# 10 MOVIMIENTOS EN UNA Y DOS DIMENSIONES

En la presente unidad se emplean las magnitudes cinemáticas de modo sistemático para el estudio y descripción de los movimientos más conocidos en una y dos dimensiones, una vez conocidas en profundidad en la unidad anterior.

Con respecto a pasadas ediciones, esta unidad se ha reducido en extensión, si bien se mantienen los mismos epígrafes para unificar los conceptos y tratamientos matemáticos de los movimientos en una y dos dimensiones. A su vez, se ha creído conveniente mantener las dos dobles páginas finales de *Actividades y tareas* para poder reforzar convenientemente el aprendizaje de la cinemática de los movimientos, manteniendo siempre la idea de rigurosidad y nivel de exigencia que caracteriza el conjunto del texto. Debemos tener en consideración que la cinemática de los movimientos no forma parte del currículo de la Física de 2° de Bachillerato, de ahí que consideremos de vital importancia adquirir un aprendizaje verdaderamente significativo de los conceptos de la unidad, así como gran soltura en el manejo de las ecuaciones de los movimientos.

La filosofía que impregna la unidad, así como el conjunto del texto, es la del aprendizaje autoconsistente. Para ello se evita incluir expresiones matemáticas sin demostraciones previas, siempre que ello sea posible o aconsejable. Es altamente recomendable evitar el aprendizaje memorístico de expresiones sin más; este hecho suele llevar a errores al alumnado cuando se cambian las condiciones iniciales del problema. Por ello, debemos trabajar en la comprensión de las expresiones matemáticas en toda su extensión, en función de las condiciones iniciales correspondientes a cada problema o cuestión. Para facilitar esta tarea se presentan numerosas cuestiones conceptuales que no requieren cálculo matemático, pero sí la comprensión de las expresiones matemáticas a utilizar.

En la presente edición se han incluido numerosas imágenes para facilitar en todo lo posible la comprensión de los conceptos o para clarificar el empleo adecuado de los signos en las distintas ecuaciones. Así, se ha empleado la técnica estroboscópica de fotografía para ilustrar las posiciones, en intervalos idénticos de tiempo, de objetos en caída libre, lanzamiento vertical o movimiento parabólico.

## Objetivos

1. Reconocer la importancia de los sistemas de referencia en la resolución de problemas de movimientos.
2. Conocer la importancia de los movimientos uniformemente acelerados en la naturaleza y utilizar correctamente sus ecuaciones representativas adaptadas a distintas circunstancias.
3. Comprender el significado de la composición o principio de superposición de movimientos.
4. Relacionar magnitudes lineales y angulares en los movimientos circulares y reconocer el carácter periódico del movimiento circular uniforme.

## Relación de la unidad con las competencias clave

La competencia lingüística está presente en la correcta interpretación del texto y los enunciados de los problemas y cuestiones propuestos, así como en la exposición oral y escrita de las propuestas de *Investiga*. La competencia matemática y en ciencia y tecnología está presente en todo el desarrollo, así como en el uso de las herramientas matemáticas. La competencia digital se relaciona fundamentalmente con las propuestas de *Investiga* y *Física, Tecnología y Sociedad*. La competencia de aprender a aprender es inherente al propio desarrollo autosuficiente de la unidad, basado en la idea primordial de toda la obra de que ésta pudiera servir para el aprendizaje autodidacta del alumnado.

## Temporalización

Recomendable en doce sesiones lectivas.

| PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA DE LA UNIDAD | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Contenidos** | **Criterios de evaluación** | **Estándares de aprendizaje** | **Relación de actividades del LA** | **Competencias clave** |
| **La descripción de los movimientos** | 1. Interpretar representaciones gráficas de los movimientos. | 1.1. Describe el movimiento de un cuerpo a partir de sus vectores de posición, velocidad y aceleración en un sistema de referencia dado. | A: 1 | CMCCT<br>CD |
| **Movimientos en una dimensión: movimientos rectilíneos**<br>▮ Movimiento rectilíneo uniforme.<br>▮ Movimientos rectilíneos con aceleración constante<br>▮ Movimientos con aceleración constante en la naturaleza. | 2. Reconocer correctamente las ecuaciones propias de los movimientos rectilíneos.<br>3. Representar gráficamente las magnitudes cinemáticas frente al tiempo para distintos movimientos rectilíneos.<br>4. Deducir parámetros de interés en movimientos acelerados naturales. | 2.1. Identifica el tipo de movimiento rectilíneo y aplicar las ecuaciones correspondientes para hacer predicciones.<br>3.1. Interpreta correctamente las gráficas de MRU y MRUA.<br>4.1. Resuelve ejercicios prácticos de MRU y MRUA | A: 2-11<br>ER: 1,2,3,4<br>AT: 1-26 | CMCCT<br>CD |
| **Movimientos en dos dimensiones: movimientos parabólicos**<br>▮ ¿Movimiento rectilíneo, curvilíneo o ambos?<br>▮ Lanzamiento horizontal<br>▮ Movimiento parabólico completo<br>▮ Superposición de movimientos uniformes | 5. Resolver situaciones y problemas relativos a la composición de movimientos y entender el significado último y las consecuencias que se derivan de dicha composición. | 5.1. Reconoce movimientos compuestos y establecer las ecuaciones que los describen, obteniendo parámetros característicos.<br>5.2. Resuelve problemas relativos a la composición de movimientos rectilíneos | A: 12-18<br>ER: 5<br>AT: 27-42, 55 | CMCCT |
| **Movimientos circulares**<br>▮ Las magnitudes cinemáticas angulares<br>▮ El movimiento circular uniforme<br>▮ El movimiento circular uniformemente acelerado | 6. Reconocer las ecuaciones de los movimientos circulares y aplicarlas a situaciones concretas.<br>7. Dar respuesta a movimientos circulares, tanto uniformes como acelerados, relacionando las magnitudes angulares con las lineales. | 6.1. Relaciona las magnitudes lineales y angulares en movimientos circulares.<br>6.2. Reconoce la periodicidad de los MCU y resolver problemas relativos.<br>7.1. Resuelve problemas numéricos y gráficos relativos a movimientos circulares. | A: 19-23<br>ER: 6<br>AT: 43-57 | CMCCT |

LA: libro del alumno; A: actividades; ER: estrategias de resolución; AT: actividades y tareas;
CCL: Competencia lingüística; CMCCT: Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología; CD: Competencia digital;
CAA: Aprender a aprender; CSC: Competencias sociales y cívicas; CSIEE: Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor; CCEC: Conciencia y expresiones culturales

# MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL ALUMNO

**Vídeo:** La física del salto de altura

**Enlaces web:** Movimientos según aceleración
**Animación:** Desplazamiento, trayectoria y espacio recorrido

**Enlace web:** La física del movimiento
**Simulador:** El MRU y la caída libre
**Documento:** Biografía de Nicolás de Oresme
**Vídeos:** 1. Caída libre en una cámara de vacío. 2. Pluma y martillo en la Luna. 3. El universo mecánico
**Práctica de laboratorio:** Determinación de la aceleración en planos inclinados.

**Simuladores:** 1. Alcance y alturas máximas. 2. Composición de movimientos
**Videos:** 1. Movimiento parabólico (en inglés). 2. Movimiento de proyectiles (en inglés).
**Enlace web:** Composición de movimientos
**Práctica de laboratorio:** La velocidad de derrame y su dependencia de la profundidad

## Unidad 10: Movimientos en una y dos dimensiones

**1. La descripción de los movimientos**

**2. Movimientos en una dimensión: movimientos rectilíneos**
- 2.1. Movimiento rectilíneo uniforme
- 2.2. Movimientos rectilíneos con aceleración constante
- 2.3. Los movimientos rectilíneos con aceleración constante en la naturaleza

**3. Movimientos en dos dimensiones: movimientos parabólicos**
- 3.1. ¿Movimiento curvilíneo, rectilíneo o ambos?
- 3.2. Lanzamiento horizontal
- 3.3. Movimiento parabólico completo
- 3.4. Superposición de movimientos uniformes

PARA EL PROFESOR

**Actividades de ampliación:** La posición por integración

**Actividades de ampliación:** Galileo y la exploración espacial

**Documento:** El coyote era aristotélico

**Presentación**

## BIBLIOGRAFÍA


HEWITT, P. G.
*Física conceptual.* Wilmington (E.U.A): Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.
Su lectura amena y la escasez de fórmulas hacen de este libro un material a recomendar a aquellos alumnos y alumnas que sientan interés por la Física.

TIPLER, P. A.
*Física.* Barcelona: Editorial Reverté (3ª edición), 1995.
Clásico de referencia obligada.

HOLTON, G.
*Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas.* Barcelona: Editorial Reverté, 1989.
Manual obligado para conocer la aparición y evolución de los conceptos desde el punto de vista histórico.

SERWAY, R. A.
*Física.* México: Interamericana, 1985.
Muy buen libro de Física, estructurado en dos volúmenes de tamaño «guía telefónica de ciudad de 3 000 000 de habitantes». Exposición con gran claridad y buenas explicaciones. Ausencia de color en las ilustraciones o fotografías.

HECHT, E.
*Física en perspectiva.* Wilmington (E.U.A.): Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
Uno de los libros de Física más amenos que se han escrito. Aborda la comprensión de la Física desde un punto de vista conceptual. Se trata de un libro «casi de lectura» con muy pocas fórmulas.

PIÓRISHKIN, A.V. *et al*
*Física* (Vols. I, II, III, IV). Moscú: Editorial Mir, 1986.
Excelente colección, con muy buenas explicaciones. Son cuatro tomos tamaño «libro de bolsillo». Les caracteriza la sobriedad habitual de las ediciones de la antigua U.R.S.S.

ALONSO, M. y FINN, E.J.
*Física.* México: Addison-Wesley Longman, 2000.
Clásico de referencia en cualquier tema de Física. Tratamientos buenos y rigurosos.

**Vídeo:** La fuerza centrípeta
**Simuladores:** 1. Relación entre radianes y grados. 2. Definición de parámetros del MCU 3. Variación de velocidades angulares

**Vídeo:** Felix Baumgartner

**Simulación:** Laboratorio virtual de cinemática

**Tests de autoevalución interactivos**

**4. Movimientos circulares**
- 4.1. Las magnitudes cinemáticas angulares
- 4.2. El movimiento circular uniforme
- 4.3. El movimiento circular uniformemente acelerado

**Física, tecnología y sociedad**
Féliz Baumgartner: una caída libre estratosférica

**Técnicas de trabajo y experimentación**
Estudio práctico del lanzamiento horizontal

**Estrategias de resolución y Actividades y tareas**

**Síntesis de la unidad y Evaluación**

**Documento:** La forma espiral de las borrascas.

**Pruebas de evaluación**

## WEBGRAFÍA

**Educaplús**
http://www.educaplus.org/
Excelente web con muchos apartados y buenos simuladores.

**e-ducativa**
http://e-ducativa.catedu.es
Contiene multitud de explicaciones, imágenes y propuestas de ejercicios para trabajar.

**Fisicalab**
https://www.fisicalab.com
Estructurada a partir de los distintos tipos de movimientos y con propuestas de ejercicios.

**Paul G. Hewitt**
https://goo.gl/UrMclf
Canal de Youtube con los interesantes vídeos del profesor Paul G. Hewitt (en inglés).

# SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

## MOVIMIENTOS EN UNA Y DOS DIMENSIONES

Siempre es útil comenzar con la lectura del texto introductorio y el planteamiento de las cuestiones previas. Las dos primeras tienen por objeto comprobar si saben diferenciar claramente las magnitudes cinemáticas velocidad y aceleración, una vez estudiadas en la unidad anterior; la tercera pretende comprobar que la mayoría de los alumnos que llegan a este nivel siguen adjudicando a la masa un papel que no tiene en los movimientos.

Vídeo:
**LA FÍSICA DEL SALTO DE ALTURA**

## 1. La descripción de los movimientos

En la anterior unidad se estudiaron las magnitudes cinemáticas necesarias para describir las trayectorias de los movimientos. En consecuencia, se debe dejar claro al principio de la unidad que las ecuaciones de movimiento son aquellas que relacionan las magnitudes cinemáticas estudiadas.

En este momento también conviene hacer hincapié en las representaciones gráficas de dichas magnitudes frente al tiempo.

Enlace web: **MOVIMIENTOS SEGÚN LA ACELERACIÓN**

En esta página se puede encontrar una clasificación de los movimientos en función la aceleración.

## 2. Movimientos en una dimensión: movimientos rectilíneos

Debemos aprovechar este epígrafe para aclarar el empleo de las coordenadas de posición *x* o *y* según hablemos en lo sucesivo de movimientos horizontales o verticales. Igualmente, dado que vamos a tratar con movimientos rectilíneos, el tratamiento vectorial se reduce al empleo de signos + o − para caracterizar el sentido de las distintas magnitudes.

### 2.1. Movimiento rectilíneo uniforme

Debemos insistir al comienzo de este epígrafe en el carácter ideal del movimiento rectilíneo uniforme que, sin embargo, es el que el alumnado conoce mejor. No obstante, hemos de hacer mención de la importancia que tiene para la física y para la química el estudio de las situaciones ideales: gases ideales, propiedades coligativas en disoluciones ideales, caída libre, movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y movimientos circulares uniformes, cuya comprensión, por ser en general casos más sencillos, facilita enormemente la aproximación a situaciones más complejas.

Simulador:
**SIMULADOR DEL MRU**

### 2.2. Movimientos rectilíneos con aceleración constante

En el tratamiento del movimiento rectilíneo con aceleración constante o uniformemente acelerado, se ha dado un enfoque histórico del mismo. Si no fuera así, acabaríamos explicando una materia que no tiene conexión con la historia de la humanidad y ¡nada más lejos de la realidad en el caso de la física!

En un movimiento acelerado, la velocidad se puede considerar como la velocidad promedio entre la inicial y la final. Esta idea de la velocidad promediada se explica y se demuestra gráficamente en este texto, mediante el llamado teorema de Merton, cuya primera demostración se debe a Nicolás de Oresme (ver biografía).

Simulador:
**SIMULADOR DEL MRUA**

Documento:
**BIOGRAFÍA DE NICOLÁS DE ORESME**

### 2.3. Los movimientos rectilíneos con aceleración constante en la naturaleza

Es muy importante en este epígrafe que el alumnado acabe comprendiendo conceptualmente lo que significa una caída libre.

A menudo ha ocurrido que, por dar las cosas demasiado rápidamente o muy superficialmente, después de varios cursos de «piedras que se dejan caer desde no se sabe qué altura» y entretenimientos por el estilo, si se le pregunta a un alumno o alumna que disponga por orden de llegada varios objetos de distinta masa en caída libre, la respuesta inmediata en muchos casos es «primero el más pesado, segundo el siguiente más pesado…» y así sucesivamente.

No se deben escatimar esfuerzos en desechar de raíz esa idea, que se extiende, por lo demás, al lanzamiento vertical. Así, es posible que se haya conseguido que la respuesta de la caída libre sea la correcta; pero… ¿por qué no probamos a preguntar qué objeto llega más alto si lanzamos verticalmente tres cuerpos de muy distinta masa con la misma velocidad? El sentido común vuelve a hacer pensar a los alumnos y alumnas que el más ligero llegará más alto. Si es así, se comprobará que todavía persisten los viejos prejuicios y la confusión entre conceptos tales como velocidad e impulso.

Otro aspecto importante que debemos reseñar en este epígrafe es la idea de un único movimiento en el caso del lanzamiento vertical. Está muy extendida entre muchos alumnos y alumnas la tendencia a considerar este tipo de movimientos como dos distintos: primero uno ascenso y luego otro de caída libre. Los resultados serán correctos, pero no está de más fomentar la congruencia en el enfoque de los problemas y la elegancia en su resolución.

Simulador:
**CAÍDA LIBRE**

Enlace web:
**LANZAMIENTO VERTICAL**

Vídeo (en inglés):
**CAÍDA LIBRE EN UNA CÁMARA DE VACÍO**

Vídeo:
**PLUMA Y MARTILLO EN LA LUNA**

Vídeo:
**VÍDEO DE LA COLECCIÓN «UNIVERSO MECÁNICO»**

## 3. Movimientos en dos dimensiones: movimientos parabólicos

La mejor manera de introducir este apartado es planteando las cuestiones que aparecen en el texto. Dado que habrá respuestas encontradas, lo mejor puede ser escenificarlas en el aula; un alumno o alumna moviéndose con velocidad constante lanza un objeto verticalmente para comprobar que vuelve a caer en su mano.

### 3.1. ¿Movimiento curvilíneo, rectilíneo o ambos?

En este epígrafe se acentúa la idea de que no se introducen nuevas ecuaciones para el tratamiento de los movimientos parabólicos, sino que se usan conjuntamente las de los movimientos componentes (MRU y MRUA), ya conocidas.

Simulador:
**COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS**

Enlace web:
**COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS**

### 3.2. Lanzamiento horizontal

En este punto se debe insistir en el significado profundo de la composición de movimientos, es decir, en la equivalencia entre caídas libres y lanzamientos horizontales y entre movimientos parabólicos completos y lanzamientos verticales, analizando también desde el punto de vista matemático la identidad de las ecuaciones de estos movimientos cuando se llevan a situaciones extremas; por ejemplo: un movimiento «parabólico» si el ángulo es de 90° conduce a las ecuaciones del lanzamiento vertical. Es muy importante recalcar estas conexiones porque así los alumnos y alumnas adquieren una visión de conjunto que les facilita enormemente la comprensión de la física.

### 3.3. Movimiento parabólico completo

Asimismo, se debe evitar en el presente epígrafe el uso excesivo de expresiones concretas válidas para un caso determinado; por ejemplo, las expresiones de alcance máximo y altura máxima en movimientos parabólicos con origen en el suelo. Por ello, se insiste especialmente en que el alumnado fije su atención en las características de los puntos de los que desean información. Así, la secuencia a la que debemos acostumbrarlos para la realización de problemas es la siguiente:

características del punto (altura, alcance…)
→ tiempo en que ocurren dichas características
→ sustitución de información en la ecuación
(altura, *y*, o alcance, *x*)

Simulador:
**ALCANCE Y ALTURA MÁXIMAS**

Vídeo:
**VÍDEOS DEL PROFESOR PAUL G. HEWITT**

### 3.4. Superposición de movimientos uniformes

Resulta conveniente entrar en la demostración de que la composición de dos MRU produce, a su vez, otro MRU. Si relacionamos las expresiones de $\Delta x$ y $\Delta y$ que aparecen en el texto, se obtiene:

$$\Delta y = \frac{v_y}{v_x} \Delta x$$

Que es la ecuación de una recta cuya pendiente (dirección) viene dada por el cociente de las componentes de la velocidad.

Simulador:
**COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS**

## 4. Movimientos circulares

Se empieza este apartado descartando la utilidad de las magnitudes cinemáticas lineales para el tratamiento del movimiento circular. De acuerdo con lo expuesto al principio de esta unidad acerca de la descripción física de los fenómenos en función de las magnitudes que permanecen constantes en el transcurso de los mismos, es necesario ahora indicar la necesidad de describir los movimientos circulares en función de magnitudes que no cambien. Por eso, el alumnado entenderá la necesidad de definir magnitudes angulares.

### 4.1. Las magnitudes cinemáticas angulares

Conviene insistir en dejar muy clara la relación existente entre estas magnitudes y las lineales.

Simulador:
**RADIANES Y GRADOS**

Simulador:
**PARÁMETROS DEL MCU**

Simulador:
**VARIACIÓN DE VELOCIDADES ANGULARES**

Vídeo:
**LA FUERZA CENTRÍPETA**

### 4.2. El movimiento circular uniforme

Es muy importante estudiar adecuadamente el carácter periódico de este movimiento. Tendrá relación con las unidades 12 y 15 (Gravitación y movimiento armónico simple). Se recomienda encarecidamente realizar la actividad 22 para más adelante relacionar el valor obtenido con la aceleración gravitatoria terrestre a la distancia lunar.

### 4.3. El movimiento circular uniformemente acelerado

Se sugiere hacer un tratamiento paralelo al realizado para obtener las expresiones del MRUA.

# SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES (páginas 238/257)

## Comprueba lo que sabes

**1. Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:**

**«Cuando dejamos caer un objeto desde la terraza de un edificio, su aceleración aumenta progresivamente a medida que desciende».**

Es falsa; la aceleración permanece constante. lo que aumenta progresivamente es la velocidad.

**2. Al lanzar verticalmente un objeto hacia arriba, llega un instante en que deja de ascender para comenzar a descender. En ese preciso momento, tanto su velocidad como su aceleración son nulas. ¿Qué opinas de esa proposición?**

La única magnitud que se hace cero es la velocidad. La aceleración permanece constante.

**3. Lanzamos hacia arriba dos objetos de distinta masa con la misma velocidad. Señala cuál de las dos alcanzará mayor altura:**

**a) El más ligero llega más alto.**

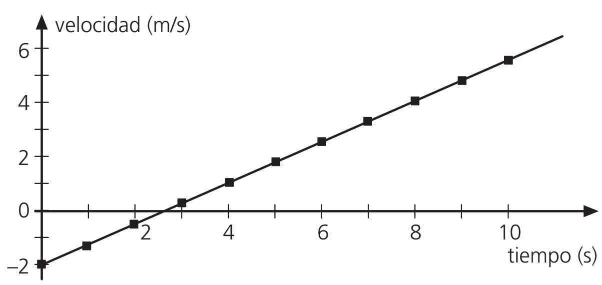
**b) El más pesado llega más alto.**

**c) Los dos alcanzan la misma altura.**

La respuesta correcta es la c).

## Actividades

**1 Un cuerpo se desplaza a lo largo de una recta con una aceleración constante de +0,8 m/s². Representa su gráfica *v-t* en los diez primeros segundos, si partió con una velocidad inicial de −2 m/s. Determina la ecuación de velocidad en función del tiempo. ¿En qué instante se hace cero su velocidad? ¿Vuelve a ser cero en algún otro instante?**




De la expresión obtenemos la ecuación de la velocidad:

$$v = -2 + 0{,}8t$$

Para saber si se puede hacer 0 la velocidad, no tenemos más que suponer que sea así y buscar solución a la ecuación:

$$0 = -2 + 0{,}8t$$

despejando el tiempo $t = 2{,}5$ s.

La ecuación es de primer grado y tiene una única solución.

**2 ¿Cuánto tarda la luz del sol en llegar a la Tierra, teniendo en cuenta que el Sol se halla a una distancia media de la Tierra de 149 600 000 km y que la luz se propaga aproximadamente a $3 \cdot 10^8$ m/s? (Resuelve la actividad situándote tú mismo como origen del sistema de referencia.)**

Si nos situamos como origen del sistema de referencia ($x = 0$), el Sol se halla a una distancia $x_0$ = 149 600 000 km. Como la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, entonces podemos calcular el tiempo que tarda la luz del Sol en llegar a nosotros, es decir, en llegar a $x = 0$ desde su posición inicial. Como desde nuestro punto de vista la luz del Sol viene a nuestro encuentro (signo negativo para su velocidad), entonces la expresión que hay que usar será:

$$x = x_0 - vt$$

En nuestro caso:

$$0 = 149\,600\,000 - 300\,000 \cdot t$$

Por tanto:

$$t = 498{,}6 \text{ s} = 8 \text{ min } 19 \text{ s}$$

**3 Las ecuaciones de movimiento de dos vehículos, A y B, son $x_A = 5t$ m y $x_B = 140 - 2t$ m. Determina:**

**a) ¿Qué distancia los separa inicialmente?**

**b) ¿En qué sentidos relativos se mueven uno respecto del otro?**

**c) ¿En qué instante se cruzan?**

**d) Representa el movimiento de ambos vehículos en una misma gráfica *x-t*.**

a) Inicialmente, ($t = 0$), $x_A = 0$ y $x_B$ =140 m, luego la distancia que los separa es de 140 m.

b) Ambos móviles emprenden la marcha al mismo tiempo pero en sentidos opuestos. Normalmente, lo más sencillo para el alumnado es visualizar el movimiento de ambos cuerpos en la gráfica del apartado d).

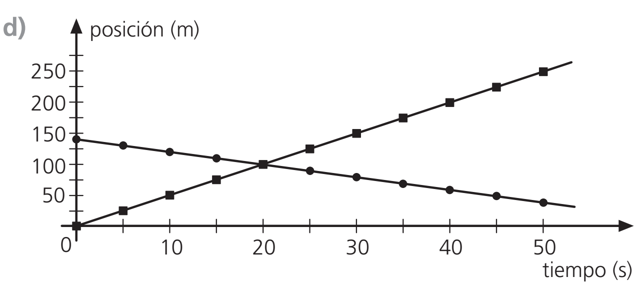
c) Se cruzarán cuando sus posiciones sean coincidentes, por lo que igualando ambas:

$$x_A = x_B$$

$$5t = 140 - 2t$$

despejando el tiempo, $t = 20$ s.

d)




**4 Dos vehículos (A y B) parten uno al encuentro de otro desde dos localidades que distan entre sí 400 km. El vehículo A viaja a 100 km/h, mientras que el B, que se pone en marcha un cuarto de hora después, lo hace a 120 km/h.**

**a) ¿Cuánto tiempo pasa desde que parte A hasta que se produce el encuentro?**

**b) ¿Qué distancia ha recorrido el vehículo A?**

**c) Representa el movimiento de ambos vehículos en una misma gráfica *x-t*.**

**a)** Tomando como origen del sistema de referencia la posición inicial de A, las ecuaciones de posición para ambos vehículos serán:

$$x_A = v_A t = 100t \text{ km}$$

$$x_B = x_{0B} - v_B t_B = 400 - 120\,(t - 1/4) = 430 - 120t \text{ km}$$

El encuentro se producirá cuando ambos estén en la misma posición, es decir, cuando $x_A = x_B$, por lo que:

$$100t = 430 - 120t$$

En consecuencia:

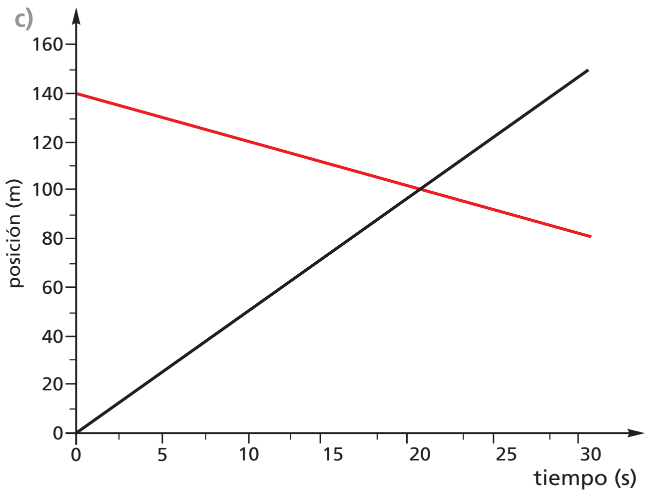
$$t = 1{,}95 \text{ h} = 117 \text{ min } 16 \text{ s}$$

Es decir, el encuentro se producirá al cabo de 117 min y 16 s contados desde que partió el vehículo A.

**b)** La distancia que recorre A será:

$$x_A = 100t = 195 \text{ km}$$

**c)**




**5** **La nave transbordadora *Discovery* lleva una velocidad de 720 km/h en el momento del aterrizaje. Cuando entra en contacto con el suelo, despliega los paracaídas de frenado, que junto con los propios frenos de la nave hacen que esta se detenga totalmente en 20 s.**

**a) ¿Cuál ha sido la aceleración de frenado, suponiéndola constante?**

**b) ¿Qué distancia ha recorrido la nave durante el frenado?**

**a)** La velocidad inicial (720 km/h) equivale a 200 m/s. Al cabo de 20 s su velocidad es cero, por lo que la aceleración de frenado será:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = -10 \text{ m/s}^2$$

**b)** La distancia que recorrerá la nave, o desplazamiento efectuado, será:

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$d = v_0 t + 1/2\, a t^2$$

$$d = 200 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} + 1/2\,(-10 \text{ m/s}^2) \cdot 20^2 \text{ s}^2 = 2\,000 \text{ m}$$

Es decir, la nave *Discovery* recorre 2 km hasta que se detiene por completo.

**6** **Un tiesto cae sobre un viandante desde el balcón de un quinto piso, que está a 13 m. ¿De cuánto tiempo dispone esta persona para evitar el golpe, si su estatura es de 1,75 m? (en su caída, el tiesto se acelera a razón de 9,8 m/s²).**

Si consideramos el sistema centrado en la «víctima», entonces el tiesto se encuentra inicialmente a 11,25 m de su cabeza y se acerca a él con una aceleración de 9,8 m/s² sin velocidad inicial. Según el criterio de signos expuesto, la ecuación será:

$$y = y_0 - 1/2\, g t^2$$

Cuando impacte contra el viandante, el valor de $y$ será cero, y esto ocurrirá cuando $t$ sea:

$$t = \sqrt{2\, y_0 / g} = 1{,}5 \text{ s}$$

Ciertamente, debe tener muy buenos reflejos el viandante para esquivar el casi seguro «tiestazo».

**7** **Un ciclista desciende por una carretera recta boscosa a una velocidad de 54 km/h cuando observa una vaca cruzando la carretera a 25 m por delante de él. Si al aplicar ambos frenos logra una desaceleración de 5 m/s²:**

**a) ¿Cómo acaba la historia?**

**b) ¿Acabaría de igual manera si el ciclista tardara 0,7 s en reaccionar antes de aplicar los frenos?**

**a)** La velocidad inicial del ciclista es 15 m/s. Con ese valor de aceleración de frenado, el espacio que recorre hasta que se para viene dado por:

$$s = \frac{v_o^2}{2a} = 22{,}5 \text{ m}$$

En consecuencia, la historia acaba bien para el ciclista y la vaca.

**b)** Sin embargo, si tarda 0,7 s en reaccionar, el espacio recorrido en esos 0,7 s con velocidad constante es de 10,5 m, que se sumarán a los 22,5 m que luego emplearía en frenar. Por tanto, el ciclista colisiona con la vaca, con peor suerte para el ciclista, sin duda.

**8** **En un campeonato de salto de palanca, uno de los participantes se deja caer a la piscina desde la postura inicial de pino. Si la plataforma está a 10 m de altura:**

**a) ¿De cuánto tiempo dispone para ejecutar sus piruetas?**

**b) ¿Con qué velocidad entrará en el agua?**

**a)** El saltador, desde su punto de vista, entrará en el agua cuando haya descendido o recorrido 10 m. La ecuación que él emplearía será:

$$y = 1/2\, g t^2 \Rightarrow t = 1{,}4 \text{ s}$$

Entrará con una velocidad:

$$v = gt = 13{,}7 \text{ m/s}$$

Desde el punto de vista del jurado, las ecuaciones que se han de utilizar serían:

$$y = y_0 - 1/2\, g t^2$$

Así, el saltador llegaría al agua cuando $y = 0$, lo que ocurriría a los 1,4 s.

**b)** La velocidad con que entraría el saltador en el agua sería de $-13{,}7$ m/s, donde el signo negativo indica que el saltador se mueve hacia el agua.

**9** **El *jet d'eau* (chorro de agua) que se muestra en la figura 10.17 alcanza una altura de 140 m. ¿Con qué veloci-**

**dad mana el agua de la fuente? ¿Cuánto tarda el agua saliente en alcanzar su máxima altura?**

Dado que los 140 m es la máxima altura que puede alcanzar la fuente, y como:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

se obtiene:

$$v_0 = 52{,}4 \text{ m/s}$$

Por otro lado, como la velocidad final del chorro es 0, tenemos todos los datos de la ecuación $v = v_0 - gt$, salvo el tiempo pedido, que se despeja sin dificultad: $t = 5{,}3$ s

**10** **Indica cuáles serían las ecuaciones que describirían un lanzamiento vertical hacia abajo, según un observador situado en el suelo.**

Desde el punto de vista de un observador situado en el suelo, la altura a la que se encuentra el cuerpo que se lanzó desde una altura inicial $y_0$ es:

- Ecuación de posición (altura desde el suelo):

$$y = y_0 - v_0 t - 1/2\, gt^2$$

- Ecuación de velocidad: $v = -v_0 - gt$

**11** **Si das una patada a un balón a 1 m de altura del suelo, sale despedido verticalmente. Al cabo de 5 s, el balón llega al suelo. Calcula:**

**a)** **¿Cuál fue la velocidad con qué salió disparado el balón?**

**b)** **¿Hasta qué altura ascendió?**

**c)** **¿Al cabo de cuánto tiempo volvió a pasar por la altura inicial de 1 m?**

**a)** Al cabo de 5 s, el balón llega al suelo, momento en que su altura es cero:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = 0$$

Por consiguiente:

$$v_0 = \frac{\frac{1}{2} gt^2 - y_0}{t} = 24{,}3 \text{ m/s}$$

**b)** La altura a la que asciende vendrá determinada por el momento en que la velocidad se haga cero:

Por tanto, el tiempo en que $v = 0$ es $t = v_0/g = 2{,}5$ s, que, sustituido en la ecuación de la altura, nos dará la altura máxima a la que asciende:

$$y_{máx} = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = 31{,}1 \text{ m}$$

**c)** Salvo para el único punto en el que la altura es máxima, en los demás hay dos valores de tiempo que satisfacen la altura considerada. En el caso de $y = 1$ (altura inicial), un valor es, obviamente, $t = 0$, y el otro lo obtendremos a partir de la ecuación de altura, haciendo $y = 1$ m:

$$1 = 1 + v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow t = 2\frac{v_0}{g} = 4{,}9 \text{ s}$$

**12** **Una pelota de tenis es sacada horizontalmente desde 2,20 m de altura a una velocidad de 140 km/h. ¿A qué distancia horizontal caerá? ¿Qué velocidad llevará al tocar el suelo?**

El tiempo que tarda en llegar al suelo es el mismo que tardaría en caída libre:

$$y = y_0 - 1/2\, gt^2 = 0 \Rightarrow t = 0{,}67 \text{ s}$$

Por tanto, la distancia horizontal a la que caerá será:

$$x = v_0 t = 26{,}0 \text{ m}$$

La velocidad que llevará al llegar al suelo tiene dos componentes:

$$v_x = v_0 = 38{,}9 \text{ m/s y } v_y = -gt = -6{,}5 \text{ m/s}$$

Es decir, $\vec{v} = 38{,}9\vec{i} - 6{,}5\vec{j}$ m/s, cuyo valor es:

$$v = 39{,}4 \text{ m/s.}$$

**13** **Deduce la ecuación de la trayectoria del saltador de longitud que relaciona *x* con *y*. Comprueba que se trata de la ecuación de una parábola y emplea el mismo procedimiento que se desarrolló en la aplicación del lanzamiento horizontal.**

Las expresiones de partida son las señaladas en el texto, es decir:

$$x = v_0 \cos \alpha\, t$$

$$y = v_0 \operatorname{sen} \alpha\, t - 1/2\, gt^2$$

Despejando *t* en la primera y sustituyéndolo en la segunda, se obtiene:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1/2\, gx^2}{(v_0 \cos\alpha)^2}$$

que es la ecuación de una parábola.

**14** **A partir de la ecuación de la altura en el movimiento parabólico, despeja el tiempo *t* y trata de analizar a continuación el significado que encierra la expresión obtenida. Por ejemplo:**

**a)** **¿Qué significado tiene el doble signo que se obtiene?**

**b)** **¿Cuándo es única la solución del tiempo? ¿Qué valor tiene?**

**c)** **¿A qué punto corresponde dicha solución única del tiempo? ¿Cuánto vale la altura en ese punto?**

Esta actividad es muy recomendable como ejercicio físico-matemático para que los alumnos entiendan la información que puede encerrar una expresión matemática. Si despejamos el tiempo en la ecuación de posición del lanzamiento vertical desde el suelo, se obtiene:

$$t = \frac{v_o \pm \sqrt{v_o^2 - 2\,gy}}{g}$$

**a)** El doble signo nos indica que para cada valor de altura *y* se obtienen dos valores de tiempo. Es decir, el cuerpo pasa dos veces (ascenso y descenso) por la misma altura.

**b)** y **c)** Sin embargo, solo se obtiene un valor de tiempo cuando la raíz se hace cero, hecho que sucede cuando

$$y = \frac{v_o^2}{2g}$$

Que es, justamente, la altura máxima. A su vez, el tiempo correspondiente a esta altura resulta ser:

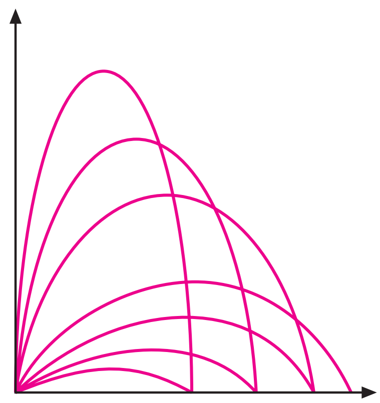
$$t = \frac{v_0}{g}$$

Se obtiene toda la información de un lanzamiento vertical desde el suelo a partir de una sola expresión.

**15** **¿Con qué ángulo de despegue se consigue el mayor alcance en un movimiento parabólico si los demás factores se mantienen iguales?**

A partir de la expresión del alcance máximo, observamos que, a igualdad de los demás factores, este se produce con un ángulo de 45°, puesto que en ese caso sen $2\alpha = 1$, máximo valor que puede tomar el seno de un ángulo.

**16** **Comprueba, a partir de la expresión del alcance máximo, cómo puede lograrse un mismo alcance con dos ángulos distintos. Supón que los demás factores permanecen fijos (figura 10.26). ¿Qué relación guardan esas parejas de ángulos?**



Las parejas cuyos valores son $\alpha = 45° \pm x$ tienen igual valor de sen $2\alpha$. Así, por ejemplo, se consigue el mismo alcance con un ángulo de 30° que con un ángulo de 60° (en este caso, $\alpha = 45° \pm 15°$).

**17** **Para superar los 2,30 m de altura, un atleta salta con una velocidad de 5,1 m/s y un ángulo de 75°. Si su centro de gravedad está a 1,1 m del suelo, ¿se dan las condiciones para que pueda batir la marca?**

Teniendo en cuenta que se parte de una altura inicial de 1,1 m:

$$y_{máx} = y_0 + \frac{v_0^2 \text{ sen}^2 \alpha}{2g}$$

Sustituyendo:

$$y_{máx} = 1{,}1 + \frac{5{,}1^2 \text{ sen}^2 75}{2 \cdot 9{,}8} = 2{,}33 \text{ m}$$

Si el saltador, además de elevar su centro de gravedad a esa altura, no tropieza en su caída, tendremos que felicitarlo puesto que supera los 2,30 m anhelados.

**18** **Siguiendo un procedimiento similar al expuesto en el texto, deduce una expresión para la altura máxima suponiendo que el movimiento parabólico parte desde una altura inicial $y_0$.**

En la máxima altura, la velocidad se hace instantáneamente cero, lo que permite obtener el tiempo transcurrido hasta que eso sucede: $v = v_0 - gt = 0 \Rightarrow t_{y\,máx} = 2{,}2$ s

que sustituido en la expresión de altura considerada anteriormente, conduce a un valor de altura máxima:

$$y = 25{,}4 \text{ m.}$$

**19** **Un cuerpo recorre 4 m cada segundo por la periferia de una pista circular de 5 m de radio. ¿Cuál es su velocidad angular en rad/s? Escribe la expresión de su vector de posición al cabo de 3 s.**

El ángulo descrito, en radianes, es de 4/5 = 0,8 rad. Dado que ese es el ángulo que se describe cada segundo, su velocidad angular es de 0,8 rad/s.

Al cabo de 3 s, el ángulo descrito es de 2,4 rad, por lo que su vector de posición será:

$$\vec{r} = 5 \cos 2{,}4\vec{i} + 5 \text{ sen } 2{,}4\vec{j} \text{ m}$$

O bien:

$$\vec{r} = -3{,}68\vec{i} + 3{,}37\vec{j} \text{ m}$$

**20** **La Tierra completa una vuelta alrededor del Sol en 365 días. Si la distancia media al Sol es de 149 600 000 km, calcula la velocidad angular orbital de la Tierra y su velocidad lineal.**

La velocidad angular orbital de la Tierra alrededor del Sol es:

$$\omega = 2\pi/T = 2 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

El valor de su velocidad lineal será:

$$v = \omega r = 29\,920 \text{ m/s}$$

Así pues, nuestra nave Tierra nos lleva en su viaje alrededor del Sol a la nada despreciable velocidad de casi 30 000 m/s.

**21** **Dos cuerpos, A y B, parten del mismo punto y se mueven por la periferia de una pista circular de 20 m de radio, pero en sentidos opuestos. El cuerpo A se mueve en sentido horario a 5 rpm y el B inicia su movimiento 0,5 s después, en sentido antihorario y con una velocidad angular de 8 rpm. Determina:**

a) **El ángulo descrito por el cuerpo A hasta el momento en que ambos se cruzan.**

b) **El tiempo que tardan en cruzarse desde que salió A.**

c) **El espacio recorrido por cada uno de los cuerpos hasta el punto de encuentro.**

Las ecuaciones correspondientes a los cuerpos A y B pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\theta = \omega_A t$$

$$2\pi - \theta = \omega_B (t - 5)$$

Donde $\theta$ es el ángulo descrito por el cuerpo A. Resolviendo el tiempo en el sistema de ecuaciones (o, indistintamente del orden, el ángulo $\theta$), se obtienen como soluciones:

$$t = 4{,}92 \text{ s}$$

$$\theta = 2{,}57 \text{ rad}$$

Se ha operado con las velocidades angulares en rad/s.

c) El espacio recorrido por cada uno de los cuerpos viene dado por:

$$s_A = \theta \cdot r = 51{,}4 \text{ m}$$

$$s_B = (2\pi - \theta) \cdot r = 74{,}3 \text{ m}$$

**22** **Sabiendo que la Luna completa su órbita alrededor de la Tierra en 27,32 días (período sidéreo) y que su distancia media es de 384 000 km, ¿cuál es la aceleración centrípeta (gravitacional) que actúa sobre la órbita de este satélite?**

Si expresamos el período sidéreo en segundos, y la distancia media en m, obtenemos:

$$T = 2\,360\,448 \text{ s} \quad ; \quad r = 3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Por aplicación de la ecuación de la aceleración centrípeta en el movimiento circular uniforme:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} r = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

*Comentario de interés.* Este cálculo llevó a Isaac Newton a pensar que la fuerza gravitacional decrecía conforme al inverso del cuadrado de la distancia. La razón es que la distancia media a la Luna es 60 veces mayor que el radio terrestre, mientras que la aceleración centrípeta de la Luna, dirigida hacia la Tierra, es 1/3 600 veces la aceleración en la superficie terrestre.

**23** **Un disco accionado por una taladradora gira a 18 000 rpm. Cuando esta deja de accionarse, el disco se detiene después de haber completado 100 vueltas. Determina:**

**a) La aceleración angular de frenado.**

**b) El tiempo que tarda el disco en detenerse.**

a) A partir de la expresión $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta$, y considerando que la velocidad angular final es cero y el ángulo correspondiente a 100 vueltas es 200 $\pi$ rad, se obtiene despejando:

$$\alpha = -900\,\pi \text{ rad/s}^2$$

b) El tiempo que tarda en detenerse viene dado por:

$$t = \frac{\omega_o}{\alpha} = 0{,}\widehat{6} \text{ s}$$

# SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES
## FÍSICA, TECNOLOGÍA Y SOCIEDAD (página 258)

### Análisis

**1** **Si la velocidad récord fue de Mach 1,25, teniendo en cuenta los valores mostrados en el texto, deduce la velocidad del sonido a la altura a la que se produjo el récord.**

Como se indica en el texto, la velocidad máxima alcanzada fue de 1357,6 km/h, que corresponde a 377,11 m/s. Dado que esa velocidad corresponde a 1,25 veces la del sonido a esa altura, entonces la velocidad del sonido resulta ser de 301,7 m/s, en consonancia con el hecho de que el aire es menos denso a esa altitud.

**2** **A la vista de la gráfica de la figura 10.36, ¿durante cuánto tiempo superó Félix Baumgartner la velocidad del sonido?**

Según los datos que aparecen en el texto y se representan en la figura, Félix superó la barrera del sonido desde el segundo 34 hasta el segundo 64. es decir, durante 30 s.

**3** **¿Por qué crees que disminuye la velocidad de caída a partir de cierto tiempo?**

Alcanzada una velocidad límite, la densidad del aire aumenta a medida que la altitud disminuye, por lo que aumenta también la fuerza de fricción, disminuyendo ligeramente la velocidad de descenso.

### Propuesta de investigación

**4** **Busca información sobre la dependencia de la velocidad del sonido con la temperatura en un gas, y trata de relacionarla con la curva de temperatura en las distintas capas atmosféricas.**

La velocidad del sonido en un gas se relaciona con la temperatura de éste según:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

donde $\gamma$ es el coeficiente adiabático del gas, $R$ la constante de Boltzmann, $T$ la temperatura y $M$ la masa molar del gas. Los alumnos deben buscar cómo varía la temperatura en las capas atmosféricas hasta 39 000 m de altura y relacionar esa variación con la variación de la velocidad del sonido.

No obstante, debe tenerse en cuenta que solo se obtendrá una mera aproximación, pues estamos considerando constantes los valores de $\gamma$ y $M$.

Vídeo:
**FÉLIX BAUMGARTNER**

# SOLUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES
## TÉCNICAS DE TRABAJO Y EXPERIMENTACIÓN (página 259)

### Cuestiones

Debemos tener presente que en el caso de una esfera que rueda por un plano inclinado, la velocidad al final del plano viene dada por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g\, h}$$

Con este valor de velocidad teórica, los alumnos obtendrán un menor error en sus medidas experimentales.

**1** **Compara las velocidades obtenidas con las calculadas teóricamente y analiza qué factores pueden influir en la diferencia de valores.**

En el cálculo teórico puede afinarse más si tenemos presente que la bola rueda en lugar de deslizarse, por lo que su velocidad al final del plano vendría dada por la expresión $v = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$. El alumnado debe analizar cuáles son los factores que pueden influir en la diferencia de valores, como por ejemplo: fricción, pequeño bote de la bola al llegar a la base del plano, de modo que el despegue no es exactamente horizontal, etc.

**2** **Determina los errores absoluto y relativo en cada una de las medidas de velocidad y extrae conclusiones acerca de la validez de la suposición de la composición de movimientos.**

Los alumnos deben estimar los errores absoluto y relativo de cada una de las medidas.

**3** **Elabora un informe de la práctica.**

Los alumnos deben elaborar el informe siguiendo el protocolo de una publicación científica.

## SOLUCIONES DE ACTIVIDADES Y TAREAS (páginas 262/265)

### Gráficas de movimientos en una dimensión

**1** **¿Qué representa el área encerrada bajo una gráfica velocidad-tiempo? ¿Por qué?**

Representa el desplazamiento efectuado; tal como se ve en la figura 10.6 (página 241).

**2** **¿Qué representa la pendiente de la gráfica posición-tiempo de un movimiento con velocidad constante?**

La pendiente representa la velocidad.

**3** **¿Qué representa el área encerrada bajo una gráfica aceleración-tiempo?**

**a)** El espacio recorrido.

**b)** La velocidad.

**c)** La variación de la velocidad.

La respuesta correcta es la **c)**.

**4** **¿Cómo determinarías la velocidad en cada instante a partir de la gráfica posición-tiempo de un movimiento rectilíneo con aceleración constante?**

Determinando (matemáticamente o por métodos gráficos) la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese instante.

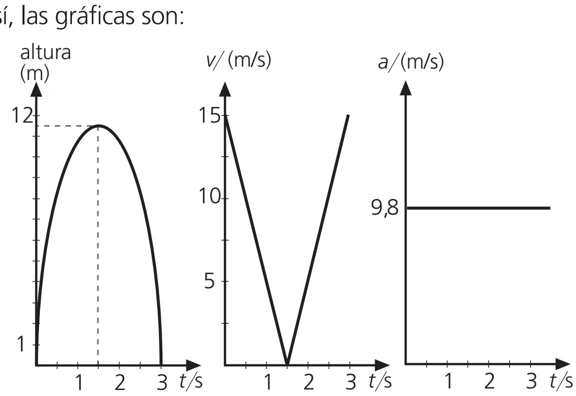
**5** **Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 15 m/s. Representa sus gráficas de movimiento (en las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo, especifica al menos los tres puntos característicos: salida, altura máxima y aterrizaje).**

La máxima altura es: $y_{\text{máx}} = \dfrac{v_0^2}{2g} = 11{,}5 \text{ m}$

El tiempo que tarda en llegar a esa altura es: $t = \dfrac{v_0}{g} = 1{,}5 \text{ s}$

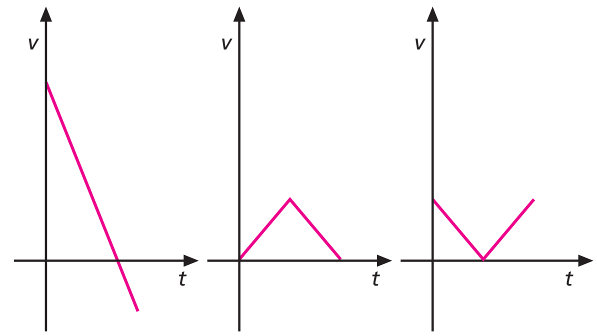
El tiempo total de vuelo es 3,0 s.

Así, las gráficas son:

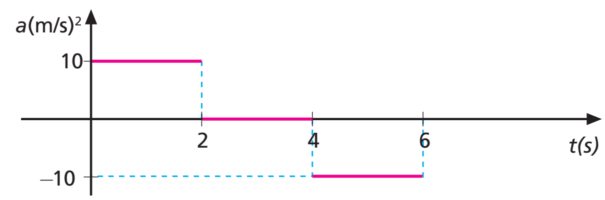



**6** **¿Cuál de las siguientes gráficas puede representar mejor el módulo de la velocidad de una piedra que se lanza verticalmente hacia arriba y cae cuando alcanza su altura máxima?**

Teniendo en cuenta que las gráficas representan el módulo de la velocidad, la correcta es la tercera. Sin embargo, es conveniente recalcar a la hora de resolver esta cuestión que, si lo que se representa es el «vector velocidad», la gráfica no sería ascendente a partir del valor cero de velocidad (altura máxima), sino que seguiría en línea recta tomando valores negativos. Debemos recordar que los valores negativos solo indican sentido, pues el módulo es positivo por definición.




**7** **Una partícula inicialmente en reposo es sometida a las aceleraciones que se muestran en la figura:**




**Dibuja las gráficas *s*-*t* y *v*-*t*.**

**Calcula el espacio máximo recorrido a los 6 s.**

Entre 0 s y 2 s:

- $v_1 = a_1 t = 20$ m/s
- $s_1 = 1/2\ a_1 t^2 = 20$ m

Entre 2 s y 4 s:

- $v$ permanece constante.
- $s_2 = vt = 40$ m

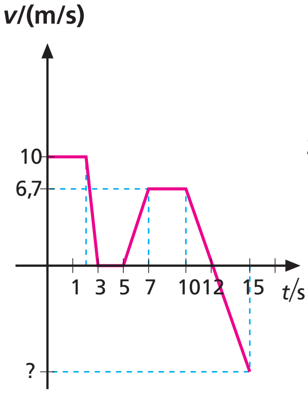
Entre 4 s y 6 s:

- $v_f = v_1 - a_2 t = 0$ m/s
- $s_3 = v_1 t - 1/2\ a_2 t^2 = 20$ m

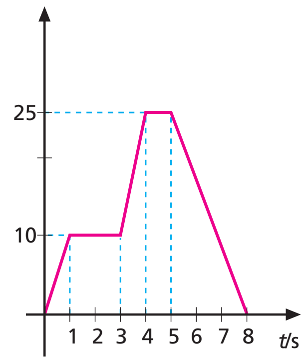
Así pues, el espacio total recorrido es de 80 m.

**8** **Interpreta las gráficas siguientes y calcula la velocidad, el espacio y la aceleración en cada etapa, así como el espacio total recorrido. Representa la correspondiente gráfica de aceleración en cada caso:**

**a)** ***v*/(m/s)**



b) ***v*/(m/s)**




Para resolver el problema gráfico, debemos tener en cuenta únicamente que en aquellos tramos en que la gráfica *v-t* es una recta horizontal, las expresiones que hay que usar son las de un MRU; en los tramos en los que la gráfica muestra pendiente deben emplearse las expresiones del MRUA.

## Movimientos en una dimensión

**9** **Un movimiento que transcurre con velocidad constante puede ser:**

**a) Solamente rectilíneo uniforme.**

**b) Rectilíneo uniforme o circular uniforme.**

**Razona la respuesta.**

La respuesta correcta es la **a)**. En el movimiento circular uniforme hay aceleración centrípeta.

**10** **Las ecuaciones del movimiento tienen que ser congruentes con los resultados físicos. Si es así, las ecuaciones del movimiento rectilíneo con aceleración constante, llevadas al caso en que $a = 0$, deben dar lugar a las ecuaciones del movimiento con velocidad constante. Demuéstralo.**

Si en las ecuaciones del movimiento rectilíneo con aceleración constante hacemos $a = 0$, obtendremos las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme: $v = v_0 \pm at$

Si $a = 0$, entonces $v = v_0$.

Es decir, la velocidad será constante e igual al valor inicial.

Por otra parte: $x = x_0 \pm v_0 t \pm 1/2\ at^2$

Si $a = 0$, entonces: $x = x_0 \pm v_0 t$

que es la ecuación de posición en un movimiento rectilíneo y uniforme.

**11** **Un protón con una velocidad inicial de $2{,}3 \cdot 10^7$ m/s entra en una zona donde sufre una aceleración contraria constante de $1{,}3 \cdot 10^{15}$ m/s$^2$. ¿Qué distancia recorre hasta que se detiene?**

El espacio recorrido por el protón hasta que su velocidad final sea cero, viene dado por la expresión:

$$x = v_0^2 / 2a$$

Sustituyendo los valores, se obtiene: $x = 20{,}3$ cm

**12** **Una persona está a punto de perder su tren. En un desesperado intento por alcanzarlo, corre a una velocidad constante de 6 m/s. Cuando está a 32 m del vagón de cola, el tren arranca con una aceleración constante de 0,5 m/s$^2$. ¿Logrará el viajero coger el tren o lo perderá?**

Mientras el tren recorre una distancia *x,* el viajero debe recorrer la distancia $32 + x$. El movimiento del tren es acelerado partiendo del reposo, y el del viajero es con velocidad constante. Así pues, sus ecuaciones de posición en función del tiempo son:

- Para el tren: $x = 1/2\ at^2$
- Para el viajero: $32 + x = vt$

Sustituyendo, obtenemos $32 + 1/2\ at^2 = vt$.

Las soluciones de *t* obtenidas son 8 s y 16 s. Por tanto, logrará dar alcance al tren a los 8 s.

## Movimientos acelerados en la naturaleza

**13** **Tres objetos, A, B y C, cuyas masas valen 10, 3 y 5 kg, respectivamente, son lanzados verticalmente hacia arriba con la misma velocidad. Ordénalos según la altura alcanzada.**

Los tres alcanzan la misma altura, ya que la altura máxima no depende de la masa.

**14** **Tres objetos, A, B y C, cuyas masas valen 10, 3 y 5 kg, respectivamente, son lanzados verticalmente hacia abajo desde cierta altura con la misma velocidad. Ordénalos según su llegada al suelo.**

Los tres llegan al suelo con la misma velocidad, puesto que son lanzados con la misma velocidad y desde la misma altura.

**15** **¿Ha aparecido la masa en alguna de las ecuaciones de los movimientos acelerados en la superficie terrestre? Razona la respuesta.**

No ha aparecido la masa, pues la aceleración de la gravedad es la misma independientemente de la masa del cuerpo en movimiento.

**16** **¿Cómo quedaría la expresión $v^2 = v_0^2 \pm 2a\ (x - x_0)$ en un caso de caída libre?**

En el movimiento de ascenso, tanto el peso como la fuerza de fricción se oponen al movimiento, por lo que la «deceleración» contraria al ascenso es mayor. En consecuencia, tarda menos en ascender hasta la máxima altura que luego en descender desde la altura máxima hasta el suelo; en este caso, la aceleración de descenso es la resultante de *g* menos la deceleración causada por la fricción.

Como la aceleración de descenso es menor que *g*, el valor de su velocidad al llegar al suelo será menor que la velocidad con que se lanzó.

**17** **Una persona situada a cierta altura sobre el suelo tira una pelota hacia arriba con una velocidad $v_0$ y, después, arroja otra hacia abajo con una velocidad $-v_0$. ¿Cuál de las dos pelotas tendrá mayor velocidad al llegar al suelo?**

Las dos llegarán al suelo con la misma velocidad. Para demostrarlo, basta con comprobar que la velocidad de la pelota que se ha tirado hacia arriba es igual a $-v_0$ cuando vuelve a pasar por el punto de lanzamiento. Dado que el tiempo que emplea desde que sale hasta que vuelve a pasar por el punto de lanzamiento es $t = 2\ v_0/g$, su velocidad en ese instante será:

$$v = v_0 - gt = v_0 - g\ (2\ v_0/g) = v_0 - 2\ v_0 = -v_0$$

Por tanto, dado que ambas pelotas tienen la misma velocidad descendente en el mismo punto, llegarán al suelo con la misma velocidad.

**18 Trata de razonar cómo afectaría la resistencia del aire a un lanzamiento vertical hacia arriba. ¿Tardaría el objeto lanzado más, menos o el mismo tiempo en ascender que en descender? La velocidad con que llegaría al suelo, ¿sería mayor, menor o igual que la del lanzamiento? Demuéstralo.**

En el movimiento de ascenso, tanto el peso como la fuerza de fricción se oponen al movimiento, por lo que la «deceleración» contraria al ascenso es mayor. En consecuencia, tarda menos en ascender hasta la máxima altura que luego en descender desde la altura máxima hasta el suelo; en este caso, la aceleración de descenso es la resultante de $g$ menos la deceleración causada por la fricción.

Como la aceleración de descenso es menor que $g$, el valor de su velocidad al llegar al suelo será menor que la velocidad con que se lanzó.

**19 ¿Cuál es la profundidad de un pozo si el impacto de una piedra se escucha al cabo de 1,5 s después de haberla dejado caer? Dato: $v_{sonido} = 340$ m/s.**

Debemos distinguir dos movimientos en el problema: la caída de la piedra, que tarda un tiempo $t$ en llegar al fondo, y el movimiento de propagación ascendente del sonido (uniforme), que tarda un tiempo $t'$ en llegar a nuestros oídos, recorriendo para ello la misma distancia, $h$ (profundidad del pozo). Es decir:

$$t + t' = 1{,}5 \text{ s}$$

Altura descendida por la piedra: $h = 1/2\ gt^2$ (caída libre).

Altura ascendida por el sonido: $h = v_{son}t'$ (MRU).

Como ambas alturas son iguales, entonces:

$$v_{son}t' = 1/2\ gt^2$$

Teniendo presente la relación entre ambos tiempos, podemos escribir:

$$v_{son}(1{,}5 - t) = 1/2\ gt^2$$

Resolviendo $t$, se obtiene:

$$t = 1{,}47 \text{ s}$$

Llevando este valor a la ecuación de altura, obtenemos la profundidad del pozo:

$$h = 10{,}58 \text{ m}$$

**20 Observa la siguiente contradicción: un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s se encontrará a 15 m al cabo de 3 s (compruébalo considerando $g = 10$ m/s²). Si ahora deseamos que alcance la misma altura, pero en la mitad de tiempo, nuestro sentido común nos dirá que lo lancemos con mayor velocidad. Calcula cuál debe ser esa velocidad. ¿No te sugiere el resultado obtenido que «quien va despacio llega lejos»? ¿Nos engañan las ecuaciones?**

Efectivamente, la velocidad así calculada sería de 17,5 m/s. Sin embargo, si ahora nos planteamos el problema a la inversa, es decir, si calculamos los tiempos correspondientes a una altura de 15 m para los valores de velocidad dados, descubriremos la «trampa» de la pregunta.

Si en la ecuación $y = v_0t - 1/2\ gt^2$ introducimos ahora la altura de 15 m y si calculamos los tiempos usando las velocidades iniciales de 20 m/s y 17,5 m/s, obtenemos:

$$\text{para } v_0 = 20 \text{ m/s} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s};\ t_2 = 3 \text{ s}$$

$$\text{para } v_0 = 17{,}5 \text{ m/s} \Rightarrow t_1 = 1{,}5 \text{ s};\ t_2 = 2 \text{ s}$$

¡Ahora todo encaja! En el primer caso, se había elegido el tiempo que pasa por esa altura, pero en descenso. Sin embargo, en el ascenso pasa por esa altura al cabo de 1 s, es decir, tarda menos en llegar a la misma altura al ser lanzado con mayor velocidad.

**21 Desde igual altura y al mismo tiempo, se lanzan dos objetos con idéntica velocidad inicial: uno hacia arriba y otro hacia abajo. Si el primero tarda 5 s más en llegar al suelo, ¿con qué velocidad fueron lanzados?**

Si los dos objetos tienen el mismo valor de velocidad inicial en el punto de partida y el primero cae 5 s después que el segundo, entonces el primero ha tardado 5 s en completar el movimiento de ascenso y descenso hasta volver a pasar por el punto de partida, ya que en este momento tendrá la misma velocidad que el que se lanzó hacia abajo. Por tanto, si consideramos únicamente ese tramo de ascenso-descenso, y dado que el tiempo total que tarda en completarlo es de 5 s, resulta:

$$t = \frac{2v_0}{g} = 5 \text{ s}$$

de donde se obtiene que:

$$v_0 = 24{,}5 \text{ m/s}$$

**22 Si lanzas una pelota verticalmente hacia arriba estando tu mano a 1,4 m de altura en el instante en que la pelota despega, y cae al suelo al cabo de 4,5 s:**

**a) ¿Qué velocidad comunicaste a la pelota?**

**b) ¿A qué altura ascendió?**

a) Una vez que cae al suelo, su altura es cero. Dado que se trata de un problema de lanzamiento vertical desde una altura inicial, usamos las expresiones pertinentes de dicho movimiento. Haciendo cero la altura, obtenemos la velocidad inicial del lanzamiento:

$$y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$1{,}4 = v_0 \cdot 4{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 4{,}5^2 = 0$$

de donde se obtiene, despejando: $v_0 = 21{,}7$ m/s

b) En la máxima altura, la velocidad se hace instantáneamente cero, lo que permite obtener el tiempo transcurrido hasta que eso sucede:

$$v = v_0 - gt = 0 \Rightarrow t_{y_{máx}} = 2{,}2 \text{ s}$$

que sustituido en la expresión de altura considerada anteriormente, conduce a un valor de altura máxima:

$$y_{máx} = 25{,}4 \text{ m}$$

**23 Una bola se deja caer desde 10 m de altura y, tras rebotar en el suelo, asciende hasta 6,5 m. Determina con qué velocidad llega al suelo y con cuál sale tras el primer rebote.**

De las ecuaciones generales del movimiento se obtiene que para una caída libre:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Sustituimos los datos:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14 \text{ m/s}$$

Para el ascenso usamos la misma ecuación:

$$v' = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6{,}5} = 11{,}3 \text{ m/s}$$

**24** **Un individuo situado a 60 m sobre el suelo ve subir (y pasar por delante de él) un cuerpo lanzado desde abajo, y 8 s después lo ve bajar. ¿Con qué velocidad fue lanzado?**

Si consideramos el tramo de movimiento que transcurre desde que el cuerpo pasa en ascenso delante del individuo hasta que vuelve a pasar, pero en descenso, podemos calcular qué velocidad lleva en esa altura. Para ello, lo consideraremos como un lanzamiento vertical que tarda 8 s en volver a caer.

Como ese tiempo es:

$$t = \frac{2v}{g} \Rightarrow v = \frac{tg}{2} = 39{,}2 \text{ m/s}$$

Es decir, cuando alcanza los 60 m, tiene una velocidad de 39,2 m/s. Ello nos permite calcular la velocidad con que fue lanzado, usando la expresión:

$$v^2 = v_0^2 - 2gy \Rightarrow v_0^2 = v^2 + 2gy$$

Obtenemos, así: $v_0 = 52{,}08$ m/s

**25** **Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s, y un segundo después se lanza otro con la misma velocidad inicial. ¿A qué altura se cruzarán y cuánto tiempo habrá transcurrido en ese instante desde que se lanzó el primero?**

Si llamamos y a la altura a la que se cruzan, para el primer cuerpo:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = 20t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ t^2$$

Para el segundo cuerpo, la altura será, lógicamente, la misma pero el tiempo será de $t = 1$, luego:

$$y = 20\ (t-1) - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ (t-1)^2$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenemos:

$$y = 19{,}2 \text{ m} \ ; \ t = 2{,}54 \text{ s}$$

**26** **Una pelota que se deja caer desde cierta altura, tarda 0,3 s en recorrer los 1,40 m de altura de una ventana. Si el alféizar de la ventana se encuentra a 10 m del suelo, ¿desde qué altura se dejó caer la pelota?**

Como se aprecia en la figura, la altura $h$ de la ventana es igual a la diferencia de las alturas de la pelota entre el extremo superior de la ventana (dintel) y el inferior (alféizar). Si la altura del edificio es $y_o$ entonces:

$$h = y_1 - y_2 =$$
$$= \left(y_o - \frac{1}{2} g t_1^2\right) - \left(y_o - \frac{1}{2} g t_2^2\right)$$

Donde $t_1$ es el tiempo que tarda la pelota en llegar hasta el dintel de la ventana, mientras que $t_2$ es el tiempo que invierte en llegar hasta el alféizar. Teniendo en cuenta que

$$t_2 = t_1 + 0{,}3$$

Y resolviendo la ecuación en función de $t_1$ se obtiene:

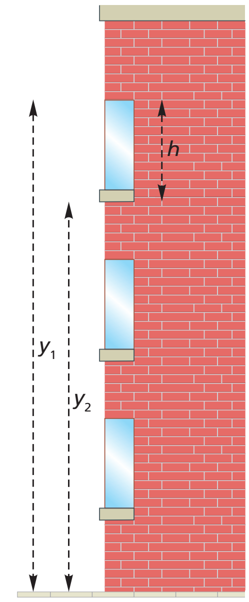
$$t_1 = 0{,}32 \text{ s}$$

En consecuencia, la altura desde el dintel hasta la cornisa del edificio será:

$$y_o - y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = 0{,}5 \text{ m}$$

Altura que debemos sumar a los 11,4 m que hay desde el suelo hasta el dintel. Por tanto, la altura del edificio hasta ese punto es:

$y_o = 11{,}9$ m




## Movimientos en dos dimensiones

**27** **Tres objetos, A, B y C, cuyas masas valen 10, 3 y 5 kg, respectivamente, son lanzados horizontalmente con la misma velocidad. Ordénalos según su alcance. Razona la respuesta.**

Todos alcanzan la misma distancia horizontal, debido a que el alcance máximo no depende de la masa.

**28** **Siguiendo con la congruencia de las ecuaciones, demuestra que las expresiones que permiten calcular la altura máxima, el tiempo que tarda en alcanzar esa altura máxima y el tiempo de vuelo de un movimiento parabólico, coinciden con las de un lanzamiento vertical, si se considera un ángulo de 90°.**

**a)** La expresión de altura máxima en los movimientos parabólicos viene dada por:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \ \text{sen}^2 \alpha}{2g}$$

Si $\alpha = 90°$, entonces $\text{sen}^2\alpha = 1$, por lo que obtendríamos la expresión de máxima altura de un lanzamiento vertical, que es:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}$$

**b)** El tiempo que se tarda en alcanzar la máxima altura, en un movimiento parabólico, viene dado por:

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \ \text{sen}\ \alpha}{g}$$

Si el ángulo es de 90°, resulta la expresión correspondiente al lanzamiento vertical:

$$t = \frac{v_{0y}}{g}$$

**c)** En el caso del tiempo que se tarda en llegar al suelo, ocurre exactamente lo mismo que en el caso **b)**, con la diferencia de que el tiempo de vuelo es el doble que el que se tarda en alcanzar la máxima altura.

**29** **Un objeto de 5 kg de masa se deja caer desde cierta altura. A la vez, y desde la misma altura, otros dos objetos, uno de 3 kg y otro de 10 kg, son lanzados en sentido horizontal con velocidades de 5 y 15 m/s, respectivamente. ¿Sabrías ordenar los cuerpos según su llegada al suelo?**

El objetivo de esta cuestión es incidir en las consecuencias que se derivan de considerar los movimientos parabólicos (en este caso el lanzamiento horizontal) como una composición de movimientos. De la idea de la composición se desprende que el tiempo que tardan en llegar al suelo es el mismo, pues es el mismo que tardarían en llegar cayendo libremente (conviene ilustrar la cuestión haciendo referencia a la figura 10.23). Por tanto, los valores de masas o velocidades iniciales horizontales carecen de relevancia.

**30** **¿Cómo podrías determinar la altura de un cerro disponiendo solo de un reloj y de las piedras del suelo?**

Lanzaríamos la piedra horizontalmente, de modo que llegase hasta la base del cerro. Con el reloj cronometraríamos el tiempo de caída, que, por composición de movimientos, sería el mismo que el que invertiría en descender la altura del cerro en caída libre. De ese modo, la altura será:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

**31** **¿Con qué ángulo deberíamos despegar en un salto de longitud para que la altura y el alcance fuesen iguales?**

Debe cumplirse que:

$$x_{\text{máx}} = y_{\text{máx}} \Rightarrow \frac{v_0^2 \ \text{sen}\ 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \ \text{sen}^2\ \alpha}{2g}$$

De esta igualdad se desprende que:

$$2 \ \text{sen}\ 2\ \alpha = \text{sen}^2\ \alpha$$

Desarrollándola obtendremos:

$$4 \ \text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha = \text{sen}^2\ \alpha$$

Esto nos conduce como solución a:

$$\text{tg}\ \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 76°$$

**32** **Si fueras entrenador de atletismo, y teniendo en cuenta que un mismo alcance se puede lograr con dos ángulos distintos, ¿cuál de los dos recomendarías a un saltador de longitud, el mayor o el menor? ¿Por qué?**

El menor, ya que debemos tener en cuenta que la velocidad de despegue debe ser la misma. Sin embargo, es más fácil lograr una velocidad mayor con un ángulo de inclinación menor, pues su valor vendrá marcado fundamentalmente por la velocidad de carrera ($v_{0x}$), aspecto que nos es más fácil controlar. Por el contrario, si deseamos lograr esa misma velocidad de despegue con un ángulo mayor, debemos conseguir un gran impulso más vertical (aumentar $v_{0y}$), para lo que hemos de vencer nuestro propio peso.

**33** **¿En qué punto de una trayectoria parabólica es menor la velocidad? ¿Por qué?**

En el punto de altura máxima, pues en todos los puntos la velocidad resulta de componer la velocidad de avance ($v_{0x}$ constante) con la velocidad de ascenso-descenso ($v_{0y}$ variable).

Sin embargo, en el punto de máxima altura, la única componente que actúa es $v_{0x}$.

**34** **Un niño sentado en un vagón de tren que viaja a velocidad constante lanza una pelota hacia arriba. ¿Cuál de las escenas siguientes tendrá lugar?**

**a)** **La pelota caerá sobre los ocupantes del asiento de delante.**

**b)** **Golpeará en el periódico del viajero de atrás.**

**c)** **Volverá a caer en las manos del niño.**

La opción correcta es la **c)**, pues la pelota, al ser lanzada, lleva la velocidad horizontal del tren. En consecuencia, su movimiento es la composición del movimiento de lanzamiento vertical y del movimiento del tren. Así pues, cuando caiga, habrá recorrido la misma distancia horizontal que el tren y el niño.

**35** **¿Cómo podríamos calcular, sirviéndonos de una regla, la velocidad de caída (damos por supuesto que vertical) de las gotas de lluvia a partir del trazo oblicuo que dejan en las ventanillas laterales de un vehículo que se mueve con velocidad conocida?**

El trazo oblicuo que dejan surge de componer la velocidad propia de caída y la velocidad de movimiento del vehículo.

Así pues, el trazo oblicuo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos horizontal y vertical representan, respectivamente, la velocidad del coche y la velocidad de caída de la gota. De este modo, midiendo con la regla los trazos y los catetos, y conociendo la equivalencia entre la velocidad del coche y la longitud del cateto horizontal, es posible deducir a partir del valor del cateto vertical a qué velocidad corresponde.

**36** **¿Qué velocidad comunica la pértiga a un saltador que bate una marca de 6,04 m si el ángulo de despegue es de 82°?**

La marca es la máxima altura que alcanza. Por tanto, a partir de $y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \ \text{sen}^2\ \alpha}{2g}$ obtenemos que la velocidad que la pértiga comunica la saltador, $v_0$, es 10,98 m/s.

**37** **Un motorista pretende saltar una fila de camiones dispuestos a lo largo de 45 m. La rampa de despegue es de 20°, y quiere aterrizar en otra rampa similar de la misma altura. Si en el momento del despegue su velocímetro marcaba 90 km/h, ¿cuál es el futuro inmediato del intrépido motorista, la gloria o el hospital? Demuéstralo.**

Si determinamos el alcance que logrará a partir de la expresión $x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \ \text{sen}\ 2\alpha}{g}$, vemos que aterrizará a 41 m, por lo cual su futuro inmediato será el hospital.

**38** **Un experto lanzador «a balón parado» se dispone a ejecutar el saque de una falta desde una distancia de 20 m con respecto a la portería. La barrera de**

**jugadores contrarios está a 9 m y su altura media es de 1,80 m. La velocidad de salida del balón en dirección a la portería, que forma 15° con el suelo, es de 90 km/h. ¿Será gol? ¿Y si los jugadores de la barrera, temiendo el balonazo, se agachan?**

**a)** Con los datos ofrecidos, lo primero que debemos determinar es si al recorrer los 9 m que le separan de la barrera, el balón tendrá altura suficiente para superar la de los jugadores. Las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial, en m/s, son:

$$v_{0x} = 25 \cdot \cos\ 15° = 24{,}15\ \text{m/s}$$
$$v_{0y} = 25 \cdot \text{sen}\ 15° = 6{,}47\ \text{m/s}$$

El tiempo que tarda el balón en recorrer la distancia de 9 m lo podemos deducir a partir de:

$$x = v_{0x}\ t \Rightarrow t = 0{,}37\ \text{s}$$

La altura que llevará el balón se calcula a partir de la expresión ; en el tiempo indicado es de 1,72 m. Por tanto, no superará la barrera.

**b)** Suponiendo que la barrera no ha servido para nada, podemos repetir el procedimiento, ahora en el caso en que $x = 20$ m. Obtenemos, de ese modo, que el tiempo que tardaría el balón en alcanzar la portería es de 0,83 s. Si calculamos la altura correspondiente a ese tiempo usando la expresión anterior, obtenemos que es de 1,99 m, es decir, por debajo del larguero. Por tanto, es gol.

**39** **Viajando en coche a 54 km/h, bajo un aguacero y en ausencia de viento, observamos que las gotas de lluvia dejan unas trazas de 4 cm de largo que forman un ángulo de 60° con la vertical en las ventanillas laterales. ¿Cuál es la velocidad de caída de las gotas de agua?**

La componente horizontal del trazo, producida por el movimiento del coche, mide 4 · sen 60° = 3,46 cm, mientras que la componente vertical, que corresponde a la caída de la gota, mide 4 · cos 60° = 2 cm. Como el trazo de 3,46 cm corresponde a una velocidad de 54 km/h, por una simple proporcionalidad obtenemos la velocidad de caída de las gotas:

$$v_{\text{caída}} = \frac{54\ \text{km/h} \cdot 2\ \text{cm}}{3{,}46\ \text{cm}} = 31{,}17\ \text{km/h}$$

**40** **Una persona salta en caída libre desde un helicóptero que vuela a 90 km/h y a 30 m de altura. Debe caer sobre unas colchonetas a bordo de un barco que viaja a 54 km/h en su mismo sentido. ¿A qué distancia horizontal tendrá que estar el barco en el momento del salto? ¿Y si el barco y el helicóptero se mueven en sentidos opuestos?**

La persona que salta está dotada de la velocidad del helicóptero y, por tanto, recorrerá la misma distancia horizontal que este en el mismo tiempo. Como la velocidad del barco es menor, mientras este recorre la distancia *x*, la persona (y el helicóptero) recorrerán la distancia horizontal $d + x$, donde *d* es la distancia que nos pide el problema. Por tanto, en el tiempo *t*:

- Distancia recorrida por el barco: $x = v_{\text{barco}} t = 15t$
- Distancia recorrida por la persona: $d + x = v_{\text{hel}} t = 25t$

Por consiguiente: $d + 15t = 25t$

Dado que el tiempo que tarda en caer al barco es el mismo que tardaría en caída libre:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2{,}47\ \text{s}$$

Sustituyendo este valor de tiempo, obtenemos que:

$$d = 24{,}74\ \text{m}$$

Si se mueven en sentidos opuestos el barco se debe encontrar a 98,8 m.

**41** **Una partícula, localizada inicialmente en el origen, tiene una aceleración de $3\vec{j}$ m/s² y una velocidad inicial de $5\vec{i}$ m/s.**

**a) ¿Qué tipo de movimiento describe?**

**b) Expresa los vectores de posición y velocidad en función del tiempo.**

**c) Calcula el desplazamiento y el módulo de su velocidad a los 2 s.**

**a)** Es parabólico, pues a la velocidad inicial en la dirección *X* habrá que componer la velocidad en aumento que adquiere en la dirección *Y*, debido a la aceleración que actúa en dicha dirección.

**b)** Las componentes *x* e *y* del vector de posición vienen dadas, en función del tiempo, por:

$$x = v_0 t = 5t\ \text{m}$$
$$y = \frac{1}{2} a\ t^2 = 1{,}5\ t^2\ \text{m}$$

Por tanto, el vector de posición será:

$$\vec{r} = 5t\vec{i} + 1{,}5t^2\vec{j}\ \text{m}$$

Derivando el vector de posición, obtenemos el vector velocidad:

$$\vec{v} = 5\vec{i} + 3t\vec{j} = \text{m/s}$$

**c)** El desplazamiento a los 2 s será:

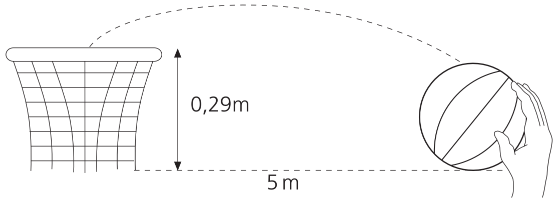
$$\Delta r = \vec{r}(2) - \vec{r}(0) = 10\vec{i} + 6\vec{j}\ \text{m}$$

Su módulo es 11,66 m.

La velocidad de la partícula a los 2 s es $\vec{v} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$ m/s siendo su módulo igual a 7,81 m/s.

**42** **Dos equipos de baloncesto están empatados a puntos; instantes antes de que finalice el partido y, de repente, un jugador lanza el balón a canasta con una velocidad inicial de 8 m/s y formando un ángulo con la horizontal de 30°. La canasta está a 3 m de altura sobre un punto que dista del jugador 5 m. Indica si su equipo ha ganado el partido sabiendo que el jugador, con los brazos estirados, lanzó el balón desde una altura de 2,71 m.**

El siguiente dibujo ilustra la situación descrita en el enunciado: la canasta queda 0,29 m por encima del punto de lanzamiento y a una distancia horizontal de 5 m. Por tanto, se trataría de determinar el tiempo que tarda en estar a 0,29 m de altura, pero en el movimiento de descenso de la parábola, que es como entran las canastas. Calculado dicho tiempo, hallaremos a qué distancia horizontal se encuentra la pelota en ese momento; si resulta ser de 5 m más o menos, se habrá hecho canasta.




$$y = v_{0y}t - 1/2\ gt^2$$

$$0,29 = 8 \cdot \text{sen}\ 30° \cdot t - 4,9\ t^2$$

Despejando $t$ de descenso (el mayor de los valores), obtenemos $t = 0,73$ s. Calculando ahora la distancia horizontal:

$$x = v_{0x}t = 8 \cdot \cos\ 30° \cdot 0,73 = 5,05\ \text{m}$$

Es decir… ¡canasta!

## Movimientos circulares

**43** **Si la velocidad angular de un cuerpo que gira se triplica, ¿qué le ocurre a su aceleración centrípeta?**

Se hace nueve veces mayor.

**44** **¿Por qué los *sprinters* del ciclismo llevan un piñón muy pequeño, además de los habituales? Explica su fundamento físico.**

La velocidad lineal a la que gira el piñón es la misma que la velocidad lineal a la que gira el plato grande que usan estos ciclistas, debido a que están unidos por la misma cadena. Sin embargo, el pequeño radio del piñón hace que gire a una gran velocidad angular, pues $\omega = v/r$. Como el movimiento de la rueda trasera está ligado al movimiento del piñón, conseguirán una gran velocidad.

**45** **Las ruedas traseras de un tractor son de mayor radio que las delanteras. Cuando el tractor está en movimiento, ¿cuáles tienen mayor velocidad lineal, mayor velocidad angular, mayor período y mayor frecuencia? Razona tus respuestas.**

La velocidad lineal de ambas ruedas es la misma, pues ambas recorren, como es lógico, el mismo espacio en el movimiento conjunto del tractor. Sin embargo, de la igualdad $v = \omega r$ se desprende que la de menor radio (la pequeña o delantera) gira con mayor velocidad angular y da más vueltas para recorrer el mismo espacio. Por tanto, como: $T = 2\pi/\omega$ su período será menor y su frecuencia de giro mayor.

**46** **Un tractor tiene unas ruedas delanteras de 30 cm de radio y las traseras de 1 m. ¿Cuántas vueltas habrán dado las ruedas traseras cuando las delanteras hayan completado 15 vueltas?**

Como la velocidad lineal a la que se desplazan ambas ruedas es la misma, se cumplirá que:

$$\omega_1 r = \omega_2 R$$

donde $r$ y $R$ son los radios de la rueda menor y mayor, respectivamente. La igualdad anterior puede expresarse en función del ángulo girado o número de vueltas, de modo que:

$$\frac{\theta_1 \cdot r}{t} = \frac{\theta_2 \cdot R}{t}$$

Por tanto:

$$\theta_2 = \frac{\theta_1 \cdot r}{R}$$

Al introducir los datos, se comprueba que las ruedas traseras han dado 4,5 vueltas.

**47** **Una cinta magnetofónica de 90 min de duración tiene al inicio una rueda libre cuyo radio es de 1,2 cm y otra que, con toda la cinta arrollada, tiene un radio de 2,5 cm. Al comenzar la audición, la rueda pequeña da 7 vueltas en 10 s.**

**a)** **¿Cuál es su velocidad angular?**

**b)** **¿Y su velocidad lineal?**

**c)** **¿Cuál es la velocidad angular de la rueda grande?**

**d)** **¿Cuántas vueltas habrá dado en los 10 s iniciales?**

**e)** **¿Qué magnitud permanece constante a lo largo de la audición?**

**f)** **¿Cuánto mide una cinta de 90 m?**

**a)** La rueda pequeña da 0,7 vueltas cada segundo, por lo que su velocidad angular es:

$$\omega = 0,7 \cdot 2\pi = 4,39\ \text{rad/s}$$

**b)** Su velocidad lineal es:

$$v = \omega r = 5,27\ \text{rad/s}$$

**c)** Dado que la velocidad lineal de ambas ruedas es la misma, pues la cinta es inextensible:

$$\omega_1 r = \omega_2 R \Rightarrow \omega_2 = 2,11\ \text{rad/s}$$

**d)** El ángulo que habrá girado dicha rueda en 10 s será:

$$\theta = \omega_2 t = 21,11\ \text{rad}$$

que corresponde a 3,35 vueltas.

**e)** La magnitud cuyo valor permanece constante en el transcurso de la audición de la cinta es la velocidad lineal.

**f)** En cuanto a lo que mide la cinta, hemos de tener en cuenta que cada cara dura 45 min, es decir, 2700 s. Puesto que la velocidad lineal es de 5,27 cm/s, la longitud total de la cinta será de:

$$l = vt = 142,3\ \text{m}$$

**48** **Una rueda de 0,5 m de radio gira con un período de 0,6 s. Determina la aceleración centrípeta de los puntos de su periferia.**

Recordamos que la aceleración centrípeta $a_c = \dfrac{v^2}{R}$; por otro lado, la velocidad angular, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ donde $T$ es el período.

Por último, la velocidad lineal de cualquier punto en un movimiento circular es $v = \omega R$.

Con todos estos datos:

$$a_c = \frac{\left(\frac{2\pi}{T} \cdot R\right)^2}{R}$$

Sustituyendo obtenemos: $a_c = 54,8\ \text{m/s}^2$

**49** **Un ciclista marcha con su bicicleta de montaña, cuyas ruedas tienen un diámetro de 26 pulgadas, a una velocidad constante de 25 km/h.**

**a)** **¿Cuántas vueltas habrán dado sus ruedas en 15 min?**

**b)** **¿Cuál es el radio de dichas ruedas?**

**c)** **¿Qué velocidad angular llevan?**

**d)** **¿Cuál es su período y su frecuencia mientras giran de esa manera?**

**Dato: 1 pulgada = 2,54 cm**

**a)** Como una pulgada son 2,54 cm, el diámetro de la rueda es de 66,04 cm, por lo que la longitud de la rueda es de 207,5 cm o 2,075 m.

**b)** Marchando a la velocidad dada de 6,94 m/s, la distancia recorrida por las ruedas al cabo de 15 min será de:

$$d = vt = 6250 \text{ m} = 6{,}25 \text{ km}$$

**c)** Puesto que en cada vuelta las ruedas recorren 2,075 m, en esos 15 min habrán efectuado 3012,5 vueltas.

**d)** El radio de las ruedas es de 33,02 cm, y su velocidad angular es:

$$\omega = \frac{v}{t} = 21{,}03 \text{ rad/s}$$

Por consiguiente, su período es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} 0{,}29 \text{ s}$$

Dado que la frecuencia es la inversa del período, su valor es 3,34 $s^{-1}$.

**50** **Por la periferia de una pista circular parten a la vez, del mismo punto y en direcciones opuestas, dos móviles con velocidades de 4 rpm y 1,5 rpm, respectivamente. ¿En qué punto se encontrarán y qué tiempo habrá transcurrido?**

Al cabo de un tiempo, $t$, un móvil habrá descrito un ángulo $\theta$, mientras que el otro habrá descrito un ángulo $2\pi - \theta$, por lo que:

$$\theta = \omega_1 t = 4(2\pi/60)t = (8\pi/60)t \text{ rad}$$

$$2\pi - \theta = 1{,}5(2\pi/60)t = (3\pi/60)t \text{ rad}$$

Sustituyendo la primera igualdad en la segunda, y despejando el tiempo, se obtiene:

$$t = 10{,}9 \text{ s}$$

Llevando este valor a la primera ecuación, observamos que el punto de encuentro es aquel en el que $\theta = 4{,}57$ rad o 262°.

**51** **Un cuerpo que describe círculos de 10 cm de radio está sometido a una aceleración centrípeta cuyo módulo constante en cm/s² es, numéricamente, el doble del módulo de su velocidad lineal expresada en cm/s. Determina los módulos, direcciones y sentidos de los vectores $\vec{a}_c$, $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$ y el número de vueltas que dará el móvil en 1 min.**

La condición expuesta en el enunciado es que:

$$a_c = 2v \Rightarrow v = \frac{a_c}{2}$$

A su vez:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{a_c^2}{4r}$$

Por tanto:

$$a_c = 4r = 40 \text{ cm/s}^2$$

En consecuencia, $v = 20$ cm/s.

Como $\omega = \frac{v}{r}$, entonces:

$$\omega = 2 \text{ rad/s}$$

A su vez, para calcular el número de vueltas que dará en 1 min, se halla el ángulo descrito:

$$\theta = \omega t = 120 \text{ rad} = 19 \text{ vueltas}$$

La $\vec{a}_c$ está dirigida hacia el centro de la circunferencia, y $\vec{v}$ tiene dirección tangencial, con sentido horario o antihorario. Si $\vec{v}$ tiene sentido horario, $\vec{\omega}$ está dirigida perpendicularmente al plano del papel y hacia dentro; si $\vec{v}$ tiene sentido antihorario, $\vec{\omega}$ tendrá dirección perpendicular al papel y sentido hacia fuera.

**52** **Una máquina de equilibrado de ruedas de coche hace que estas giren a 900 rpm. Cuando se desconecta, la rueda sigue girando durante medio minuto más, hasta que se para.**

**a)** **¿Cuál es la aceleración angular de frenado?**

**b)** **¿Qué velocidad angular tendrá la rueda a los 20 s de la desconexión?**

**c)** La velocidad angular inicial, expresada en rad/s, es de 30 $\pi$ rad/s. En el instante en que se para, la velocidad angular es cero, por lo que, procediendo de la misma manera que en el problema anterior, obtenemos:

$$\alpha = 3{,}14 \text{ rad/s}^2$$

**d)** Conocida la aceleración angular de frenado, usamos la misma expresión para hallar la velocidad angular a los 20 s:

$$\omega = 31{,}4 \text{ rad/s}$$

**53** **Una pelota atada a una cuerda de 1 m de radio describe círculos con una frecuencia de 10 $s^{-1}$ en un plano horizontal a una altura de 3 m sobre el suelo. Si en cierto instante se rompe la cuerda:**

**a)** **¿A qué distancia, medida desde la base vertical del punto de lanzamiento, aterriza la pelota?**

**b)** **¿Saldrá indemne un niño de 1,2 m de altura que observa el vuelo de la pelota 10 m antes del punto de aterrizaje en el plano de la trayectoria?**

De los datos del problema parece fácil adivinar que el movimiento que animará la pelota, una vez rota la cuerda, es el de un tiro horizontal cuya $v_{0x}$ será la velocidad lineal de la pelota en el instante de salir despedida. Puesto que conocemos la relación entre frecuencia y velocidad angular ($\omega = 2\pi\nu$) y, además, la relación entre velocidad angular y velocidad lineal ($v = \omega R$):

$$v_{0x} = 2\pi\nu R = 2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ m} = 62{,}8 \text{ m/s}$$

Por otro lado, para el tratamiento de la componente vertical, aplicamos la ecuación de una caída libre y calculamos el tiempo que el objeto está cayendo:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}78 \text{ m}$$

introduciendo este tiempo en la ecuación de la componente horizontal:

$$x = v_{0x}t = 62{,}8 \text{ m/s} \cdot 0{,}78 \text{ s} = 49 \text{ m}$$

Por otra parte, podemos calcular la altura a la que estará la pelota a los 10 m de la base de lanzamiento. Para ello, en la ecuación del movimiento horizontal calculamos el tiempo para $x$ = 10 m y el resultado obtenido lo insertamos en la ecuación del movimiento vertical para hallar la altura. Lamentablemente, los 1,11 m del suelo que obtenemos garantizan que el niño acabará con un fuerte pelotazo.

**54** **Un disco de vinilo gira a 33 rpm. Al desconectar el tocadiscos, tarda 5 s en parar.**

**a) ¿Cuál ha sido la aceleración angular de frenado?**

**b) ¿Cuántas vueltas ha dado hasta pararse?**

Cuando se para, la velocidad angular será cero:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 \Rightarrow a = \frac{-\omega_0}{t} = -0{,}69 \text{ rad/s}^2$$

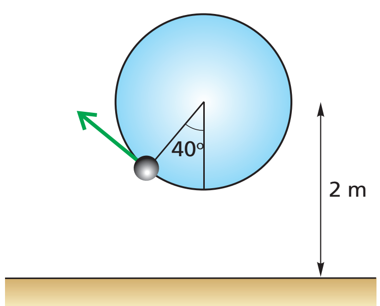
Para ello, hemos expresado previamente la velocidad angular inicial en rad/s, con lo que resulta 3,45 rad/s. Calculando ahora, a partir de la expresión , el ángulo que ha girado hasta pararse, determinamos el número de vueltas:

$$\theta = 8{,}6 \text{ rad} \Rightarrow 1{,}37 \text{ vueltas}$$

**55** **Un disco de 1 m de radio gira en un plano vertical a 300 rpm, estando su centro situado a 2 m de altura del suelo. En su periferia lleva adherida una pequeña bola de acero que se despega y sale despedida justo cuando su radio forma 40°, después de sobrepasar la vertical inferior, como se indica en la figura. Determina:**

**a) A qué distancia cae del suelo.**

**b) A qué altura máxima asciende.**




a) La velocidad angular de la pelota es de 10$\pi$ rad/s, por lo que la velocidad inicial con que sale despedida ésta es igual a:

$$v_o = \omega \cdot r = 31{,}4 \text{ m/s}$$

Cuyas componentes cartesianas, como se desprende de la geometría del problema, son:

$$v_{ox} = v_o \cos 40 = 24{,}05 \text{ m/s}$$
$$v_{oy} = v_o \operatorname{sen} 40 = 20{,}2 \text{ m/s}$$

Por otra parte, la altura inicial de la pelota en el momento en que sale disparada es:

$$y_o = 2 - 1 \cdot \cos 40 = 1{,}23 \text{ m}$$

Por tanto, a partir de la ruptura de la cuerda, tenemos un problema de movimiento parabólico desde esa altura inicial, siendo su ecuación de altura:

$$y = y_o + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

La distancia a la que cae al suelo corresponde al momento en que $y = 0$. Igualando la anterior ecuación a cero y despejando el tiempo, se obtiene:

$$t = 4{,}18 \text{ s}$$

Por lo que el alcance, desde el punto de salida de la pelota es de:

$$x = v_{ox} t = 100{,}5 \text{ m}$$

b) La altura máxima a la que asciende corresponde al momento en que $v_y = 0$. Puesto que:

$$v_y = v_{oy} - gt = 0$$

esto sucede cuando $t = 2{,}06$ s

Sustituyendo este tiempo en la ecuación de altura

$$y = y_o + v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

se obtiene que:

$$y_m = 22 \text{ m}$$

**56** **El vector de posición de un cuerpo que se mueve con movimiento circular uniforme viene dado por la ecuación:**

$$\vec{r} = 4\cos(0{,}5 + 3t)\vec{i} + 4\operatorname{sen}(0{,}5 + 3t)\vec{j} \text{ m}$$

**Determina:**

**a) El radio de la circunferencia.**

**b) La posición angular inicial $\theta_0$ en radianes.**

**c) El vector de posición inicial. Demuestra que su módulo es el radio de la circunferencia.**

**d) La velocidad angular, así como el período y la frecuencia.**

**e) El vector velocidad en función del tiempo y su módulo.**

**f) Con los datos de los apartados a), d) y e), verifica que se cumple la relación $v = \omega r$.**

El argumento del seno y del coseno es el ángulo o posición angular en radianes del cuerpo. es decir:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \cdot r = 0{,}5 + 3t$$

a) La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$. En nuestro caso:

$$x^2 + y^2 = 16\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) = 16$$

En consecuencia, el radio es igual a 4 m.

b) Por lectura directa a partir del argumento, el valor de la posición angular inicial (en $t$=0) es de 0,5 rad.

c) El vector de posición inicial viene dado por:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = 4\cos 0{,}5\vec{\boldsymbol{i}} + 4 \; sen \; 0{,}5\vec{\boldsymbol{j}} \text{ m}$$

cuyo módulo es justamente 4 m, que corresponde al radio de la circunferencia.

d) La velocidad angular es el factor que multiplica al tiempo en el argumento de las razones trigonométricas, siendo:

$$\omega = 3 \text{ rad/s}$$

En consecuencia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3} \text{ s} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 0{,}48 \text{ s}^{-1}$$

**e)** El vector velocidad se obtiene derivando el vector de posición. Por tanto:

$$\vec{v} = -12\,\text{sen}(0{,}5 + 3t)\vec{i} + 12\cos(0{,}5 + 3t)\vec{j} \text{ m/s}$$

Cuyo módulo es $v = 12$ m/s.

**f)** Como se observa, se cumple que $v = \omega \cdot r$.

**57** **Un volante de 2 dm de diámetro gira en torno a su eje a 3000 rpm; un freno lo para a 20 s. Calcula:**

**a)** **La aceleración angular.**

**b)** **El número de vueltas que da hasta pararse.**

**c)** **La aceleración normal y total de un punto de su periferia una vez que ha dado 100 vueltas.**

**a)** La velocidad angular inicial con la que gira el volante es de 100 $\pi$ rad/s = 314,16 rad/s.

Aplicando la expresión $\omega = \omega_0 + \alpha t$, y teniendo en cuenta que, cuando se para, $\omega = 0$, obtenemos:

$$a = -5\pi \text{ rad/s}^2$$

**b)** Aplicando la expresión y dividiendo el resultado entre $2\pi$ rad/vuelta, comprobamos que el volante ha dado 500 vueltas hasta que se para.

**c)** El ángulo descrito cuando se han efectuado 100 vueltas es de 200 $\pi$ rad.

Empleando la expresión anterior, podemos calcular el tiempo empleado en describir dicho ángulo, que resulta ser de 2,11 s. La velocidad angular que lleva el volante en ese instante es de 281 rad/s, por lo que:

$$a_c = \omega^2 r = 7895{,}7 \text{ m/s}^2$$

Por su parte, la aceleración tangencial es:

$$a_c = \alpha r = 1{,}57 \text{ m/s}^2$$

De este modo la aceleración total resulta ser:

$$a = 7895{,}7 \text{ m/s}^2$$

## SOLUCIONES DE LA EVALUACIÓN (página 267)

**1. Dos vehículos, A y B, parten uno al encuentro del otro desde dos localidades que distan entre sí 400 km. El vehículo A viaja a 100 km/h y el B, que inicia el viaje un cuarto de hora después, lo hace a 120 km/h. ¿Cuánto tiempo pasa desde que parte A hasta que se produce el encuentro con B? ¿Qué distancia ha recorrido el vehículo A?**

a) Tomando como origen del sistema de referencia la posición inicial de A, las ecuaciones de posición para ambos vehículos serán:

$$x_A = v_A t = 100t \text{ km}$$

$$x_B = x_{0B} - v_B t_b = 400 - 120\left(t - \frac{1}{4}\right) = 430 - 12t \text{ km}$$

El encuentro se producirá cuando ambos estén en la misma posición, es decir, cuando $x_A = x_B$, por lo que:

$$100t = 430 - 120t$$

En consecuencia:

$$t = 1{,}95 \text{ h} = 117 \text{ min } 16 \text{ s}$$

Es decir, el encuentro se producirá al cabo de 117 min y 16 s contados desde que partió el vehículo A.

b) El espacio que recorre A será:

$$x_A = 100t = 195 \text{ km}$$

**2. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s y 0,5 s. Después se deja caer otro desde 30 m de altura. ¿A qué altura se cruzarán ambos y cuánto tiempo habrá transcurrido en ese instante desde que se lanzó el primero?**

Las correspondientes ecuaciones de altura para cada uno de ellos en el instante en que se cruzan ($y_1 = y_2 = y$) son:

$$y = v_o t - \frac{1}{2}gt^2; \quad y = y_o - \frac{1}{2}g(t - 0{,}5)^2$$

Igualando y resolviendo el tiempo, se obtiene:

$$t = 1{,}9 \text{ s}$$

Correspondiendo a una altura de:

$$y = 20{,}3 \text{ m}$$

**3. El satélite de Júpiter lo órbita a una distancia de 422 000 km del centro del planeta, con un período de 1,77 días. A partir de estos datos la velocidad lineal en m/s y la velocidad angular en rad/s del satélite así como la aceleración centrípeta con que el satélite es atraído hacia el planeta.**

La velocidad lineal puede obtenerse a partir de:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 17\,329 \text{ m/s} = 17{,}3 \text{ km/s}$$

La velocidad angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4{,}1 \cdot 10 - 5 \text{ rad/s}$$

A partir de estos datos, la aceleración centrípeta será:

$$a_c = \omega^2 r = 0{,}71 \text{ m/s}^2$$

**4. Un niño hace girar una pelota unida a una cuerda de 70 cm de radio en un plano vertical con una frecuencia de 8 Hz. En cierto momento, la cuerda se rompe y la pelota sale disparada a una altura de 0,5 m respecto del suelo, con una velocidad que forma un ángulo de 20° con la horizontal. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento aterriza la pelota? ¿Saldrá indemne un niño de 1,10 m de altura que en ese instante se encontraba a 80 m del punto de lanzamiento?**

La velocidad angular de giro es $\omega = 2\pi f = 16\,\pi$ rad/s. En consecuencia, la velocidad inicial de la pelota en el momento en que sale despedida es $v = \omega\, r = 35{,}2$ m/s, siendo sus componentes cartesianas:

$$v_{ox} = v_o \cos 20 = 33{,}07 \text{ m/s}$$
$$v_{oy} = v_o \operatorname{sen} 20 = 12{,}04 \text{ m/s}$$

La pelota aterriza en el punto en que $y = 0$, por lo que:

$$y = y_o + v_{oy} t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

Sustituyendo los valores del problema y resolviendo el tiempo, se obtiene $t = 2{,}49$ s, siendo el alcance correspondiente a este tiempo:

$$x_m = v_{ox}\, t = 82{,}3 \text{ m}$$

La pelota llega a los 80 m, donde está situado el niño, en un tiempo:

$$t' = \frac{x}{v_{ox}} = 2{,}42 \text{ s}$$

Al sustituir este tiempo en la ecuación de altura, se obtiene que la altura en ese instante es de 0,94 m. En consecuencia, el niño se lleva un certero pelotazo.

**5. Un centrocampista trata de sorprender, desde 47 m de distancia de la portería, a un portero que se encuentra a 8 m de la misma. El centrocampista golpea el balón en la dirección correcta, y este sale a 79,2 km/h formando un ángulo de 40° con el suelo. Si el portero tarda 0,8 s en reaccionar y retrocede a una velocidad de 2,8 m/s. ¿Será gol o no? Dato: altura de la portería = 2,10 m**

Lo primero que debemos plantearnos es si el balón pasa bajo los palos al llegar a puerta. En ese caso la altura, cuando $x = 47$ m, debe ser inferior a 2,10 m. El tiempo que tarda en alcanzar los 47 m es:

$$t = \frac{x}{v_{ox}} = \frac{47}{22 \cdot \cos 40} = 2{,}79 \text{ s}$$

siendo la altura en ese instante igual a 1,30 m. Por tanto, podría ser gol perfectamente si el portero no atrapa la pelota antes. Para que el portero atrape la pelota, debe haber una solución de $x < 47$ m en que ambos (portero y pelota) coincidan. Además, la altura del balón en ese hipotético punto debe hacer factible que el portero lo atrape. Las ecuaciones de posición horizontal de balón y portero son, tomando como referencia la portería:

- Para el balón: $x = x_{oB} - v_{ox} t$
- Para el portero: $x = x_{oP} - v(t - 0{,}8)$

Igualando ambas distancias y con los valores del problema se obtiene como solución de tiempo $t' = 2,61$ s, inferior al que emplea el balón en llegar a puerta. Sin embargo, sustituyendo este tiempo en la ecuación de altura, se obtiene que la altura del balón en ese instante es de 3,5 m. Por tanto, es inalcanzable para el portero que observa desolado cómo la pelota pasa por encima de él camino de la red.

**6.** **¿Con qué ángulo debe efectuarse un salto de longitud para que el alcance logrado sea el triple que la altura máxima?**

La condición del problema es que $x_m = 3\ y_m$. Usando las expresiones del alcance y altura máximas, eso se traduce en que:

$$\frac{v_o^2 \ \text{sen}\ 2\theta}{g} = 3\ \frac{v_o^2\ \text{sen}^2\theta}{2g}$$

Que implica que:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{4}{3}$$

Por lo que el ángulo debe ser de 53,13°.

**7.** **¿Con qué ángulo debe efectuarse un salto de altura si la altura máxima debe duplicar el alcance logrado?**

En este caso debe cumplirse que:

$$\frac{v_o^2\ \text{sen}^2\ \theta}{2g} = 2\ \frac{v_o^2\ \text{sen}\ 2\theta}{g}$$

Resolviendo, se obtiene:

$$\text{tg}\ \theta = 8 \Rightarrow \theta = 82,8°$$

**8.** **Una nadadora intenta cruzar un río de 80 m de anchura nadando a una velocidad de 1,6 m/s en la dirección perpendicular a la orilla. Sin embargo, llega a la otra orilla en un punto que está 40 m más lejos en la dirección de la corriente. ¿Cuál es la velocidad de la corriente? ¿Cuál es la velocidad de la nadadora para un observador que se encuentra en la orilla?**

Teniendo en cuenta que los triángulos de los vectores de velocidad y de posición son equivalentes, entonces podemos plantear, de un modo sencillo, que:

$$\text{tg}\ \theta = \frac{v_{\text{nadadora}}}{v_{\text{corriente}}} = \frac{\text{anchura}}{\text{deriva}} = \frac{80}{40} = 2$$

Por tanto, la velocidad de la corriente es:

$$v_{\text{corriente}} = \frac{v_{\text{nadadora}}}{2} = 0,8\ \text{m/s}$$

La velocidad de la nadadora para un observador externo es la composición de ambas velocidades, cuyo módulo es de 1,79 m/s

**9.** **La ecuación de posición correspondiente a cierto movimiento periódico viene dada por la expresión $\vec{r} = 5 \cdot \text{sen}\ \theta \vec{i} + 5 \cdot \cos \theta \vec{j}$ m, donde $\theta$ viene expresado en radianes. Si el período de dicho movimiento es de 2 s y el ángulo inicial $\theta_0$ es $\pi/6$ rad, determina las coordenadas de su posición inicial ($x_0$, $y_0$), el vector de posición en $t = 0,5$ s y la expresión vectorial de la velocidad y su módulo.**

La velocidad angular del movimiento es $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s, de modo que la expresión general del vector de posición será:

$$\vec{r} = 5\ \text{sen}(\theta_o + \omega t)\vec{i} + 5\ \cos(\theta_o + \omega t)\vec{j}\ \text{m}$$

Las coordenadas de la posición inicial son:

$$x_o = 5\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6} = 2,5\ \text{m}$$

$$y_o = 5\ \cos\ \frac{\pi}{6} = 4,33\ \text{m}$$

El vector de posición en $t = 0,5$ s, sustituyendo este valor en la ecuación principal, es:

$$\vec{r} = 5\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{3}\vec{i} + 5\ \cos\ \frac{2\pi}{3}\vec{j}\ \text{m} = 4,33\vec{i} - 2,5\vec{j}\ \text{m}$$

La velocidad se obtiene derivando la ecuación de posición, resultando:

$$\vec{v} = 5\pi\ \cos\ (\theta_o + \pi t)\vec{i} - 5\pi\ \text{sen}\ (\theta_o + \pi t)\vec{j}\ \text{m/s}$$

Cuyo módulo es $5\ \pi$ m/s.

**10.** **Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 30 m/s. Determina su velocidad cuando se encuentra a la mitad de su altura.**

La altura máxima que alcanza viene dada por:

$$y_m = \frac{v_o^2}{2g} = 45,9\ \text{m}$$

Así pues, la mitad de esa altura es 22,9 m. En consecuencia, la velocidad a esa altura resulta ser:

$$v = \sqrt{v_o^2 - 2gy} = 21,2\ \text{m/s}$$

# RÚBRICA DE ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE

| Estándar de aprendizaje evaluable | Herramientas de evaluación (actividades del LA) | Excelente 3 | Satisfactorio 2 | En proceso 1 | No logrado 0 | Puntos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.1. Describe el movimiento de un cuerpo a partir de sus vectores de posición, velocidad y aceleración en un sistema de referencia dado. | A: 1 | Responde de adecuada identificando todos los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera totalmente errónea o no responde. | |
| 2.1. Identifica el tipo de movimiento rectilíneo y aplica las ecuaciones para hacer predicciones. | A: 2-11<br>ER: 1-4<br>AT: 1-26 | Responde de adecuada identificando todos los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera totalmente errónea o no responde. | |
| 3.1. Interpreta correctamente las gráficas de MRU y MRUA. | | | | | | |
| 4.1. Resuelve ejercicios prácticos de MRU y MRUA. | | Resuelve correctamente todas las actividades. | Resuelve correctamente la mayoría de las actividades. | Resuelve las actividades, con errores en algunas de ellas. | Responde de manera totalmente errónea o no responde. | |
| 5.1. Reconoce movimientos compuestos y establece las ecuaciones que los describen, obteniendo parámetros característicos. | A: 12-18<br>ER: 5<br>AT: 27-42, 55 | Responde de adecuada identificando todos los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera totalmente errónea o no responde. | |
| 5.2. Resuelve problemas relativos a la composición de movimientos rectilíneos. | | Resuelve correctamente todas las actividades. | Resuelve correctamente la mayoría de las actividades. | Resuelve las actividades, con errores en algunas de ellas. | Responde de manera totalmente errónea o no responde. | |
| 6.1. Relaciona las magnitudes lineales y angulares en movimientos circulares. | A: 19-23<br>ER: 6<br>AT: 43-57 | Responde de adecuada identificando todos los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera algo incompleta, aunque válida, identificando bastantes de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde con errores, identificando pocos de los elementos importantes y sus relaciones. | Responde de manera totalmente errónea o no responde. | |
| 6.2. Reconoce la periodicidad de los MCU y resuelve problemas relativos. | | | | | | |
| 7.1. Resuelve problemas numéricos y gráficos relativos a movimientos circulares. | | Resuelve correctamente todas las actividades. | Resuelve correctamente la mayoría de las actividades. | Resuelve las actividades, con errores en algunas de ellas. | Responde de manera totalmente errónea o no responde. | |

# PRUEBA DE EVALUACIÓN A

**1. Tres pequeñas bolas de plastilina, A, B y C, están adheridas sobre el mismo radio de un disco que gira a 45 rpm.**

**La bola A se encuentra a *r*/3 del centro, y la bola B, a 2/3 de *r*, mientras que la bola C está sobre la periferia del disco. En esas circunstancias, contesta a las siguientes preguntas y demuestra de forma razonada por qué es así:**

**a) ¿Cómo son en comparación sus velocidades angulares?**

**b) ¿Cómo son en comparación sus velocidades lineales?**

**c) ¿Cómo son en comparación sus aceleraciones centrípetas?**

a) Sus velocidades angulares son iguales, pues las tres bolas giran adheridas sobre el mismo radio.

Dicha velocidad angular es de 45 rpm o $3\pi/2$ rad/s.

b) Las velocidades lineales vienen dadas por $v = \omega\, r$, donde $r_A = r/3$, $r_B = 2r/3$ y $r_C = r$. Dada la relación de los radios, es fácil comprobar que la velocidad de C es el triple que la de A y 1,5 veces la velocidad de B. A su vez, la velocidad de B es el doble que la de A.

c) Podemos expresar la aceleración centrípeta en función de la velocidad angular, de modo que $a_c = \omega^2\, r$. Puesto que es directamente proporcional a la distancia al centro, las relaciones entre las aceleraciones centrípetas son exactamente iguales que las relaciones entre velocidades.

**2. ¿Con qué ángulo de elevación deberíamos saltar en longitud para que el alcance logrado sea el doble de la altura máxima conseguida en el salto?**

Ha de cumplirse que $x_{\text{máx}} = 2y_{\text{máx}}$. Utilizando las expresiones de alcance y altura máxima, la igualdad anterior se traduce en:

$$\frac{v_0^2\ \text{sen}2\alpha}{g} = 2\frac{v_0^2\ \text{sen}^2\alpha}{2g} \Rightarrow \text{sen}2\alpha = \text{sen}^2\alpha$$
$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63{,}4°$$

**3. Lanzamos parabólicamente desde el suelo dos objetos de masas *m* y 5*m* con la misma velocidad y el mismo ángulo de inclinación. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:**

**a) Los dos llegan a la misma altura, pero m logra un alcance cinco veces superior a 5*m*.**

**b) Los dos logran la misma altura y el mismo alcance.**

**c) El objeto *m* asciende más alto, pero ambos logran el mismo alcance.**

**d) La altura y el alcance logrados por *m* son cinco veces superiores a los de 5*m*.**

Los factores que determinan el alcance y la altura son la velocidad inicial, el ángulo de lanzamiento y el valor de *g*, pero en ningún caso la masa. Por tanto, la única respuesta correcta es la **b)**.

**4. Una bola se deja caer desde 10 m de altura y tras rebotar en el suelo asciende hasta 6,5 m. Determina:**

**a) Con qué velocidad llega al suelo.**

**b) Con qué velocidad sale tras el primer rebote.**

**c) Qué porcentaje de velocidad pierde en el rebote.**

**d) Si suponemos que en cada rebote se pierde el mismo porcentaje de velocidad, ¿hasta qué altura ascenderá después del tercer bote?**

a) La velocidad con que llega al suelo viene dada por la expresión:

$$\frac{v_0^2\ \text{sen}2\alpha}{g} = 2\frac{v_0^2\ \text{sen}^2\alpha}{2g} \Rightarrow \text{sen}2\alpha = \text{sen}^2\alpha$$
$$\Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63{,}4°$$

b) La altura a la que asciende tras el primer rebote permite determinar la velocidad con que salió, a partir de:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 6{,}5} = 11{,}28\ \text{m/s}$$

c) Puesto que 11,28 m/s representa el 80,5 % del valor de la velocidad con que llega al suelo, en el rebote se pierde un 19,5 % de la velocidad.

d) La velocidad con la que sale después de cada bote es el 80,5 % del valor de la velocidad del impacto precedente. Así pues, tras el tercer bote, la bola saldrá con una velocidad igual a:

$$v_3 = v_0\cdot(0{,}805)^3 = 7{,}30\ \text{m/s}$$

Por tanto, la altura a la que ascenderá después del rebote será:

$$y_3 = \frac{v_3^2}{2g} = 2{,}7\ \text{m}$$

**5. Un helicóptero se está elevando a una velocidad de 10 m/s en el momento en que un objeto cae del mismo. Si el objeto golpea el suelo 4 s más tarde:**

**a) ¿Desde qué altura cae?**

**b) ¿Con qué velocidad golpea el suelo?**

a) El objeto tiene inicialmente la misma velocidad que el helicóptero (en ascenso). Podemos determinar $y_0$ a partir de la ecuación de altura (igualándola a cero en el instante en que el objeto llega al suelo):

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituyendo y despejando en la expresión anterior, se obtiene $y_0 = 38{,}4$ m.

b) La velocidad con que llega al suelo viene dada por:

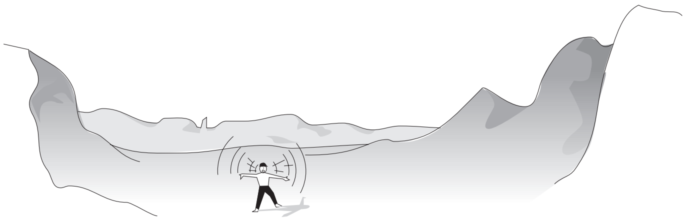
$v = v_0 - gt = -29{,}2$ m/s donde el signo negativo es indicativo del sentido.

**6. Una persona situada entre dos montañas grita y oye ecos al cabo de 3 s y 4,5 s.**

**a) ¿Cuál es la distancia entre las dos montañas?**

**b) ¿A qué distancia se encontraba la persona de la montaña más próxima?**

Dato: velocidad del sonido = 340 m/s



**a)** La distancia entre las montañas es d $d_1$ $d_2$, donde $d_1$ y $d_2$ son las distancias entre la persona y cada una de las montañas. Teniendo en cuenta que los tiempos indicados son los correspondientes al recorrido de ida y vuelta del sonido, entonces:

$$d = d_1 + d_2 = \frac{1}{2} v_s \left( t_1 + t_2 \right) = 1\,275 \text{ m}$$

**b)** La distancia a la primera montaña (la más próxima) es:

$$d_1 = \frac{1}{2} v_s t_1 = 510 \text{ m}$$

**7.** **Una persona se encuentra sobre una plataforma que se mueve en dirección norte a una velocidad constante de 10 m/s. En un momento dado lanza una piedra en dirección este con una velocidad de 25 m/s y con un ángulo de elevación sobre el suelo de 50°. Considerando que la altura inicial de partida de la piedra era de 2 m sobre el suelo y despreciando la fricción del aire, calcula:**

**a)** **¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae la piedra?**

**b)** **¿A qué distancia se encuentra la plataforma de la piedra en el momento del impacto de esta contra el suelo?**

**a)** La velocidad inicial con que sale la piedra es la composición vectorial de las velocidades de la plataforma y de lanzamiento. Así pues:

$$v_0 = \sqrt{v_{\text{plat}}^2 + v_{\text{lanz}}^2} = 26{,}93 \text{ m/s}$$

La componente vertical de esta velocidad es la misma que tendría si no hubiera movimiento de la plataforma, cuyo valor es:

$$v_{\text{vert}} = 25 \cdot \text{sen } 50 = 19{,}15 \text{ m/s}$$

De ese modo, la componente horizontal será:

$$v_{\text{horiz}} \sqrt{v_0^2 + v_{\text{vert}}^2} = 18{,}92 \text{ m/s}$$

El alcance logrado viene dado por $d_{\text{piedra}} = v_{\text{horiz}} t$, donde $t$ es el tiempo que hace cero la altura en la ecuación correspondiente:

$$h = h_0 + v_{\text{vert}} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t = 4{,}01 \text{ s}$$

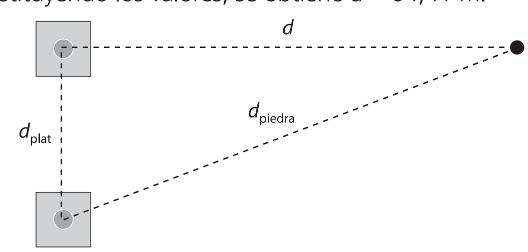
Sustituyendo en la ecuación del alcance, resulta:

$$d_{\text{piedra}} = v_{\text{horiz}} = 75{,}87 \text{ m}$$

**b)** Como se deduce de la composición de desplazamientos (véase la figura):

$$d = \sqrt{d_{\text{piedra}}^2 - d_{\text{plat}}^2} \quad \text{donde } d_{\text{plat}} = d_{\text{plat}} t = 40{,}1 \text{ m}$$

Sustituyendo los valores, se obtiene $d = 64{,}41$ m.



# PRUEBA DE EVALUACIÓN B

Señala en cada caso la respuesta que consideres correcta:

1. Si la aceleración es cero, la gráfica de x con respecto a *t*:
   a) **Es una recta con pendiente.**
   b) Es una parábola.
   c) **Es una recta horizontal.**
2. La ecuación $x - x_0 = v_0 t + 1/2\, at^2$:
   a) **Solo es válida para movimientos rectilíneos con aceleración constante.**
   b) Solo es válida para movimientos con velocidad constante.
   c) **Es también aplicable a movimientos con velocidad constante.**
3. Dos objetos son lanzados verticalmente en sentidos opuestos con la misma velocidad inicial; entonces:
   a) Tardan lo mismo en llegar al suelo.
   b) **Los dos llegan al suelo con la misma velocidad.**
   c) La velocidad con que lleguen al suelo depende de la masa de cada uno.
4. Un objeto lanzado horizontalmente:
   a) Tarda más en llegar al suelo que otro que se deja caer desde la misma altura.
   b) **Tarda lo mismo en llegar al suelo que otro que se deja caer desde la misma altura.**
   c) Tardará menos en llegar al suelo si su masa es mayor.
5. Si dos objetos son lanzados horizontalmente desde la misma altura con distintas velocidades:
   a) Caerá antes el que tenga mayor velocidad.
   b) Caerá antes el que tenga menor velocidad.
   c) **Caerán los dos a la vez.**
6. Si se lanzan parabólicamente cuatro objetos con la misma velocidad y ángulos de 15°, 55°, 75° y 35°, respectivamente:
   a) El tercero llega más lejos que los demás.
   b) **El primero y el tercero caerán en el mismo punto.**
   c) **El segundo y el cuarto caerán en el mismo punto.**
7. Un cuerpo es lanzado verticalmente y otro parabólicamente:
   a) Llegarán a la vez al suelo si son lanzados con la misma velocidad.
   b) **Si ascienden a la misma altura llegarán a la vez al suelo.**
   c) El cuerpo lanzado verticalmente siempre ascenderá más alto.
8. La velocidad angular en los movimientos circulares:
   a) Tiene la dirección y el sentido del movimiento.
   b) **Es perpendicular al plano del movimiento.**
   c) Tiene dirección radial.
9. La aceleración angular en los movimientos circulares:
   a) Tiene dirección radial.
   b) Tiene la dirección y el sentido del movimiento.
   c) **Es perpendicular al plano del movimiento.**
10. Si un móvil efectúa diez vueltas cada 8 s:
   a) Su período es de 0,8 s.
   b) Su período es de 1,25 s.
   c) **Su velocidad angular es de 7,85 rad/s.**