Así, la frecuencia de la oscilación será:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{15{,}66 \text{ rad/s}}{2 \cdot \pi \text{ rad}} = 2{,}49 \text{ Hz}$$

c) La fuerza será máxima cuando su aceleración sea máxima, esto es:

$$F_{máx} = m \cdot a_{máx} = m \cdot \omega^2 \cdot A = 2 \text{ kg} \cdot (15{,}66 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}05 \text{ m} = 24{,}52 \text{ N}$$

d) La ecuación del movimiento será:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$y = 0{,}05 \cdot \cos(15{,}66 \cdot t) \text{ m}$$

34 **Un péndulo simple está formado por una cuerda de 6,2 m y una masa puntual de 2 kg que separamos 5° de la vertical y dejamos oscilar libremente. Calcula:**

a) El período y la amplitud de las oscilaciones.

b) La tensión de la cuerda y la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo cuando la elongación es máxima.

c) ¿Qué valores se obtendrían en la Luna, si la aceleración de la gravedad en su superficie es la sexta parte que en la de la Tierra?

La frecuencia angular del péndulo es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{6{,}2\ \text{m}}} = 1{,}26\ \text{rad/s}$$

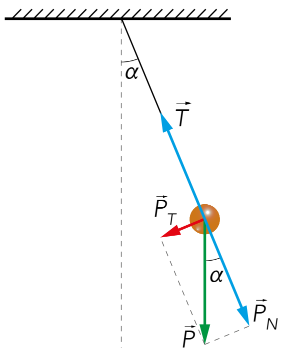
a) Conocida la frecuencia angular, determinamos el período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{1{,}26\ \text{rad/s}} = 5\ \text{s}$$

Y la amplitud del movimiento será:

$$A = l \cdot \text{sen}\,\alpha = 6{,}2\ \text{m} \cdot \text{sen}\,5° = 0{,}54\ \text{m}$$

b) El esquema de las fuerzas que actúan sobre la masa en el péndulo es:



La componente normal del peso será igual a la tensión de la cuerda:

$$T = P_n = P \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha = 2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 5° = 19{,}5\ \text{N}$$

Cuando la elongación es máxima, la fuerza resultante será igual a la componente tangencial del peso:

$$F_T = P_t = P \cdot \text{sen}\,\alpha = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha = 2\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \text{sen}\,5° = 1{,}7\ \text{N}$$

c) Si la gravedad en la Luna es una sexta parte a la que hay en la Tierra, podemos calcular el valor de su frecuencia angular como:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g/6}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2/6}{6{,}2\ \text{m}}} = 0{,}51\ \text{rad/s}$$

El período, por tanto, será:

$$T_L = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{0{,}51\ \text{rad/s}} = 12{,}2\ \text{s}$$

La amplitud es la misma que en la Tierra.

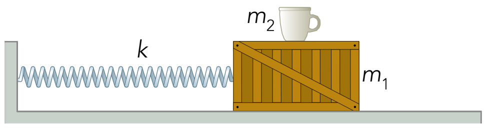
El valor de la tensión de la cuerda será una sexta parte a la que hay en la Tierra:

$$T_L = \frac{T_T}{6} = \frac{19{,}5\ \text{N}}{6} = 3{,}25\ \text{N}$$

Y la fuerza resultante, al igual que la tensión, será un sexto del valor en la Tierra:

$$F_{RL} = \frac{F_{RT}}{6} = \frac{1{,}7\ \text{N}}{6} = 0{,}28\ \text{N}$$

35 El coeficiente de rozamiento estático entre el soporte de la figura, de masa m_1 = 2 kg, y la taza, de masa m_2 = 100 g, es 0,3. Entre m_1 y la superficie sobre la que desliza no hay rozamiento. Si la constante elástica del muelle es k = 75 N/m, calcula la máxima amplitud que se puede dar al MAS del sistema para que no caiga la taza.



Como la taza se encuentra en un sistema de referencia no inercial, aparecen fuerzas ficticias (inerciales). La condición de no deslizamiento es que el módulo de la fuerza ficticia sea menor que el de la fuerza de rozamiento, y en el caso límite, que sean iguales:

$$F_{in} \leq F_R \xrightarrow{\text{límite}} F_{in} = F_R$$

Por tanto, en este caso límite, diremos que:

$$F_{in} = F_R \rightarrow m_2 \cdot a = \mu \cdot m_2 \cdot g \rightarrow a = \mu \cdot g$$

Además, en un MAS, sabemos que:

$$|a_{máx}| = \omega^2 \cdot A \rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m_1 + m_2}$$

Así, igualando las dos expresiones:

$$\omega^2 \cdot A = \mu \cdot g \rightarrow A_{máx} = \frac{\mu \cdot g}{\omega^2} = \frac{\mu \cdot g}{K} \cdot (m_1 + m_2)$$

Por tanto, el valor de la amplitud máxima es:

$$A_{máx} = \frac{0{,}3 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{75\ \text{N/m}} \cdot (2 + 0{,}1)\ \text{kg} = 0{,}082\ \text{m} = 8{,}2\ \text{cm}$$