Actividad de refuerzo pág. 208

En una carrera de Fórmula 1 retransmitida por televisión, la pantalla se encuentra dividida en dos cámaras: en una, situada en el vehículo que va quinta posición, se ve que el que va cuarto se sale por la izquierda de la escena, mientras los demás siguen delante. Y en otra cámara, vista desde el coche que va cuarto, se ve que los tres de delante se salen por la derecha de la imagen. Si sólo un coche abandona la carrera, ¿podrías decir qué ha pasado? ¿Cómo veríamos la escena desde una cámara fija situada 100 m detrás de la posición de los bólidos? ¿Por qué vemos tres movimientos tan diferentes?

Respuesta:

Por los datos que da el problema, debemos pensar que el coche que iba cuarto se ha salido en una curva a derechas, haciendo una trayectoria recta. Desde la cámara fija veríamos los coches alejándose de ella, pero el cuarto seguiría una línea recta mientras que todos los demás trazarían una curva hacia la derecha. Se ven tres escenas completamente diferentes porque usamos puntos de referencia distintos. En el primer caso vemos una escena desde el punto de vista de un móvil que describe el circuito; en el segundo, es un móvil con trayectoria rectilínea y en el tercero, un punto fijo. Estamos cambiando el sistema de referencia.

Actividad de ampliación pág. 212

Calcula el espacio recorrido y el desplazamiento realizado por un peatón que se mueve por un camino que bordea un terreno hexagonal de 100 m de lado, en cada vértice del hexágono.

Respuesta:

El hexágono se puede dividir en triángulos equiláteros que nos van a simplificar los cálculos.

Si salimos del vértice 1, los resultados serán:

Vértice 2:
Espacio recorrido 100 m
Desplazamiento 100 m

Vértice 3:
Espacio recorrido 200 m
Desplazamiento 173 m

Vértice 4:
Espacio recorrido 300 m
Desplazamiento 200 m

Vértice 5:
Espacio recorrido 400 m
Desplazamiento 173 m

Vértice 6:
Espacio recorrido 500 m
Desplazamiento 100 m

Vértice 1:
Espacio recorrido 600 m
Desplazamiento 0 m
El cálculo para el vértice 3 y 5 se hace triangulando.

$$a = 2\,b = 2\,l \text{ sen } 60 = 2 \cdot 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 173 \text{ m}$$

Actividad de refuerzo pág. 219

Especifica el signo que corresponde a los siguientes planteamientos:

a) **Un móvil que se lanza por una superficie horizontal con velocidad uniforme desde un punto que hace que el objeto pase por el origen al cabo de 2 s.**

b) **Un balón que se deja caer desde lo alto de una torre de 20 m de altura.**

c) **Un coche que frena en una recta hasta detenerse.**

d) **Un balón que se lanza hacia arriba desde el fondo de un pozo.**

a) Como el móvil pasa por el origen al cabo de un cierto tiempo, es porque la velocidad apunta desde el punto inicial hacia el origen. Por esa razón, el espacio inicial y la velocidad tienen signos contrarios. Cualquiera de las dos opciones es válida.

b) Como se deja caer desde lo alto de la torre, el espacio inicial es positivo. La aceleración es negativa, puesto que apunta hacia abajo.

c) No habla de posición inicial, por lo que suponemos que no hay. La velocidad será, por tanto, positiva (es la primera variable que tenemos para decidir el signo) y la aceleración será negativa, puesto que disminuye la velocidad.

d) Por lanzarse desde el fondo de un pozo, la posición inicial es negativa. La velocidad es positiva por ser hacia arriba y la aceleración, negativa por ir hacia abajo.

Actividad de ampliación pág. 220

Calcula la velocidad constante a la que se mueve un móvil que, partiendo del punto x_0 = –30 m, se encuentra después de 3 s en un punto situado a doble distancia del origen, pero en el lado contrario al que estaba inicialmente.

Por los datos iniciales del problema sabemos que $x_0 = -30$ m y $x = 60$ m, por lo que:

$x = x_0 + v\,t$; $60 \text{ m} = -30 \text{ m} + v \cdot 3 \text{ s}$

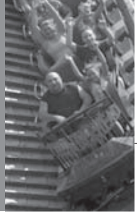
$v = 30 \text{ m s}^{-1}$

Actividad de refuerzo pág. 221

Un tren eléctrico de juguete se mueve a lo largo de un circuito circular de radio 1,2 m centrado en el origen, de forma que en un determinado momento se encuentra en un punto con una velocidad de 2 m/s^{-1} con la que se mueve durante 3 s. Bruscamente se detiene durante 5 s y posteriormente vuelve a ponerse en marcha con una velocidad de 3 $m\ s^{-1}$. Teniendo en cuenta que todo el movimiento utiliza 12 s, dibuja el diagrama o gráfica donde se represente su posición en el plano del suelo, otro que muestre la velocidad en cada momento y un tercero donde se ponga de manifiesto el espacio recorrido.

Solución:

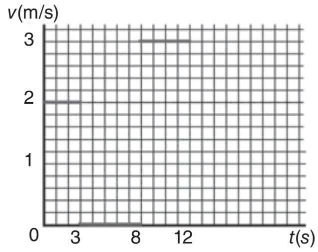
El primer diagrama representa una circunferencia de radio 3 m, centrada en el origen por la que se mueve el tren. Se puede especificar



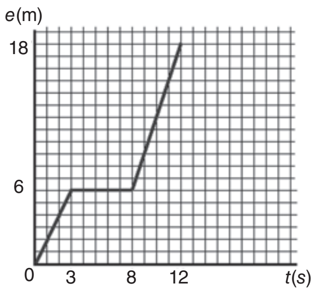
la posición en cada una de las posiciones mediante puntos (P_0, P_1 y P_2) que se encuentran:

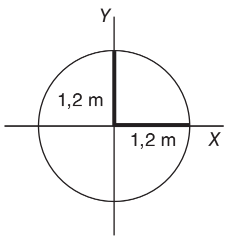
P_0: En cualquier punto de la circunferencia, puesto que el problema no da más datos. Nosotros lo pondremos en el punto de corte del eje *Ox* con la circunferencia.

P_1: El tren ha recorrido $e = v\ t = 2 \cdot 3 = 6$ m. Como la circunferencia tiene $2 \cdot \pi \cdot 3$ m = 18,85 m de longitud, a 6 m le corresponden unos 115°. En ese punto permanece parado durante 5 s. Luego se dirige, por la circunferencia, hasta P_2, que se encuentra 3 m s^{-1} · 4 s = 12 m más lejos, o sea, el equivalente a haber girado 344°. La velocidad se representa en la gráfica:



y el espacio recorrido:





Actividad de ampliación pág. 222

Teniendo en cuenta las ecuaciones $v = v_0 + a\ t$ y $x = x_0 + v_0\ t + 1/2\ a\ t^2$, halla una ecuación donde no aparezca la aceleración. Aplica la ecuación que has hallado al cálculo del espacio recorrido por un móvil que se detiene en 5 s cuando tenía una velocidad inicial de 20 m s^{-1}.

Solución:

Despejando a de la primera y sustituyendo en la segunda nos queda:

$$x = x_0 + v_0\ t + 1/2\ t^2\ (v - v_0)/t = x_0 + 1/2\ (v + v_0)\ t$$

Aplicándolo al problema:

$$\Delta x = x - x_0 = 1/2 \cdot (20 + 0) \cdot 5 = 50 \text{ m}$$

Actividad de ampliación pág. 223

Un móvil recorre 100 m cuando frena durante 3 s. Sabemos que la velocidad inicial es el doble de la final. ¿Cuál es la aceleración que lleva? ¿Cuáles son sus velocidades inicial y final? ¿Cuál sería su aceleración si se hubiera detenido en esos 100 m partiendo de la misma velocidad?

Las ecuaciones del movimiento son:

$$v = v_0 + a\ t = v_0/2 \Rightarrow v_0 = -2\ a\ t$$

$$x - x_0 = 1/2(v + v_0)\ t = 1/2(-a\ t - 2\ a\ t)\ t = 100 \text{ m}$$

$$100 \text{ m} = -3/2\ (a \cdot 3 \text{ s}) \cdot 3 \text{ s}$$

$$200/27 \text{ m s}^{-2} = -a$$

$$a = -7{,}4 \text{ m s}^{-2}$$

$$v_0 = -2 \cdot (-7{,}4 \text{ m s}^{-2}) \cdot 3 \text{ s} = 44 \text{ m s}^{-1}$$

$$v = v_0/2 = 22 \text{ m s}^{-1}$$

Si se hubiera detenido se cumpliría que

$$2\ a\ (x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

$$2 \cdot a \cdot 100 \text{ m} = 0^2 - (44 \text{ m s}^{-1})^2$$

$$a = -1\,936 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}/(2 \cdot 100 \text{ m}) = -9{,}7 \text{ m s}^{-2}$$

Actividad de ampliación pág. 225

Un objeto lanzado desde lo alto de una terraza situada a 20 m de altura tarda 4,3 s en llegar al suelo. ¿Hacia dónde se lanzó? ¿Cuál era su velocidad inicial? ¿Hasta qué altura ha llegado?

Solución:

Aplicando las ecuaciones del movimiento:

$$v = v_0 - 9{,}8 \text{ m s}^{-2} \cdot t$$

$$y = 20 \text{ m} + v_0\ t - 4{,}9 \text{ m s}^{-2} \cdot t^2$$

Llega al suelo cuando $y = 0$, por lo que

$$0 = 20 \text{ m} + v_0 \cdot 4{,}3 \text{ s} - 4{,}9 \text{ m s}^{-2} \cdot (4{,}3 \text{ s})^2$$

$$v_0 = 16{,}4 \text{ m s}^{-1}$$

La velocidad es positiva, por lo que se ha lanzado hacia arriba.

El punto de máxima altura se alcanza cuando $v = 0$, con lo cual:

$$2\ a\ (y - y_0) = v^2 - v_0^2$$

$$2 \cdot (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot (y - 20 \text{ m}) = 0 - (16{,}4 \text{ m s}^{-1})^2$$

$$-19{,}6\ y + 392 = -269$$

$$y = 33{,}7 \text{ m}$$

Actividad de ampliación pág. 227

Sabemos que un móvil dotado de un movimiento circular pasa por el punto de ángulo 0 en el instante $t = 3{,}2$ s y vuelve a pasar la siguiente vez por ese punto en el instante $t = 3{,}85$ s. Calcular la velocidad angular de la que está dotado y su posición inicial. Si recorre 10 m cada segundo, ¿cuál es el radio de su movimiento?

Solución:

Aplicando la ecuación del movimiento y considerando que en la primera posición el ángulo es 0:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\ t$$

$$0 = \varphi_0 + \omega \cdot 3{,}2 \text{ s} \quad \text{y} \quad 2\pi = \varphi_0 + \omega \cdot 3{,}85 \text{ s}$$

de donde $2\pi = 0{,}65\ \omega$ y $\omega = 9{,}7$ rad s^{-1}

Ahora podemos hallar el ángulo inicial:

$$0 = \varphi_0 + 9{,}7 \text{ rad s}^{-1} \cdot 3{,}2 \text{ s}$$

de donde $\varphi_0 = -30{,}9$ rad = −1 770°, que equivale, después de descontar vueltas completas (360°), a un ángulo de 30°.

Por lo que la fórmula sería

$$\varphi = 30° + \omega\ t = \pi/6 \text{ rad} + \omega\ t$$

El radio se halla sabiendo la relación entre v, ω y R.

$$R = \frac{v}{\omega} = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1{,}03\ \frac{\text{m}}{\text{rad}}$$

Actividad de refuerzo pág. 228

Calcula la aceleración que debe tener un volante que tiene que alcanzar una velocidad de 3 rad s^{-1} cuando haya dado 15 vueltas, partiendo del reposo. Si el radio del volante es de 0,3 m, ¿cuánto espacio habrá recorrido un punto de la periferia del volante? ¿Y cuánto se habrá desplazado?

Si en ese momento empieza a decelerar con una aceleración de 0,1 rad s^{-2}, ¿cuántas vueltas más dará hasta pararse?

Solución:

Como nos dan el espacio angular y las velocidades angulares inicial y final, debemos aplicar la ecuación $2\ \alpha\ \varphi = \omega_2 - \omega_0^2$, similar a $2\ a\ s = v^2 - v_0^2$:

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_0^2}{2\ \varphi} = \frac{9\ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 15\ \text{vueltas} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{vuelta}}} = 0{,}05\ \text{rad/s}^2$$

Se habrá desplazado 15 vueltas, porque es la condición que pone el problema.

Si el radio del volante es 0,3 m, habrá dado 15 vueltas a esa distancia, por lo que:

$$e = \varphi\ R = 15\ \text{vueltas} \cdot 2\pi\ \text{rad/vuelta} \cdot 0{,}3\ \text{m/rad} = 1{,}9\ \text{m}$$

No se habrá desplazado nada, puesto que ha dado 15 vueltas completas y está en el mismo punto inicial.

Se moverá, cumpliendo la ecuación

$$2\ \alpha\ \varphi = \omega_2 - \omega_0^2$$

Donde ahora la ω_0 vale 3 rad s^{-1} mientras que la ω_f es nula, por lo que

$$\varphi = \frac{\omega_2 - \omega_0^2}{2\ \alpha} = \frac{0 - 9\ \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot \left(-0{,}1\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)} = 45\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{radianes}} = 7{,}2\ \text{vueltas}$$

Actividad de ampliación pág. 229

Dos móviles empiezan su movimiento al mismo tiempo desde la misma vertical en dos vías circulares de igual radio situadas una encima de la otra, de forma que cada móvil puede girar sin afectar al otro.

Si uno empieza moviéndose a 3 rad/s y el otro lo hace partiendo del reposo con una aceleración de 0,20 rad/s^2, ¿en qué momento habrán recorrido el mismo ángulo? ¿Cuántas vueltas han dado hasta ese momento? En el instante de mayor ventaja, ¿cuántas vueltas habrá conseguido de ventaja el primer móvil sobre el segundo? ¿En qué instante?

Solución:

El primer móvil se mueve según:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\ t; \quad \varphi = 3\ \text{rad s}^{-1} \cdot t$$

El segundo según:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0\ t + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2; \ \varphi = \frac{1}{2} \cdot 0{,}20\ \text{rad s}^{-2} \cdot t^2$$

Habrán recorrido el mismo ángulo cuando el ángulo sea el mismo para el mismo tiempo:

$$\varphi = 3\ \text{rad s}^{-1} \cdot t = 0{,}10\ \text{rad s}^{-2} \cdot t^2$$

Donde, aparte de la solución obvia 0, se obtiene:

$$3\ \text{rad s}^{-1} = 0{,}10\ \text{rad s}^{-2} \cdot t$$

de donde t = 30 s

$$\varphi = 3\ \text{rad s}^{-1} \cdot 30\ \text{s} = 90\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\ \pi\ \text{radianes}} = 14{,}3\ \text{vueltas}$$

La mayor ventaja será en el instante en que la velocidad de los dos sea la misma, ya que mientras sea mayor la del primero, la ventaja crece, mientras que posteriormente al instante en que ambas se igualen, la del segundo será mayor que la del primero y la ventaja decrecerá:

$$3\ \text{rad s}^{-1} = 0{,}20\ \text{rad s}^{-2} \cdot t$$

lo que sucede a los 15 s, donde el primero llevará

$$\varphi = 3\ \text{rad s}^{-1} \cdot 15\ \text{s} = 45\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{radianes}} = 7{,}2\ \text{vueltas}$$

y el segundo

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot 0{,}20\ \text{rad s}^{-2} \cdot (15\ \text{s})^2 = 22{,}5\ \text{rad} \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \text{radianes}} = 3{,}6\ \text{vueltas}$$

Por lo que la ventaja será la diferencia, 3,6 vueltas.

Actividad de ampliación pág. 231

Una barca se sitúa en el centro de un río de 200 m de anchura y de forma perpendicular a la corriente, que se mueve a 2 m s^{-1}. En ese momento, arranca con una aceleración constante de 0,6 m s^{-2}. ¿En qué punto toca la orilla? ¿Con qué velocidad lo hace?

Solución:

Suponemos la barca en el origen. Está dotada de dos movimientos: uno debido a la corriente (eje $0x$) y otro debido a su motor ($0y$):

$$a_x = 0;\ v_x = 2\ \text{m s}^{-1};\ x = 2\ t\ \text{m}$$

$$a_y = 0{,}6\ \text{m s}^{-2};\ v_y = 0{,}6\ t\ \text{m s}^{-1};\ y = 0{,}3\ t^2\ \text{m}$$

La barca «toca» la orilla cuando ha avanzado 100 m en el eje y, por lo que

$$0{,}3\ t^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad t = 18{,}3\ \text{s}$$

Mientras el río la ha arrastrado

$$x = 2\ \text{m s}^{-1} \cdot 18{,}3\ \text{s} = 36{,}6\ \text{m}$$

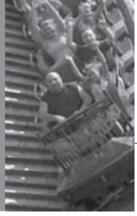
El punto es (36,6; 100) m desde donde se encontraba la barca.

La velocidad v_y es

$$v_y = 0{,}6\ \text{m s}^{-2} \cdot 18{,}3\ \text{m} = 11\ \text{m s}^{-1}$$

Por lo que la velocidad es (2, 11) m s^{-1} y el módulo es

$$v = \sqrt{2^2 + 11^2}\ \text{m s}^{-1} = 11{,}2\ \text{m s}^{-1}.$$



Actividad de ampliación pág. 232

Una partícula se mueve siguiendo las ecuaciones:

$$x = 3 \text{ sen } 2t$$
$$y = 3 \cos 2t$$
$$z = t - 2$$

Si no tenemos en cuenta el movimiento según el eje *Oz*, ¿qué tipo de movimiento tiene la partícula? ¿Y si lo tenemos en cuenta? ¿Conoces algún caso donde se produzca este movimiento?

Solución:

Si representamos distintos valores de t en una tabla, observaremos que el movimiento es circular en el plano Oxy. Al tener en cuenta el movimiento según el eje Oz, se ve que se va moviendo la circunferencia a lo largo del eje, pasando el centro por el origen al cabo de 2 s, y con velocidad uniforme. Es un movimiento helicoidal, como tendría un punto de una hélice de un barco o un avión en su movimiento uniforme.

Actividad de ampliación pág. 233

Lanzamos una pelota desde lo alto de un acantilado de 45 m de altura y cae en una barca situada a 40 m de la vertical del acantilado. ¿Con qué velocidad se lanzó? ¿Cuál debería ser la velocidad inicial horizontal necesaria para que alcance una barca situada al doble de distancia? ¿Variará el tiempo de caída? Calcula los ángulos con el que cada una de las pelotas impactará en su barca correspondiente.

Solución:

La pelota está dotada de dos movimientos:

Eje x: $a_x = 0$; $v_x = v$; $x = v\,t$ m

Eje y: $a_y = -9{,}8$ m s^{-2}; $v_y = -9{,}8\,t$ m s^{-1}; $y = 45 - 4{,}9\,t^2$ m s^{-2}

Toca la barca cuando y es nulo, por lo que

$$0 = 45 - 4{,}9\,t^2 \text{ m s}^{-2} \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

y se cumple que $40 \text{ m} = v \cdot 3 \text{ s} \Rightarrow v = 13{,}3 \text{ m s}^{-1}$

Para el caso de querer alcanzar la segunda barca, la primera parte del razonamiento es la misma y lo que se cumple es que

$$80 \text{ m} = v' \cdot 3 \text{ s} \Rightarrow v' = 26{,}7 \text{ m s}^{-1}$$

El tiempo de caída es el mismo, puesto que sólo depende del movimiento en el eje vertical, y.

El ángulo se calcula mediante las velocidades en ambos ejes.

La velocidad en el eje y siempre vale

$$v_y = -9{,}8 \cdot 3 \text{ m s}^{-1} = -29{,}4 \text{ m s}^{-1}$$

Para la primera, $v_x = 13{,}3$ m s^{-1}, por lo que la tangente del ángulo que forma vale

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-29{,}4}{13{,}3} = 2{,}21 \Rightarrow \alpha = 65° \, 45'$$

Para la segunda, v_x vale ahora 26,7 m s^{-1}, por lo que la tangente del ángulo β que forma vale

$$\text{tg } \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-29{,}4}{26{,}7} = 1{,}10 \Rightarrow \alpha = 47° \, 45'$$

Actividad de ampliación pág. 235

Un niño que se encuentra en el exterior de un muro y a 8 m de la base de éste, lanza canicas a distintas velocidades, pero siempre con ángulos de 45º hacia un hueco de 1,60 m de altura, con su base situada a 5 m del suelo. Calcula la longitud de la caja que sería capaz de recoger todas las bolas lanzadas, y a qué distancia del muro se encuentra.

Solución:

Tenemos que pensar dónde caería la bola más rápida que pasa por el hueco (la que lo roza por arriba) y la más lenta (la que lo roza por abajo), porque todas las demás irán entre ambas. Por ser el ángulo siempre de 45º se cumple que:

$$v_x = v \cdot \cos 45º = \frac{v \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ y } v_y = v \cdot \text{sen } 45º = \frac{v \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Las ecuaciones de las bolas que pasan cumplen:

Eje x: $a_x = 0$; $v_x = v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{v\,t \cdot \sqrt{2}}{2}$

Eje y: $a_y = -9{,}8$; $v_y = \frac{v \cdot \sqrt{2}}{2} - 9{,}8\,t$;

$$y = \frac{v\,t \cdot \sqrt{2}}{2} - 4{,}9\,t^2$$

La más rápida pasa rozando por arriba, por lo que

$$x = 8 = \frac{v\,t \cdot \sqrt{2}}{2}; \; y = 6{,}60 = \frac{v\,t \cdot \sqrt{2}}{2} - 4{,}9\,t^2$$

Por lo que $6{,}60 = 8 - 4{,}9\,t^2 \Rightarrow t = 0{,}53$ s

$$\text{y } \; 8 = v \cdot 0{,}53 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v = 21 \text{ m s}^{-1}$$

Y cae en $0 = \frac{21 \cdot t \cdot \sqrt{2}}{2} - 4{,}9\,t^2$; $t = 1{,}7$ s

$$x = \frac{21 \cdot 1{,}7 \cdot \sqrt{2}}{2} = 25 \text{ m}$$

La más lenta pasa rozando por abajo, por lo que

$$x' = 8 = \frac{v'\,t' \cdot \sqrt{2}}{2}; \; y' = 5 = \frac{v'\,t' \cdot \sqrt{2}}{2} - 4{,}9\,t'^2$$

Por lo que $5 = 8 - 4{,}9\,t'^2 \Rightarrow t = 0{,}78$ s

$$\text{y } \; 8 = \frac{v' \cdot 0{,}78 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow v' = 14{,}5 \text{ m s}^{-1}$$

Y cae en $0 = \frac{14{,}5 \cdot t' \cdot \sqrt{2}}{2} - 4{,}9\,t'^2$; $t' = 1{,}44$ s

$$x' = \frac{14{,}5 \cdot 1{,}44 \cdot \sqrt{2}}{2} = 15 \text{ m}$$

Por lo tanto, si situamos una caja de 10 m de largo a 15 m del muro, todas las canicas caerán en ella.

Actividad de ampliación pág. 236

En unas pruebas de tiro, un cañón lanza un proyectil con un ángulo de 5º que impacta en la diana, situada a la misma altura que el cañón y a 2 300 m de distancia. Si entre el cañón y la diana se hubiera levantado un muro de 60 m de altura a 1 000 m del

punto de lanzamiento, ¿hubiera llegado a impactar el proyectil en la diana? ¿Qué deberíamos cambiar para que pudiéramos volver a cumplir la misión?

Solución:

El movimiento del proyectil sigue las siguientes ecuaciones:

Eje x: $a_x = 0$; $v_x = v \cdot \cos 5º$; $x = v\, t \cdot \cos 5º$

Eje y: $a_y = -9{,}8$; $v_y = v \cdot \text{sen } 5º - 9{,}8\, t$;

$y = v\, t \cdot \text{sen } 5º - 4{,}9\, t^2$

Como alcanza la diana situada en $x = 2\,300$ m e $y = 0$ m:

$$2\,300 = v\, t \cdot \cos 5º \Rightarrow v\, t = 2\,309$$

$$0 = 2\,309 \cdot \text{sen } 5º - 4{,}9\, t^2 \Rightarrow 0 = 201 - 4{,}9\, t^2$$

$$t = 6{,}40 \text{ s} \quad \text{y} \quad v = 360 \text{ m s}^{-1}$$

Para ver si impacta en el muro tenemos que calcular a qué altura se encuentra cuando está a 1 000 m del cañón:

$$1\,000 = v\, t' \cos 5º \Rightarrow t' = 2{,}79 \text{ s}$$

$$y = 360 \cdot 2{,}79 \cdot \text{sen } 5º - 4{,}9 \cdot 2{,}79^2 = 49 \text{ m}$$

Chocará con el muro. Para alcanzar el mismo punto, debemos cambiar el ángulo por el complementario, puesto que alcanzan el mismo punto.

Evaluación

1. Calcula en qué punto del espacio se encontrará una pelota lanzada desde lo alto de un edificio de 20 m de altura, con una velocidad de 20 m s^{-1} que forma un ángulo de 60º con la horizontal, a los 3 s de iniciado el movimiento. Supón el origen en la base del edificio.

Solución:

Es un ejemplo de tiro parabólico que consta de dos movimientos:

En el eje Ox, un movimiento uniforme (aceleración nula) sin espacio inicial, y cuya velocidad inicial vale:

$v_0 \cos \alpha = 20 \text{ m s}^{-1} \cdot 0{,}5 = 10 \text{ m s}^{-1}$

$a = 0$; $v = 10 \text{ m s}^{-1}$; $x = 10 \text{ m s}^{-1} \cdot t$

En el eje Oy, un movimiento uniformemente acelerado (aceleración = $-9{,}8$ m s^{-2}) con espacio inicial 20 m (positivos hacia arriba), y dotado de una velocidad inicial que se puede calcular como $v_0 \text{ sen } \alpha = 20 \text{ m s}^{-1} \cdot 0{,}866 = 17{,}3 \text{ m s}^{-1}$:

$a = -9{,}8 \text{ m s}^{-2}$; $v = 17{,}3 \text{ m s}^{-1} + (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot t$;

$y = 20 \text{ m} + 17{,}3 \text{ m s}^{-1} \cdot t + 1/2 \cdot (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot t^2$

A los tres segundos, la pelota estará en el punto:

$x = 10 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \text{ s} = 30 \text{ m}$,

$y = 20 \text{ m} + 17{,}3 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \text{ s} + 1/2 \cdot (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot (3 \text{ s})^2 = 27{,}8 \text{ m}$

Se encuentra en el punto (30, 27,8) m.

2. Calcula a qué velocidad angular gira una rueda que recorre 17 m cada segundo, si su diámetro es de 60 cm. Calcula también la frecuencia y el periodo del movimiento circular.

Solución:

Si el diámetro es de 60 cm, el radio es la mitad, o sea, 0,3 m.

Aplicando $\omega = v/R = 17 \text{ m s}^{-1}/0{,}3 \text{ m rad}^{-1} = 56{,}7 \text{ rad s}^{-1}$

La frecuencia es igual a $f = \omega/2\pi = 56{,}7 \text{ rad s}^{-1}/2\pi \text{ rad vuelta}^{-1} = 9{,}02 \text{ vueltas s}^{-1}$

El periodo es el inverso de la frecuencia: $T = 1/f = 1/9{,}02$ vueltas s^{-1} = 0,11 s vuelta^{-1}

3. ¿Hasta qué altura subirá una jabalina lanzada verticalmente, desde el suelo, con una velocidad inicial de 15 m s^{-1}?

Solución:

Tenemos un movimiento que sólo tiene lugar en el eje Oy, uniformemente acelerado (aceleración = $-9{,}8$ m s^{-2}) sin espacio inicial, y dotado de una velocidad inicial 15 m s^{-1}:

$a = -9{,}8 \text{ m s}^{-2}$; $v_y = 15 \text{ m s}^{-1} + (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot t$;

$y = 15 \text{ m s}^{-1} \cdot t + 1/2 \cdot (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot t^2$

En la máxima altura se cumple que $v_y = 0$, por lo que:

$v_y = 15 \text{ m s}^{-1} + (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot t = 0$, de donde $t = 1{,}53$ s

Sustituyendo en y:

$y = 15 \text{ m s}^{-1} \cdot 1{,}53 \text{ s} + 1/2 \cdot (-9{,}8 \text{ m s}^{-2}) \cdot (1{,}53 \text{ s})^2 = 11{,}5 \text{ m}$

4. Dos ciclistas suben una cuesta de 20 km a una velocidad de 10 km/h. En cuanto llegan y sin detenerse, la descienden a 80 km/h, uno volviendo al lugar de partida y el otro por la otra ladera, también de 20 km. ¿Cuál ha sido la velocidad media de todo el recorrido para cada uno de los ciclistas? ¿Quién ha recorrido más distancia?

Solución:

El primer ciclista llega después del recorrido al lugar de partida, por lo que su velocidad media es 0, ya que no se ha producido desplazamiento.

El segundo ciclista ha recorrido 40 km = 20 km + 20 km y ha tardado:

$e = v\, t \Leftrightarrow t = e/v = 20 \text{ km}/10 \text{ km/h} = 2 \text{ h}$

$t = e/v = 20 \text{ km}/80 \text{ km/h} = 0{,}25 \text{ h}$

Por lo que su velocidad media es

$$v_m = \frac{\Delta x}{t} = \frac{40 \text{ km}}{2{,}25 \text{ h}} = 17{,}8 \text{ km/h}$$

Han recorrido los dos la misma distancia, 40 km, aunque uno se ha desplazado 40 km, al hacer todo el recorrido en el mismo sentido, mientras que el otro no se ha desplazado por hacer la mitad del recorrido de ida y la mitad de vuelta.

5> Calcula la aceleración tangencial y normal que tiene un coche que entra frenando en una curva de radio 150 m, en el punto en que entra en la curva, a 30 m s^{-1}, y en el punto en el que sale de ella, 3 s después, a 20 m s^{-1}. Supón que en dichos puntos todavía le afecta la curva y que el movimiento es uniformemente decelerado.

Solución:

La aceleración tangencial viene dada por la variación del módulo de la velocidad con respecto al tiempo, por lo que vale siempre igual a lo largo de toda la curva:

$a_t = \Delta v/t = (30 \text{ m s}^{-1} - 20 \text{ m s}^{-1})/3 \text{ s} = 3{,}3 \text{ m s}^{-2}$

La aceleración normal es distinta al comienzo de la curva y al final, porque la aceleración depende del cuadrado del módulo de la velocidad, por lo que

$a_{n0} = v_0^2/R = (30 \text{ m s}^{-1})^2/150 \text{ m} = 6 \text{ m s}^{-2}$

$a_{nf} = v_f^2/R = (20 \text{ m s}^{-1})^2/150 \text{ m} = 2{,}7 \text{ m s}^{-2}$