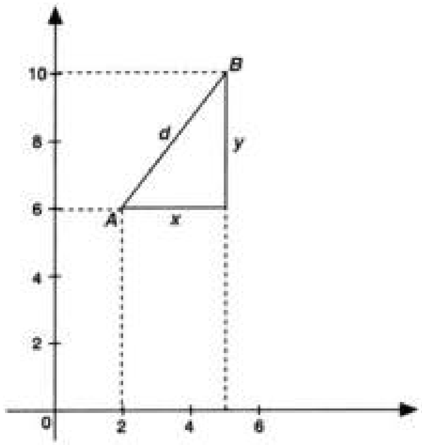
UNIDAD 9: ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO

CUESTIONES INICIALES-ACTIVIDADES PÁG. 205

1. ¿Qué distancia hay desde el punto de coordenadas cartesianas (2 m, 6 m) hasta el punto de coordenadas (5 m, 10 m)?



Aplicando el teorema de Pitágoras a las distancias indicada en la figura adjunta, se tiene:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (10 - 6)^2} = 5\,\text{m}$$

2. Un vehículo está a las 9 de la mañana en el km 10 de una carretera. Si a las 11 de la mañana está en el km 150, ¿cuál ha sido su velocidad media? Expresa esa cantidad en unidades del SI.

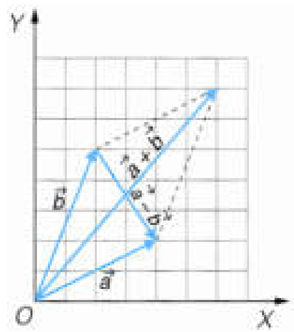
La velocidad media es: $v = \dfrac{\Delta e}{\Delta t} = \dfrac{150\,\text{km} - 10\,\text{km}}{2\,\text{h}} = 70\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 70\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \dfrac{1000\,\text{m}}{1\text{km}}\,\dfrac{1\text{h}}{3600\,\text{s}} = 19{,}4\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

3. ¿Tiene aceleración el extremo de la manecilla segundero de un reloj?

En cada instante se modifica la dirección del vector velocidad, por lo que existe una aceleración responsable de esa variación. Esa aceleración se denomina aceleración normal y va dirigida hacia el centro de la trayectoria.

ACTIVIDADES PROPUESTAS-PÁG. 208

1. Calcula la suma y la diferencia de los vectores: $\vec{a} = 4\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j}$ **y** $\vec{b} = 2\cdot\vec{i} + 5\cdot\vec{j}$**. Representa gráficamente esas operaciones.**



El vector suma tiene por componentes la suma de las componentes correspondientes.
$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} = (4 + 2)\cdot\vec{i} + (2 + 5)\cdot\vec{j} = 6\cdot\vec{i} + 7\cdot\vec{j}$

El vector diferencia se determina restando a las componentes de un vector las del otro.
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (4 - 2)\cdot\vec{i} + (2 - 5)\cdot\vec{j} = 2\cdot\vec{i} - 3\cdot\vec{j}$

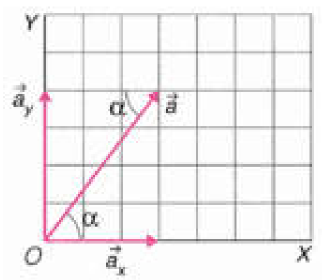
ACTIVIDADES PROPUESTAS-PÁG. 215

2. Indica si existe aceleración y de qué tipo en los siguientes movimientos: una bola que rueda por un carril, un objeto que cae hacia la Tierra, un ascensor, los caballitos de un tiovivo, el vuelo de un ave.

El movimiento de un ascensor no tiene aceleración en la mayor parte de su recorrido. Una bola que rueda por un carril y un objeto que cae hacia la Tierra tienen aceleración tangencial. Los caballitos de un tiovivo tienen aceleración normal y el vuelo de un ave tiene aceleración tangencial y normal.

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 220

1. Expresa en forma vectorial un vector que tiene por origen el origen de coordenadas y cuyas componentes son a_x= 3 unidades y a_y = 4 unidades. Calcula su módulo y el ángulo que forma con el eje de abscisas.



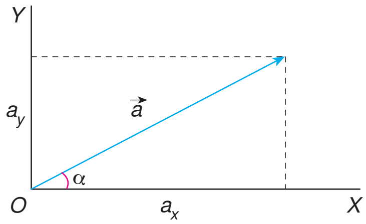
La expresión vectorial del vector es: $\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} = 3\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j}$ unidades

El módulo es: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ unidades

Cálculo del ángulo que forma con el eje X:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{4\,\text{unidades}}{3\,\text{unidades}} \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\ \frac{4}{3} = 53^\circ\ 7'\ 48''$$

2. Determina las componentes cartesianas de un vector que tiene su origen en el origen en el origen de coordenadas, 4 unidades de módulo y forma un ángulo de 60º con el eje de abscisas.



Las componentes del vector son:

$a_x = a \cdot \cos\alpha = 4$ unidades $\cdot \cos 60^\circ = 2$ unidades

$a_y = a \cdot \text{sen}\,\alpha = 4$ unidades $\cdot\ \text{sen}\ 60^\circ = 3{,}46$ unidades

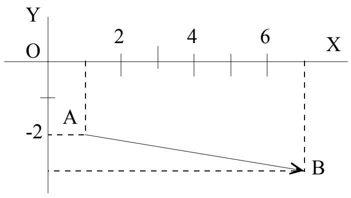
La expresión vectorial del vector es:

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + 3{,}46 \cdot \vec{j}$ unidades

3. Un vector tiene por origen el punto A (1, - 2) y por extremo el punto B (7, - 3). Determina sus componentes cartesianas, su módulo, el ángulo que forma con el eje de abscisas.

Para determinar sus componentes cartesianas se resta a las coordenadas del extremo las del origen.

$a_x = 7 - 1 = 6$ unidades ; $a_y = -3 - (-2) = -1$ unidades



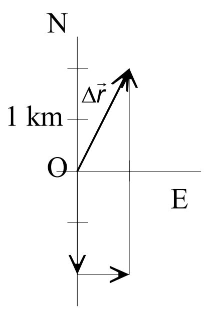
Por tanto: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} = 6 \cdot \vec{i} - \vec{j}$

Su módulo es: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{6^2 + (-1)^2} = 6{,}1$ unidades

El ángulo que forma con el eje de abscisas es:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-1}{6} \Rightarrow \alpha = -9{,}5^\circ$$

4. Una persona durante un paseo durante un paseo recorre 2 km hacia el sur, 1 km hacia el este y 4 km hacia el norte. Calcula la distancia recorrida y el módulo del vector desplazamiento.



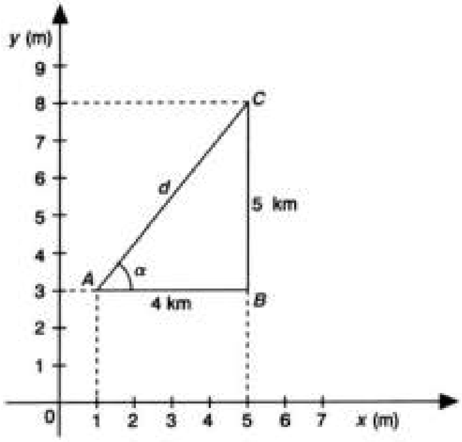
La distancia recorrida es: 2 km + 1 km + 4 km = 7 km

Si se hace coincidir el origen con la posición inicial de la persona, la posición final tiene por coordenadas: (1 km, 2 km).

El vector desplazamiento es: $\Delta\vec{r} = (1 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})\text{km}$

Y su módulo: $\Delta r = \sqrt{(1\text{km})^2 + (2\text{km})^2} = 2{,}24\text{km}$

5. Una persona está situada en el punto de coordenadas (1,3), si camina 4 km en el sentido de la parte positiva del eje de las X y después, 5 km en el sentido de las Y positivas ¿a qué punto llega? Si ese recorrido lo hace por el camino más corto, indica los km que recorre y el rumbo que seguirá.



El explorador llega al punto C de coordenadas:
x = 1 km + 4 km = 5 km; y = 3 km + 5 km = 8 km

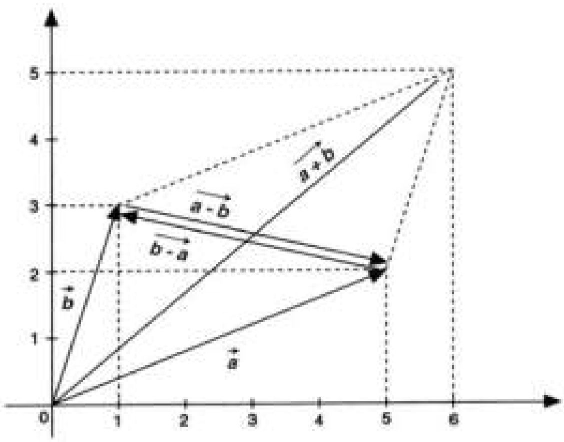
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(4\,km)^2 + (5\,km)^2} = 6{,}4\,km$$

El rumbo queda determinado por el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A y B y el eje de las abscisas:

$$tg\alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \alpha = 51^\circ\ 20'\ 25''$$

6. Dados los vectores: $\vec{a} = 5\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j}$ y $\vec{b} = \vec{i} + 3\cdot\vec{j}$ **represéntalos, en un sistema de ejes de coordenadas. Calcula los vectores:** $\vec{a}+\vec{b};\vec{a}-\vec{b};\vec{b}-\vec{a}$ **y comprueba las operaciones gráficamente.**

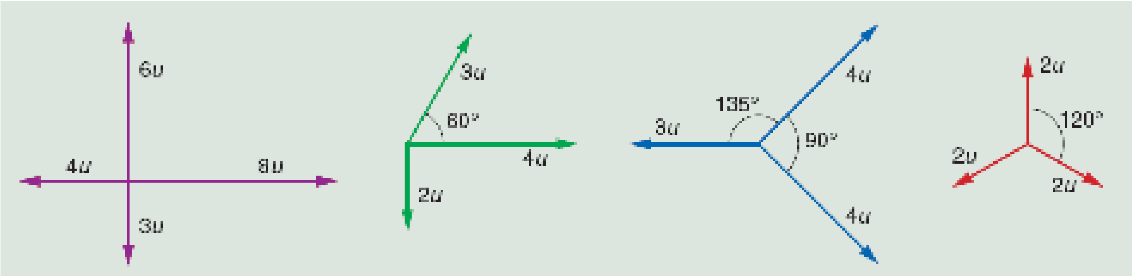


$$\vec{a}+\vec{b} = (5\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j}) + (\vec{i} + 3\cdot\vec{j}) = 6\cdot\vec{i} + 5\cdot\vec{j}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (5\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j}) - (\vec{i} + 3\cdot\vec{j}) = 4\cdot\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{b}-\vec{a} = (\vec{i} + 3\cdot\vec{j}) - (5\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j}) = -4\cdot\vec{i} + \vec{j}$$

7. Suma los vectores de las figuras:

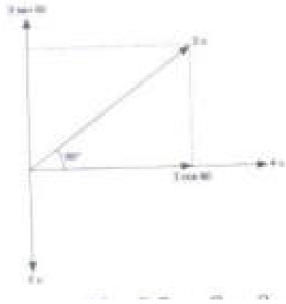


a) Sumando las componentes:

S_x = 8 - 4 = 4 unidades; S_y = 6 - 3 = 3 u ⇒ $\vec{suma} = 4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$ unidades

De módulo: $|\vec{S}| = \sqrt{(4\,u)^2 + (3\,u)^2} = 5\,u$

Que forma un ángulo con el eje de las abscisas: $\varphi = \text{arc tg}\,\frac{S_y}{S_x} = \text{arc tg}\,\frac{3\,u}{4\,u} = 36°\,52'\,12''$



b) Descomponiendo el vector de módulo 3 u en componentes y sumando.

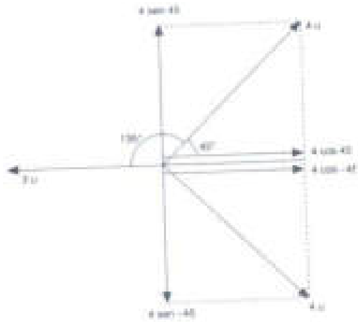
S_x = 4 + 3 · cos 60° = 5,5 u; S_y = 3 · sen 60 - 2 = 0,6 u

$\vec{suma} = 5{,}5 \cdot \vec{i} + 0{,}6 \cdot \vec{j}\,u$

De módulo: $|\vec{S}| = \sqrt{(5{,}5\,u)^2 + (0{,}6\,u)^2} = 5{,}53\,u$

Que forma un ángulo con el eje de las abscisas:

$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{S_y}{S_x} = \text{arc tg}\,\frac{0{,}6\,u}{5{,}5\,u} = 6°\,13'\,33''$



c) Descomponiendo los vectores de módulo igual a 4 unidades en componentes y sumando.

S_x = 4 · cos 45º + 4 · cos (-45º)– 3 = 2,7 u

S_y = 4 · sen 45º + 4 · sen (-45º) = 0

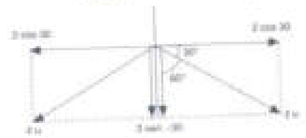
$\vec{suma} = 2{,}7 \cdot \vec{i}\,u$

De modulo: $|\vec{S}| = 2{,}7\,u$, Situado sobre el eje de abscisas

d) Descomponiendo en componentes y sumando:

S_x = 2 · cos 30º + 2 · cos (-30º) = 0

S_y = 2 + 2 · sen 210º + 2 · sen (-30º) = 0



La suma de los tres vectores es igual a cero.

8. Las ecuaciones paramétricas para el movimiento de una partícula son: x = t + 1; y = t², escribe la expresión del vector de posición y determina la ecuación de la trayectoria.

El vector de posición en cualquier instante es: $\vec{r} = (t+1) \cdot \vec{i} + t^2 \cdot \vec{j}$

La ecuación de la trayectoria se determina eliminando el tiempo en las ecuaciones en paramétricas:

$\left.\begin{array}{r} x = t + 1 \\ y = t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = (x - 1)^2$, que es la ecuación de una parábola.

9. Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula son: $x = 4 - t$; $y = 2 \cdot t^2$, en unidades del SI. Determina la posición y los vectores de posición de la partícula en los instantes t = 0 s y t = 5 s. Calcula el vector desplazamiento entre los instantes dados. Indica la distancia entre las dos posiciones consideradas de la partícula.

a) Para determinar las posiciones de la partícula, basta sustituir el tiempo por sus valores en las ecuaciones en paramétricas.
$x_0 = 4 - 0 = 4$ m, $y_0 = 2 \cdot 0 = 0$ m $\Rightarrow P_0$ (4 m, 0 m)
$x_5 = 4 - 5 = - 1$ m, $y_0 = 2 \cdot 5^2 = 50$ m $\Rightarrow P_5$ (- 1 m, 50 m)

b) El vector de posición en cualquier instante es: $\vec{r}_t = (4 - t) \cdot \vec{i} + 2 \cdot t^2 \cdot \vec{j}$
Los vectores de posición se determinan sustituyendo el tiempo por su valor en los instantes considerados.
En el instante inicial: $\vec{r}_0 = 4 \cdot \vec{i}$ m y en el instante final: $\vec{r}_5 = \left(- \vec{i} + 50 \cdot \vec{j}\right)\mathrm{m}$

El vector desplazamiento es: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_5 - \vec{r}_0 = \left(- 5 \cdot \vec{i} + 50 \cdot \vec{j}\right)$ m

La distancia entre las posiciones consideradas es igual al módulo del vector desplazamiento.
$\Delta r = |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(-5\,\mathrm{m})^2 + (50\,\mathrm{m})^2} = 50{,}25\,\mathrm{m}$

10. El vector de posición de una partícula queda determinado por la ecuación: $\vec{r}_t = 3 \cdot t \cdot \vec{i} + (2 \cdot t^2 + 3) \cdot \vec{j}$ en unidades del SI. Expresa el vector de posición en los instantes 0 y 5 segundos. Calcula el vector desplazamiento y su módulo entre los instantes anteriores. Determina la ecuación de la trayectoria.

a) Sustituyendo el valor del tiempo en la ecuación del vector de posición tenemos:
$\vec{r}_0 = 3 \cdot 0 \cdot \vec{i} + (2 \cdot 0 + 3) \cdot \vec{j} = 3 \cdot \vec{j}$ m ; $\vec{r}_5 = 3 \cdot 5\ \vec{i} + (2 \cdot 5^2 + 3) \cdot \vec{j} = \left[15 \cdot \vec{i} + 53 \cdot \vec{j}\right]$ m

c) Para calcular el vector desplazamiento basta restar los correspondientes vectores de posición.
$\Delta\vec{r} = \vec{r}_5 - \vec{r}_0 = \left[15 \cdot \vec{i} + 50 \cdot \vec{j}\right]$ m y su módulo es: $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(15\,\mathrm{m})^2 + (50\,\mathrm{m})^2} = 52{,}2\,\mathrm{m}$

b) Combinando las ecuaciones en paramétricas para eliminar el tiempo:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 \cdot t \\ y = 2 \cdot t^2 + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{x}{3}$$

Y sustituyendo: $y = 2\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 3 = 2\frac{x^2}{9} + 3 \Rightarrow y = \frac{2}{9}x^2 + 3$

11. El movimiento de una partícula, en unidades del SI, queda definido por la ecuación: $\vec{r}_t = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j}$. Determina la ecuación de la trayectoria. Calcula el vector desplazamiento y su módulo entre los instantes t = 0 s y t = 4 s. ¿Coincide el módulo de ese vector con la distancia recorrida?

a) Expresando las ecuaciones en paramétricas y eliminando el tiempo:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 \\ y = 2 \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3$$ que es la ecuación de una línea recta.

b) Para calcular el vector desplazamiento basta sustituir los correspondientes tiempos en la ecuación general del vector de posición.

$\vec{r}_0 = 3 \cdot \vec{i}$ m ; $\vec{r}_4 = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot 4 \cdot \vec{j} = \left[3 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}\right]$ m

Restando los vectores anteriores se obtiene el vector desplazamiento. $\Delta\vec{r} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0 = 8 \cdot \vec{j}$ m

Y su módulo: $\Delta r = 8$ m

La distancia recorrida coincide con el módulo del vector desplazamiento porque la trayectoria es una línea recta y no se producen cambios de sentido.

12. ¿Cuál es la ecuación del movimiento que corresponde a un objeto que se mueve con velocidad constante a lo largo del eje X? ¿Y si lo hace por el eje Y?

Si el objeto se mueve a lo largo del eje X la ecuación de su trayectoria es y = 0, si lo hace a lo largo del eje Y es x = 0.

13. Un automóvil tarda tres horas en realizar el viaje entre dos ciudades que distan 150 km y dos horas en regresar. Calcula el vector velocidad media en la ida y a la vuelta y para todo el recorrido y la rapidez media.

Supóngase que la trayectoria es una línea recta. Se elige un sistema de referencia con el observador situado en la ciudad A y el eje X coincidente con la recta que une las dos ciudades.

$\vec{v}_{m\,ir} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{150 \cdot \vec{i}\ \text{km}}{3\,\text{h}} = 50 \cdot \vec{i}$ km/h ; $\vec{v}_{m\,regresar} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{-150 \cdot \vec{i}\ \text{km}}{2\,\text{h}} = -75 \cdot \vec{i}$ km/h

En todo el recorrido el vector desplazamiento es cero por lo que: $\vec{v}_{m\,total} = 0\,\text{km/h}$

Aplicando la definición de rapidez: $\text{rapidez} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo empleado}} = \frac{150\,\text{km} + 150\,\text{km}}{3\,\text{h} + 2\,\text{h}} = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

ACTIVIDADES FINALES-PÁG. 221

14. La ecuación del movimiento de una partícula es: $\vec{r}_t = 3 \cdot t^2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot t \cdot \vec{j}$, en unidades del SI. Determina el vector velocidad media y su módulo entre los instantes t = 2s y t = 5 s.

Los vectores de posición en esos instantes son:

$\vec{r}_2 = 3 \cdot 2^2\, \vec{i} + 2 \cdot 2\, \vec{j} = \left(12 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}\right)$ m ; $\vec{r}_5 = 3 \cdot 5^2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot 5 \cdot \vec{j} = (75 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j})$ m

La velocidad media entre los instantes pedidos es:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_5 - \vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\left(63 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j}\right)\text{m}}{3\text{ s}} = (21 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y su módulo: $|\vec{v}_m| = \sqrt{(21\,\text{m/s})^2 + (2\,\text{m/s})^2} = 21{,}1\,\text{m/s}$

15. El movimiento de una partícula, en una dimensión y unidades SI, lo determina la ecuación: $x = 3 + 2 \cdot t - t^2$. Calcula la posición y los vectores de posición en los instantes: 0, 1, 2 segundos. Determina el vector velocidad media en los intervalos 0 s - 1 s; 1 s - 2 s y 0 s - 2s.

Sustituyendo el tiempo en la ecuación de la posición se obtiene las sucesivas posiciones.
$x_0 = 3 + 2 \cdot 0 - 0 = 3$ m; $x_1 = 3 + 2 \cdot 1 - 1^2 = 4$ m; $x_2 = 3 + 2 \cdot 2 - 2^2 = 3$ m

Como el movimiento se realiza en línea recta los vectores de posición se calculan a partir de las posiciones multiplicándolas por un vector unitario en la dirección del eje X.
$\vec{r}_0 = 3 \cdot \vec{i}\ \text{m}; \vec{r}_1 = 4 \cdot \vec{i}\ \text{m}; \vec{r}_2 = 3 \cdot \vec{i}\ \text{m}$
Los vectores velocidad media pedidos son:
$$\vec{v}_{0\to1} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{\Delta t} = \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ \vec{v}_{1\to2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = -\ \vec{i}\ \frac{\text{m}}{\text{s}};\ \vec{v}_{0\to2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{\Delta t} = 0\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
El móvil va primero en un sentido y luego regresa por el mismo camino.

16. Una carrera ciclista consta de tres etapas. La primera etapa recorre una distancia 220 km y se corre a una velocidad media de 40 km/h, la segunda tarda en recorrerse 3 h y 25 min a una velocidad media de 36 km/h y la tercera es de 20 km y se corre a una velocidad de 30 km/h. Determina: la distancia que recorren los ciclistas, el tiempo total empleado y la velocidad media de todo el recorrido.

Aplicando a cada una de las etapas la ecuación de la velocidad media.
Primera etapa: $t = \frac{d}{v} = \frac{220\ \text{km}}{40\ \text{km/h}} = 5{,}5\ \text{h} = 5\ \text{h}\ 30\ \text{min}$
Segunda etapa: $d = v \cdot t = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \left(3\ \text{h} + 25\ \text{min}\ \frac{\text{h}}{60\ \text{min}}\right) = 123\ \text{km}$
Tercera etapa: $t = \frac{d}{v} = \frac{20\ \text{km}}{30\ \text{km/h}} = 0{,}67\ \text{h} = 40\ \text{min}$
La distancia total recorrida es: d = 220 km + 123 km + 20 km = 363 km
El tiempo empleado es: t = 5 h 30 min + 3 h 25 min + 40 min = 9 h 35 min
La velocidad media es: $t = \frac{d}{v} = \frac{363\ \text{km}}{9\ \text{h}\ 35\ \text{min}} = \frac{363\ \text{km}}{9{,}58\ \text{h}} = 37{,}9\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

17. Una persona sube una cuesta con una velocidad de 2 km/h y la baja con una velocidad de 6 km/h. Calcula la velocidad media para todo el recorrido.

Sea d la longitud de la cuesta, t_s el tiempo que tarda en subir y t_b el que tarda en bajar.
$$\text{velocidad media} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{2\,d}{t_s + t_b} = \frac{2\,d}{\frac{d}{2\ \text{km/h}} + \frac{d}{6\ \text{km/h}}} = \frac{2\,d}{\frac{4\,d}{6\ \text{km/h}}} = 3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

18. La posición de una partícula se determina con la ecuación: $x = t^2 + 5 \cdot t + 3$ en unidades del SI. Calcula la velocidad media en los intervalos: 5 s y 6 s; 5 s y 5,5 s; 5 s y 5,1 s; 5 s y 5,01 s; 5 s y 5,0001 s.

Determinando la posición y aplicando la definición de velocidad media, se tiene:

a) En el intervalo 5 s a 6 s: $x_6 = 6^2 + 5 \cdot 6 + 3 = 69$ m; $x_5 = 5^2 + 5 \cdot 5 + 3 = 53$ m

$\Delta x = x_6 - x_5 = 69 \text{ m} - 53 \text{ m} = 16 \text{ m}$; $v_{5\to6} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{16\,\text{m}}{1\,\text{s}} = 16\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

b) En el intervalo 5 s a 5,5 s: $x_{5,5} = 5{,}5^2 + 5 \cdot 5{,}5 + 3 = 60{,}75$ m

$\Delta x = x_{5,5} - x_5 = 60{,}75 \text{ m} - 53 \text{ m} = 7{,}75 \text{ m}$; $v_{5\to5,5} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{7{,}75\,\text{m}}{0{,}5\,\text{s}} = 15{,}5\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

c) En el intervalo 5 s a 5,1 s: $x_{5,1} = 5{,}1^2 + 5 \cdot 5{,}1 + 3 = 54{,}51$ m

$\Delta x = x_{5,1} - x_5 = 54{,}51 \text{ m} - 53 \text{ m} = 1{,}51 \text{ m}$; $v_{5\to5,1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{1{,}51\,\text{m}}{0{,}1\,\text{s}} = 15{,}1\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

d) En el intervalo 5 s a 5,01 s: $x_{5,01} = 5{,}01^2 + 5 \cdot 5{,}01 + 3 = 53{,}1501$ m

$\Delta x = x_{5,01} - x_5 = 53{,}1501 \text{ m} - 53 \text{ m} = 0{,}1501 \text{ m}$; $v_{5\to5,01} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0{,}1501\,\text{m}}{0{,}01\,\text{s}} = 15{,}01\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

e) En el intervalo 5 s a 5,0001 s: $x_{5,0001} = 5{,}0001^2 + 5 \cdot 5{,}0001 + 3 = 53{,}0015$ m

$\Delta x = x_{5,0001} - x_5 = 53{,}0015 \text{ m} - 53 \text{ m} = 0{,}0015 \text{ m}$; $v_{5\to5,0001} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{0{,}0015\,\text{m}}{0{,}0001\,\text{s}} = 15\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

19. ¿Es posible que un automóvil que viaja por una carretera con curvas lleve siempre la misma velocidad?

En un movimiento curvilíneo siempre hay aceleración normal que modifica la dirección del vector velocidad. Luego, no es posible que el vector velocidad sea constante. Lo que si puede ser posible es que el módulo del vector velocidad sea constante.

20. ¿Qué representan las magnitudes aceleración tangencial y aceleración normal? ¿Cómo se calculan esas magnitudes? Pon ejemplos de movimientos en los que exista solamente aceleración tangencial, solamente aceleración normal y los dos tipos de aceleraciones.

La aceleración tangencial es la responsable de la variación del módulo del vector velocidad y habitualmente se conoce como aceleración. Siempre que se modifica el módulo del vector velocidad hay aceleración tangencial. Es un vector tangente a la trayectoria y sentido el del movimiento si aumenta la velocidad y el contrario, si la velocidad disminuye.

Su módulo se determina mediante la relación entre la variación del módulo del vector velocidad y el tiempo que tarda en producirse.

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La aceleración normal es la responsable del cambio de dirección del vector velocidad. Es un vector perpendicular a la trayectoria en cada punto y su sentido es hacia el centro de curvatura.

Su módulo, en un determinado instante, es igual a la relación entre el cuadrado módulo del vector velocidad y el radio de curvatura de la trayectoria.

$a_n = \frac{v^2}{R}$

Durante la caída de un objeto solamente hay aceleración tangencial. Aceleración normal es la que poseen los caballitos de las atracciones de un tiovivo. Los dos tipos de aceleraciones están presentes en el movimiento de un automóvil por una carretera.

21. La velocidad de un móvil, en unidades SI, respecto de un sistema de referencia queda determinada por la expresión: $\vec{v} = 6 \cdot t \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$. Determina el vector aceleración media y su módulo entre los instantes t = 2 s y t = 4 s.

Los valores de los respectivos vectores velocidad se determinan sustituyendo el tiempo en la ecuación del vector velocidad.

$\vec{v}_2 = (6 \cdot 2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})\,m/s = (12 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})\,m/s$; $\vec{v}_4 = (6 \cdot 4 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})\,m/s = (24 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j})\,m/s$

Aplicando la definición de aceleración media: $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_2}{\Delta t} = \frac{12 \cdot \vec{i}\ m/s}{2\,s} = 6 \cdot \vec{i}\ m/s^2$

Y su módulo: $a_m = |\vec{a}_m| = \sqrt{(6\,m/s^2)^2} = 6\,m/s^2$

22. Una partícula se mueve se mueve según la ecuación: x = 3· t^2 + 2 en unidades SI. Determina la expresión de la velocidad instantánea y su valor en el instante t = 2 s.

Para deducir la expresión de la velocidad instantánea se calcula la velocidad media entre dos instantes muy próximos en el tiempo: t y t +Δt.
$x\,(t + \Delta t) = 3 \cdot (t + \Delta t)^2 + 2 = 3 \cdot t^2 + 6 \cdot t \cdot \Delta t + 3 \cdot \Delta t^2 + 2$
$x\,(t) = 3 \cdot t^2 + 2$

La expresión del desplazamiento es : $\Delta x = x\,(t + \Delta t) - x\,(t) = 6 \cdot t \cdot \Delta t + 3 \cdot \Delta t^2$

Aplicando la definición de velocidad media: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 \cdot t \cdot \Delta t + 3 \cdot \Delta t^2}{\Delta t} = 6 \cdot t + 3 \cdot \Delta t$

Si los intervalos de tiempo son muy próximos, entonces Δt es muy pequeño (tiende a cero), por lo que la expresión de la velocidad instantánea es: v = 6 · t, en unidades del SI

Y sustituyendo el tiempo por el instante pedido: $v_{t=2s} = 6 \cdot 2 = 12$ m/s

23. Un automóvil alcanza una velocidad de 90 km/h a los 8 s de iniciado el movimiento, calcula su aceleración media. Si ahora reduce su velocidad hasta 54 km/h en 5 s, calcula su aceleración.

Las velocidades en unidades del SI son: 90 km/h = 25 m/s; 54 km/h = 15 m/s
Aplicando la definición de aceleración media, en ambos casos:

$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25\,m/s - 0\,m/s}{8\,s} = 3{,}1\,m/s^2$; $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{15\,m/s - 25\,m/s}{5\,s} = -2\,m/s^2$

En el segundo caso la aceleración es negativa porque el vehículo se frena.

24. Considerando a la órbita terrestre como una circunferencia de 150 millones de km de radio, determina la velocidad y la aceleración, en m/s^2, con que la Tierra se mueve alrededor del Sol.

La Tierra recorre la longitud de la circunferencia en un año, por lo que su velocidad es:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{1\,\text{año}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 150 \cdot 10^6\,\text{km}}{1\,\text{año}} \cdot \frac{1\,\text{año}}{365\,\text{días} \cdot 24\,\text{h/día}} = 107\;589\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Que expresada en unidades del SI: v = 107 589 km/h = 29 886 m/s

Como el módulo de la velocidad es constante, la aceleración tangencial es igual a cero. Solo existe aceleración normal que modifica a la dirección del vector velocidad en cada instante.

Su módulo es: $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(29\;886\,\text{m/s})^2}{150 \cdot 10^9\,\text{m}} = 6 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

25. Calcula la aceleración de un automóvil que toma una curva de 40 m de radio con una velocidad de 72 km/h.

Expresando la velocidad en unidades del SI: v = 72 km/h = 20 m/s
El vehículo está animado con una aceleración normal de módulo:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(20\,\text{m/s})^2}{40\,\text{m}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

26. Un automóvil arranca en un semáforo con una aceleración de 2 m/s^2. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar una velocidad de 54 km/h?

La velocidad en unidades del SI es: v = 54 km/h = 15 m/s

Aplicando la definición de aceleración media: $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t};\ 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{15\,\text{m/s} - 0\,\text{m/s}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 7{,}5\,\text{s};$

27. Un móvil recorre una vía circular de 400 m de radio y arrancando desde el reposo alcanza una velocidad de 72 km/h a los 50 s de iniciado el movimiento. Desde ese instante conserva la velocidad anterior constante. ¿Cuál es el valor de la aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento? Calcula la aceleración normal, la aceleración total en el instante 50 s.

La velocidad máxima del móvil, expresada en unidades del SI es: v = 72 km/h = 20 m/s

a) En la primera etapa la aceleración tangencial es un vector de dirección la de la tangente a la trayectoria en cada punto y sentido el del movimiento, su módulo es:

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20\,\text{m/s} - 0\,\text{m/s}}{50\,\text{s}} = 0{,}4\,\text{m/s}^2$$

En la segunda etapa la velocidad es constante y por ello la a_t es a igual a cero.

b) La aceleración normal es en cada instante un vector perpendicular a la trayectoria, es decir, de dirección la del radio y dirigido hacia el centro de la trayectoria y su módulo desde el final de la primera etapa permanece constante y su valor es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(20\,\text{m/s})^2}{400\,\text{m}} = 1\,\text{m/s}^2$$

La aceleración total es un vector que se obtiene sumando las componentes tangencial y normal y su módulo es:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(0{,}4\,\text{m/s})^2 + (1\,\text{m/s})^2} = 1{,}08\,\text{m/s}^2$$

28. El vector de posición de una partícula queda determinado por la expresión: $\vec{r} = (t^2 - 2\cdot t)\cdot i + 3\cdot t\cdot \vec{j}$ en unidades del SI. Determina el vector de posición y la distancia al origen en los instantes t = 1 s y t = 4 s. Calcula el vector desplazamiento y su módulo. La expresión de la velocidad media y su módulo entre los instantes anteriores. La expresión y los valores de la velocidad y aceleración instantáneas en el instante t = 4 s.

a) Para determinar los vectores de posición se sustituye el tiempo en la expresión del vector de posición.

$\vec{r}_1 = (1^2 - 2\cdot 1)\cdot \vec{i} + 3\cdot 1\cdot \vec{j} = (-\vec{i} + 3\cdot \vec{j})\,m;\ \vec{r}_4 = (4^2 - 2\cdot 4)\cdot \vec{i} + 3\cdot 4\cdot \vec{j} = (8\cdot \vec{i} + 12\cdot \vec{j})\,m$

Las distancias al origen en esos instantes son iguales a los módulos de los correspondientes vectores de posición.

$r_1 = \sqrt{(-1m)^2 + (3m)^2} = 3{,}2m;\ r_4 = \sqrt{(8m)^2 + (12m)^2} = 14{,}4m$

b) La expresión del vector desplazamiento es:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_4 - \vec{r}_1 = (8\cdot \vec{i} + 12\cdot \vec{j})m - (-\vec{i} + 3\cdot \vec{j})m; = (9\cdot \vec{i} + 9\cdot \vec{j})m$

Y su módulo: $\Delta r = \sqrt{(9m)^2 + (9m)^2} = 12{,}7m$

c) Aplicando la definición de velocidad media: $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{(9\cdot \vec{i} + 9\cdot \vec{j})m}{4s - 1s} = (3\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j})m/s$

Y su módulo: $v_m = \sqrt{(3m/s)^2 + (3m/s)^2} = 4{,}2m/s$

d) Para deducir la expresión del vector velocidad instantánea se calcula la velocidad media entre dos instantes muy próximos en el tiempo: t y t + Δt. Las expresiones de los vectores de posición en esos instantes son:

$$\vec{r}(t+\Delta t) = [(t+\Delta t)^2 - 2\cdot(t+\Delta t)]\cdot \vec{i} + 3\cdot(t+\Delta t)\cdot \vec{j} = (t^2 + 2\cdot t\cdot \Delta t + \Delta t^2 - 2\cdot t - 2\cdot \Delta t)\cdot \vec{i} + (3\cdot t + 3\cdot \Delta t)\cdot \vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 2\cdot t)\cdot \vec{i} + 3\cdot t\cdot \vec{j}$$

La expresión del vector desplazamiento es:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = (2\cdot t\cdot \Delta t + \Delta t^2 - 2\cdot \Delta t)\cdot \vec{i} + 3\cdot \Delta t\cdot \vec{j}$

Aplicando la definición de velocidad media:

$\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{2\cdot t\cdot \Delta t + \Delta t^2 - 2\cdot \Delta t)\cdot \vec{i} + 3\cdot \Delta t\cdot \vec{j}}{\Delta t} = (2\cdot t + \Delta t - 2)\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j}$

Si los intervalos de tiempo están muy próximos, entonces Δt es muy pequeño (tiende a cero), por lo que la expresión de la velocidad instantánea es:

$\vec{v} = (2\cdot t - 2)\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j}$ unidades del SI

Y sustituyendo el tiempo por el instante pedido, resulta que:

$\vec{v}_4 = (2\cdot 4 - 2)\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j} = (6\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j})m/s$

Y su módulo: $v_4 = \sqrt{(6m/s)^2 + (3m/s)^2} = 6{,}7m/s$

e) Para deducir la expresión del vector aceleración instantánea se calcula la aceleración media entre dos instantes de tiempo muy próximos: t y t +Δt. Las expresiones de los vectores velocidad en esos instantes son:

$\vec{v}(t+\Delta t) = [2\cdot(t+\Delta t) - 2)]\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j} = (2\cdot t + 2\cdot \Delta t - 2)\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j}$

$\vec{v} = (2\cdot t - 2)\cdot \vec{i} + 3\cdot \vec{j}$

La expresión de la variación del vector velocidad es: $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = 2\cdot \Delta t\cdot \vec{i}$

Aplicando la definición de aceleración media: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{2\cdot\Delta t\cdot\vec{i}}{\Delta t} = 2\cdot\vec{i}\ m/s^2$

En este caso la aceleración no es función del tiempo y su módulo es siempre:
a= 2 m/s^2.

29. La velocidad de un móvil en unidades del SI queda determinada por la expresión: $\vec{v} = (t^2 - 2)\cdot\vec{i}$. Calcula el vector aceleración media entre los instantes t = 1 s y t = 3 s. Determina la aceleración instantánea en el instante t = 3 s.

Para deducir la expresión del vector aceleración instantánea se calcula la aceleración media entre dos instantes de tiempo muy próximos: t y t +Δt. Las expresiones de los vectores velocidad en esos instantes son:

$\vec{v}(t+\Delta t) = [(t+\Delta t)^2 - 2)\cdot\vec{i} = (t^2 + 2\cdot t\cdot\Delta t + \Delta t^2 - 2)\cdot\vec{i}$

$\vec{v}(t) = (t^2 - 2)\cdot\vec{i}$

La expresión de la variación del vector velocidad es: $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = (2\cdot t\cdot\Delta t + \Delta t^2)\cdot\vec{i}$

Aplicando la definición de aceleración media: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(2\cdot t\cdot\Delta t + \Delta t^2)\cdot\vec{i}}{\Delta t} = (2\cdot t + \Delta t)\cdot\vec{i}$

Si los intervalos de tiempo están muy próximos, entonces Δt es muy pequeño (tiende a cero), por lo que la expresión de la aceleración instantánea es:

$\vec{a} = 2\cdot t\cdot\vec{i}$ en unidades del SI

Y sustituyendo el tiempo por el instante pedido, resulta que: $\vec{a} = 2\cdot 3\cdot\vec{i} = 6\cdot\vec{i}\ m/s^2$

INVESTIGA-PÁG. 222

1. Si en el enlace http://www.youtube.com buscas: moto gp vs formula 1, encontrarás videos en el que se comparan la velocidad y la aceleración que alcanzan de una moto GP y un automóvil de Fórmula 1 en el mismo circuito. ¿Qué aceleración desarrolla cada vehículo al pasar desde el reposo hasta alcanzar los 200 km/h?

La moto tarda 5,5 s en alcanzar los 200 km/h = 55,6 m/s y el automóvil lo hace en 3,5 s.

Las aceleraciones de los vehículos son:

$a_{moto} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{55{,}6\,m/s}{5{,}5\,s} = 10{,}11\,m/s^2$; $a_{coche} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{55{,}6\,m/s}{3{,}5\,s} = 15{,}89\,m/s^2$

2. En la enciclopedia wikipedia: http://es.wikipedia.org/, en la entrada <<Fuerza g>> encontrarás información sobre los efectos de la aceleración sobre las personas.

Aceleraciones muy elevadas producen sensación de miembros pesados, acumulación de la sangre en ciertas zonas del cuerpo, pérdida temporal de la visión e incluso pérdida de conocimiento y lesiones en las articulaciones y músculos.