10

Dinámica

Dinámica

10

PARA COMENZAR (página 281)

- **¿Sufren alguna aceleración los satélites artificiales en su órbita? ¿A qué es debido?**

  Sí, la aceleración centrípeta. Se debe a la aceleración de la gravedad.

- **¿Se te ocurren otros movimientos en los que la trayectoria sea una circunferencia?**

  Otros ejemplos de movimientos en los que la trayectoria es una circunferencia son: un tiovivo, una noria, el movimiento de las agujas de un reloj, etc.

PRACTICA (página 282)

1. **Una empresa está investigando la relación entre su inversión en publicidad y sus beneficios (en millones de euros). El resumen del estudio está en la tabla. Calcula la ecuación de la recta de regresión lineal y estima los beneficios que se obtendrán en el año 2015, si se van a invertir 2,6 millones de euros en publicidad.**

Año	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Inversión	2	2,4	2	2,8	2	2	1,8	1,9	1,7	2
Beneficios	12	15	13	15	12	11	10	11	9	12

Definimos las variables:

x: inversión

y: beneficio

Construimos la tabla para calcular los parámetros necesarios

	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
	2	12	24	4
	2,4	15	36	5,76
	2	13	26	4
	2,8	15	42	7,84
	2	12	24	4
	2	11	22	4
	1,8	10	18	3,24
	1,9	11	20,9	3,61
$n = 10$	1,7	9	15,3	2,89
Sumas	20,6	120	252,2	43,34
Promedios	2,06	12		

Calculamos α y β:

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{10 \cdot 252{,}2 - 20{,}6 \cdot 120}{10 \cdot 43{,}34 - 10{,}6^2} = 5{,}53$$

$$y = \alpha \cdot x + \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \langle y \rangle - \alpha \cdot \langle x \rangle = 12 - 5{,}53 \cdot 2{,}06 = 0{,}606$$

Escribimos la ecuación de la recta:

$$\boldsymbol{y = \alpha \cdot x + \beta = 5{,}53 \cdot x + 0{,}61}$$

Para una inversión de 2,6 millones de euros $x = 2{,}6$:

$$y = 5{,}53 \cdot 2{,}6 + 0{,}61 = 15$$

Por tanto, los beneficios son de **15 millones de euros.**

PRACTICA (página 283)

2. **Señala las principales diferencias existentes entre el modelo del Ptolomeo y el modelo de Copérnico.**

Diferencias entre el modelo de Ptolomeo y el modelo de Copérnico:

- El centro en el sistema está ocupado por la Tierra en el modelo de Ptolomeo, y por el Sol en el de Copérnico.
- Todo gira alrededor de la Tierra en el modelo de Ptolomeo, y solo la Luna gira alrededor de la Tierra en el modelo de Copérnico.

3. **¿Cuál es la principal ventaja del modelo de Copérnico sobre el de Ptolomeo?**

La principal ventaja del modelo de Copérnico es la sencillez, se trata de un modelo muy simple.

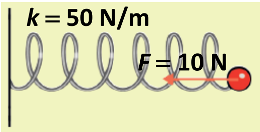
4. **A la vista del modelo de Ptolomeo, Alfonso X el Sabio (1121-1284) dijo que… «Si Dios me hubiese pedido consejo, le hubiese recomendado algo más sencillo». Explica este comentario.**

En la Edad Media el modelo vigente era el de Ptolomeo. Lo complicado de este modelo despertó el comentario del soberano. La arrogancia del monarca también se aprecia al verse digno de ofrecer consejo al creador.

A su vez, queda patente la creencia de un ser supremo creador del universo, al que se le atribuyen decisiones arbitrarias e indiscutibles a pesar de ir contra nuestro raciocinio.

ACTIVIDAD (página 284)

5. **Un muelle de longitud natural $l_0 = 40$ cm, tiene una constante elástica de 50 N/m. Calcula la longitud cuando se aplica una fuerza de compresión de 10 N.**



A partir de la ley de Hooke: $F_e = -k \cdot x$

Al comprimir el muelle, este se contrae:

$$F_e = -k \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_e}{-k} = \frac{10\ \cancel{N}}{-50\ \cancel{N}/m} = 0{,}2\ m = -20\ cm$$

Calculamos la longitud del muelle:

$$x = l - l_0 \quad \Rightarrow \quad l = x + l_0 = -20\ cm + 40\ cm = \mathbf{20\ cm}$$

ACTIVIDAD (página 285)

6. **Tenemos un muelle elástico sujeto por un extremo al techo. Si colgamos por el otro extremo un cuerpo de 6 kg de masa, el muelle se alarga 20 cm. Calcula:**

a) **La constante elástica del muelle.**

b) **El periodo de las oscilaciones si se le aparta de su posición de equilibrio y se deja libre para que oscile según un MAS.**

Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

a) Determinaremos la constante de elasticidad estática por medio de la ley de Hooke:

$$-F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{6\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2}{0{,}20\ m} = \mathbf{294\ N/m}$$

b) Aunque la constante de elasticidad estática y dinámica no son exactamente iguales, utilizaremos el dato calculado en el apartado anterior para obtener el periodo de la oscilación:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{6\ \text{kg}}{294\ \text{N/m}}} = \mathbf{0,90\ s}$$

ACTIVIDAD (página 286)

7. En una catedral hay una lámpara que cuelga desde el techo de la nave y, en la posición más baja, está a 2,85 m del suelo. Se observa que oscila con frecuencia 0,111 Hz. ¿Cuál es la altura de la nave? Dato: g = 9,8 m/s².

Calculamos el periodo:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,111\ \text{Hz}} = 9,01\ \text{s}$$

Necesitamos obtener la longitud del hilo del que pende la lámpara. Para ello podemos utilizar la expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow L = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \Rightarrow L = 9,8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{(9,01\ \text{s})^2}{4\pi^2} = \mathbf{20,15\ m}$$

Si la lámpara se encuentra a 2,85 m del suelo, la altura total de la nave será:

$$h = L + 2,85\ \text{m} = 20,15\ \text{m} + 2,85\ \text{m} = \mathbf{23\ m}$$

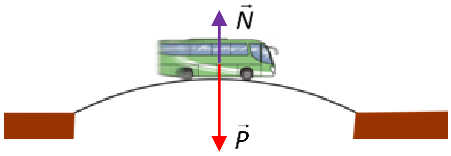
ACTIVIDAD (página 288)

8. Un autobús de 10 t cruza un puente de trazado circular con una curvatura de 50 m de radio. Su velocidad es 72 km/h. ¿Cuál es la reacción de la estructura del puente al paso del autobús? Dato: g = 9,8 m/s².

Pasamos la masa y la velocidad a unidades del sistema internacional:

$$m = 10\ \cancel{t} \cdot \frac{1000\ \text{kg}}{1\ \cancel{t}} = 10\,000\ \text{kg}; \quad v = 72\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}$$

La fuerza centrípeta es la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el autobús en ese punto: el peso y la normal.



$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}_N$$

Tomamos sentido positivo hacia el centro de curvatura, de modo que coincida con la dirección y el sentido de la aceleración.

$$P - N = m \cdot a_N$$

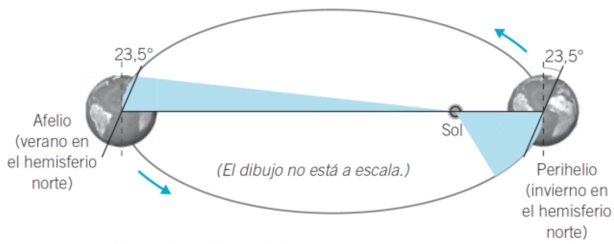
Despejamos, sustituimos y operamos:

$$N = P - m \cdot a_N = m \cdot g - m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \left(g - \frac{v^2}{R}\right) = 10\,000\ \text{kg} \cdot \left(9,8\ \text{m/s}^2 - \frac{(20\ \text{m/s})^2}{50\ \text{m}}\right) = \mathbf{18\,000\ N}$$

ACTIVIDADES (página 289)

9. Teniendo en cuenta las leyes de Kepler, explica con la ayuda de un dibujo en qué parte de su órbita alrededor del Sol (afelio o perihelio) se encuentra la Tierra en el invierno y en el verano si se cumple que en el hemisferio norte el periodo otoño-invierno dura seis días menos que el de primavera-verano.

De acuerdo con la segunda ley de Kepler, la velocidad lineal es mayor en el perihelio que en el afelio. Seis días menos es más rápido. Desde el equinoccio de otoño al equinoccio de primavera, el planeta recorre la órbita próxima al perihelio. El hemisferio norte de la Tierra está en posición opuesta al Sol cuando se mueve en la zona del perihelio.



10. **La distancia media de Marte al Sol es 1,468 veces la de la Tierra al Sol. Encuentra el número de años terrestres que dura un año marciano.**

De acuerdo con la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = k\,(\text{constante})$$

Por tanto:

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3} = \text{cte.}$$

Además, sabemos que $a_M = 1{,}468 \cdot a_T$. Igualando:

$$\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3} \quad \Rightarrow \quad T_M^2 = \frac{a_M^3}{a_T^3} \cdot T_T^2 = \frac{(1{,}468 \cdot a_T)^3}{a_T^3} \cdot T_T^2 = \frac{1{,}468^3 \cdot \cancel{a_T^3}}{\cancel{a_T^3}} \cdot T_T^2 = 1{,}468^3 \cdot T_T^2$$

$$T_M = 1{,}468^{3/2} \cdot T_T = 1{,}468^{3/2} \cdot T_T = 1{,}779 \cdot T_T$$

Por tanto, hay **1,779 años terrestres** en cada año marciano.

ACTIVIDAD (página 290)

11. **Calcula el vector momento angular del minutero de un reloj. Supongamos que es un reloj en una torre y que los 250 g masa de la aguja se concentran a 90 cm del eje. Indica su dirección y sentido.**

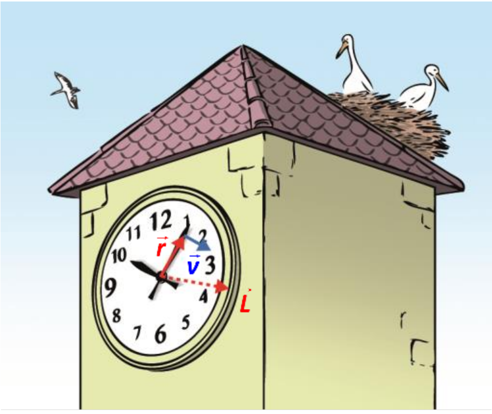
Calculamos la velocidad angular. Como se trata del minutero de un reloj, el periodo (tiempo que tarda en dar una vuelta) es una hora:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\ \text{h}} = \frac{2\pi}{3600\ \text{s}} = \frac{\pi}{1800}\ \text{rad/s}$$

Calculamos la velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot r = \frac{\pi}{1800}\ \text{rad/s} \cdot 0{,}9\ \text{m} = \frac{\pi}{2000}\ \text{m/s}$$

Calculamos el momento angular. El movimiento es circular, por tanto, r, tiene la dirección del radio de la circunferencia, y v, al ser tangente a la misma, hace que sean vectores mutuamente perpendiculares en todo momento:



$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\ \alpha = r \cdot m \cdot v \cdot \text{sen}\ 90° = r \cdot m \cdot v$$

Sustituimos los datos:

$$L = 0{,}9\ \text{m} \cdot 0{,}25\ \text{kg} \cdot \frac{\pi}{2000}\ \text{m/s} = \mathbf{3{,}53 \cdot 10^{-4}\ m^2 \cdot kg/s}$$

La dirección de L será perpendicular a la esfera del reloj, es decir, **horizontal**, y el sentido **hacia** dentro de la esfera del reloj.

ACTIVIDADES (página 291)

12. **Venus describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Su velocidad en el afelio es de 3,48 · 10⁴ m/s, y en el perihelio es de 3,53 · 10⁴ m/s. Si la distancia que separa el afelio del perihelio es de 1,446 UA, determina a qué distancia se encuentra Venus del Sol en cada una de esas posiciones. Dato: 1 UA = 1,496 · 10¹¹ m.**

En los vértices de la elipse el radio vector, $\vec{r}$, y la tangente, dirección del vector $\vec{v}$, son perpendiculares. El seno del ángulo recto es la unidad. El momento angular se conserva:

$$L_{\text{af.}} = L_{\text{per.}} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} \cdot v_{\text{af.}} \cdot r_{\text{af.}} = \cancel{m} \cdot v_{\text{per.}} \cdot r_{\text{per.}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{af.}} \cdot r_{\text{af.}} = v_{\text{per.}} \cdot r_{\text{per.}}$$

Podemos conseguir otra ecuación con las mismas incógnitas:

$$r_{af.} + r_{per.} = d$$

$$d = 1{,}446\ \text{UA} = 1{,}446\ \cancel{\text{UA}} \cdot \frac{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{UA}}} = 2{,}1632 \cdot 10^{11}\ \text{m}$$

Planteando un sistema de ecuaciones con las dos igualdades y resolviendo en las dos incógnitas pedidas:

$$\left.\begin{array}{r} r_{af.} + r_{per.} = d \\ v_{af.} \cdot r_{af.} = v_{per.} \cdot r_{per.} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r_{per.} = \dfrac{v_{af.}}{v_{af.} + v_{per.}} \cdot d = \dfrac{3{,}48 \cdot \cancel{10^4\ \text{m/s}}}{(3{,}48 + 3{,}53) \cdot \cancel{10^4\ \text{m/s}}} \cdot 2{,}1632 \cdot 10^{11}\ \text{m} = \mathbf{1{,}0738 \cdot 10^{11}\ m} \\ r_{af.} = \dfrac{v_{per.}}{v_{af.} + v_{per.}} \cdot d = \dfrac{3{,}53 \cdot \cancel{10^4\ \text{m/s}}}{(3{,}48 + 3{,}53) \cdot \cancel{10^4\ \text{m/s}}} \cdot 2{,}1632 \cdot 10^{11}\ \text{m} = \mathbf{1{,}0893 \cdot 10^{11}\ m} \end{array}\right.$$

13. Si la órbita de un planeta es elíptica, ¿en qué punto de su trayectoria tendrá velocidad lineal máxima? ¿Y si la órbita fuera circular?

Una conclusión de la segunda ley de Kepler es que el momento angular de los planetas es constante:

$$L_{afelio} = L_{perihelio} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} \cdot v_{afelio} \cdot r_{afelio} = \cancel{m} \cdot v_{perihelio} \cdot r_{perihelio}$$

Si la órbita es elíptica, su velocidad lineal será máxima en el perihelio, ya que ahí la distancia al centro de giro ($r_{perihelio}$) es menor. Si la órbita fuera circular, su velocidad lineal será la misma en toda la órbita.

ACTIVIDAD (página 292)

14. La órbita elíptica del cometa Halley alrededor del Sol se acerca hasta 8,75 · 10^7 km en el perihelio y se aleja del Sol hasta 5,26 · 10^9 km en el afelio. ¿Dónde es mayor la velocidad? ¿Cuánto vale el cociente de velocidades?

El momento angular se conserva:

$$L_{afelio} = L_{perihelio} \quad \Rightarrow \quad \cancel{m} \cdot v_{afelio} \cdot r_{afelio} = \cancel{m} \cdot v_{perihelio} \cdot r_{perihelio}$$

$$\frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}} = \frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}} = \frac{5{,}26 \cdot 10^9\ \cancel{\text{m}}}{8{,}75 \cdot 10^7\ \cancel{\text{m}}} = \mathbf{60{,}1}$$

Por lo tanto, la velocidad en el perihelio es 60,1 veces mayor que la velocidad en el afelio.

ACTIVIDAD (página 293)

15. El semieje mayor de la órbita terrestre mide 1,49 · 10^8 km y la duración de un año es de 365,256 días. ¿Cuál es la masa del Sol? Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

Hallamos el periodo:

$$T = 365{,}256\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 3{,}156 \cdot 10^7\ \text{s}$$

Cuando la Tierra está en órbita alrededor del Sol, $F_G = F_C$:

$$M_T \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{r^2}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \dfrac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\cancel{M_T} \cdot \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M_S \cdot \cancel{M_T}}{r^2}$$

$$M_S = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{r^3}{G}$$

$$M_S = \left(\frac{2\pi}{3{,}156 \cdot 10^7\ \text{s}}\right)^2 \cdot \frac{(1{,}49 \cdot 10^{11}\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}} = \mathbf{1{,}97 \cdot 10^{30}\ kg}$$

ACTIVIDADES (página 294)

16. Calcula la aceleración de la gravedad en la Luna y compárala con la aceleración de la gravedad en la Tierra.

Datos: M_L = 7,35 · 10²² kg; R_L = 1740 km; M_T = 5,97 · 10²⁴ kg; R_T = 6370 km.

Aplicamos la expresión:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

En la Luna la gravedad es:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{R_L^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{(1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m})^2} = \mathbf{1{,}62\ m/s^2}$$

Comparando ambas:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{M_L}{R_L^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_L \cdot R_T^2}{M_T \cdot R_L^2} = \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \cancel{\text{kg}} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \cancel{\text{m}})^2}{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \cancel{\text{kg}} \cdot (1{,}74 \cdot 10^6\ \cancel{\text{m}})^2} = \mathbf{0{,}165}$$

17. Un astronauta de 70 kg se pesa en un planeta extrasolar y observa sorprendido que el aparato marca 1030 N. Señala qué afirmaciones son verdaderas:

a) El aparato de medida está mal.

b) La gravedad en ese planeta es 1,5 · *g*.

c) La gravedad en el planeta vale 1030 N/70 kg.

a) **Falso**. El valor del peso depende de la intensidad del campo gravitatorio en el exoplaneta.

b) **Verdadero**:

$$P = m \cdot g' = m \cdot k \cdot g \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{m \cdot g} = \frac{1030\ \cancel{\text{N}}}{70\ \cancel{\text{kg}} \cdot 9{,}8\ \cancel{\text{N}}/\cancel{\text{kg}}} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad g' = 1{,}5 \cdot g$$

c) **Verdadero**:

$$P = m \cdot g' \quad \Rightarrow \quad g' = \frac{P}{m} = \frac{1030\ \text{N}}{70\ \text{kg}}$$

ACTIVIDAD (página 295)

18. Al despegar un cohete de 2800 t, sus motores desarrollan una fuerza de 4 · 10⁷ N.

a) Calcula la fuerza total que actúa sobre la lanzadera en el despegue.

b) Calcula la aceleración en el momento del despegue.

Dato: *g* = 9,8 m/s².

a) La fuerza total será la diferencia entre la fuerza que ejercen los motores y el peso:

$$P = m \cdot g = 2800\ \text{t} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 2{,}8 \cdot 10^6\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 2{,}744 \cdot 10^7\ \text{N}$$

$$F_{\text{Total}} = F_{\text{M}} - P \quad \Rightarrow \quad F_{\text{Total}} = F_{\text{M}} - P = 4 \cdot 10^7\ \text{N} - 2{,}744 \cdot 10^7\ \text{N} = \mathbf{1{,}256 \cdot 10^7\ N}$$

b) La aceleración en el despegue es:

$$a = \frac{F_{\text{Total}}}{M} = \frac{1{,}256 \cdot 10^7\ \text{N}}{2{,}8 \cdot 10^6\ \text{kg}} = \mathbf{4{,}49\ m/s^2}$$

ACTIVIDADES (página 296)

19. Un astronauta de 65 kg de masa viaja por el sistema solar. Calcula el valor del campo gravitatorio y el peso del astronauta en la superficie de cada planeta. Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2; masas y diámetros de los planetas en la tabla.

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Masa (kg)	$3{,}30 \cdot 10^{25}$	$4{,}87 \cdot 10^{24}$	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	$1{,}90 \cdot 10^{26}$	$5{,}69 \cdot 10^{26}$	$8{,}70 \cdot 10^{25}$	$1{,}02 \cdot 10^{65}$
Radio órbita (m)	$5{,}79 \cdot 10^{10}$	$1{,}08 \cdot 10^{11}$	$1{,}50 \cdot 10^{11}$	$2{,}28 \cdot 10^{11}$	$7{,}78 \cdot 10^{11}$	$1{,}43 \cdot 10^{12}$	$2{,}87 \cdot 10^{12}$	$4{,}50 \cdot 10^{12}$
Diámetro (km)	4879	12 104	12 756	6794	142 984	120 536	21 118	49 528

Calculamos la aceleración de la gravedad g en cada planeta. Como tenemos el diámetro de cada planeta, dividimos entre dos para conocer su radio:

$$g_{\text{T}} = G \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{R^2_{\text{planeta}}} = G \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{\left(\dfrac{D_{\text{planeta}}}{2}\right)^2} = 4\ G \cdot \frac{M_{\text{planeta}}}{D^2_{\text{planeta}}}$$

Sustituyendo los valores de la tabla para cada planeta:

$$g_{\text{Mercurio}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{3{,}30 \cdot 10^{25}\ \text{kg}}{\left(4{,}879 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{3{,}7\ N/kg}$$

$$g_{\text{Venus}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{4{,}87 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(1{,}2104 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{8{,}9\ N/kg}$$

$$g_{\text{Tierra}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(1{,}2756 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{9{,}8\ N/kg}$$

$$g_{\text{Marte}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{\left(6{,}794 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{3{,}7\ N/kg}$$

$$g_{\text{Júpiter}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}90 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{\left(1{,}42984 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{24{,}8\ N/kg}$$

$$g_{\text{Saturno}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}69 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{\left(1{,}20536 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{10{,}4\ N/kg}$$

$$g_{\text{Urano}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{8{,}70 \cdot 10^{25}\ \text{kg}}{\left(2{,}1118 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{8{,}9\ N/kg}$$

$$g_{\text{Neptuno}} = 4 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}02 \cdot 10^{26}\ \text{kg}}{\left(4{,}9528 \cdot 10^7\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{11\ N/kg}$$

Calculamos el peso del astronauta en la superficie de cada planeta:

$$P_{\text{planeta}} = m \cdot g_{\text{planeta}}$$

Por tanto:

$$P_{\text{Mercurio}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 3{,}7\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{240{,}5\ N}$$
$$P_{\text{Venus}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 8{,}9\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{578{,}5\ N}$$
$$P_{\text{Tierra}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 9{,}8\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{637\ N}$$
$$P_{\text{Marte}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 3{,}7\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{240{,}5\ N}$$
$$P_{\text{Júpiter}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 24{,}8\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{1612\ N}$$
$$P_{\text{Saturno}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 10{,}4\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{676\ N}$$
$$P_{\text{Urano}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 8{,}9\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{578{,}5\ N}$$
$$g_{\text{Neptuno}} = 65\ \cancel{\text{kg}} \cdot 11\ \text{N}/\cancel{\text{kg}} = \mathbf{715\ N}$$

20. Con los datos del radio medio de la órbita de los planetas calcula el valor del campo gravitatorio en el sistema solar provocado por la masa del Sol. Compara las distancias con el valor del campo.

Datos: $M_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; radios de las órbitas en la tabla.

Calculamos el valor del campo gravitatorio en el sistema solar provocado por la masa del Sol:

$$g_{\text{planeta}} = G \cdot \frac{M_{\text{Sol}}}{r^2_{\text{Órbita}}}$$

Sustituimos los datos para cada planeta:

$$g_{\text{Mercurio}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(5{,}79 \cdot 10^{10}\ \text{m})^2} = \mathbf{4 \cdot 10^{-2}\ N/kg}$$

$$g_{\text{Venus}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(1{,}08 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{1{,}1 \cdot 10^{-2}\ N/kg}$$

$$g_{\text{Tierra}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(1{,}50 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{5{,}9 \cdot 10^{-3}\ N/kg}$$

$$g_{\text{Marte}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(2{,}28 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^{-3}\ N/kg}$$

$$g_{\text{Júpiter}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(7{,}78 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \mathbf{2{,}2 \cdot 10^{-4}\ N/kg}$$

$$g_{\text{Saturno}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(1{,}43 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2} = \mathbf{6{,}5 \cdot 10^{-5}\ N/kg}$$

$$g_{\text{Urano}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(2{,}87 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2} = \mathbf{1{,}6 \cdot 10^{-5}\ N/kg}$$

$$g_{\text{Neptuno}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(4{,}50 \cdot 10^{12}\ \text{m})^2} = \mathbf{6{,}5 \cdot 10^{-5}\ N/kg}$$

El valor del campo disminuye a medida que aumenta el radio de la órbita.

ACTIVIDADES (página 297)

21. La Estación Espacial Internacional (ISS, por sus siglas en inglés) orbita a una altura de 420 km sobre la superficie terrestre. ¿Cuál es su velocidad de orbitación? ¿Qué tiempo tarda, en horas, minutos y segundos, en completar una órbita? Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg², $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

Calculamos la velocidad orbital de la ISS situada a una altura, $h = 420$ km $= 4{,}2 \cdot 10^5$ m, sobre la superficie de la Tierra:

$$v_{\text{orbitación}} = \sqrt{G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{(6,37 \cdot 10^6 + 4,2 \cdot 10^5)\text{m}}} = \mathbf{7658\,m/s}$$

Calculamos el tiempo que tarda en completar una órbita, es decir, su periodo:

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \dfrac{v}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot (R_T + h)}{v_{\text{orbitación}}}$$

Sustituimos los datos:

$$T = \frac{2\pi \cdot (6,37 \cdot 10^6 + 4,2 \cdot 10^5)\ \cancel{\text{m}}}{7658\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = 5571\ \text{s}$$

Pasamos a horas minutos y segundos:

$$5571\ \cancel{\text{s}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3600\ \cancel{\text{s}}} = 1,5475\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0,5475\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0,5475\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 1\ \text{h} + 32,85\ \text{min}$$

$$1\ \text{h} + 32\ \text{min} + 0,85\ \text{min} = 1\ \text{h} + 32\ \text{min} + 0,85\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = \mathbf{1\ h + 32\ min + 51\ s}$$

22. Ganímedes, el mayor satélite de Júpiter, emplea 7,15 días terrestres en completar su órbita de 1,07 · 10⁹ m de radio. ¿Cuál es la masa de Júpiter? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Expresamos el tiempo que emplea en completar la órbita en segundos:

$$T = 7,15\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 6,18 \cdot 10^5\ \text{s}$$

Las órbitas de los satélites también siguen las leyes de Kepler, cada planeta desempeña el papel del Sol. Por tanto, aplicando la tercera ley de Kepler queda:

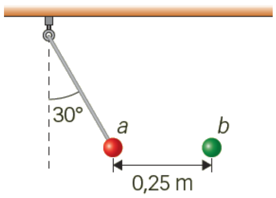
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_{\text{Júpiter}}}$$

Despejamos la masa y sustituimos los datos:

$$M_{\text{Júpiter}} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1,07 \cdot 10^9\ \text{m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot (6,18 \cdot 10^5\ \text{s})^2} = \mathbf{1,90 \cdot 10^{27}\ kg}$$

ACTIVIDAD (página 299)

23. Dos partículas, *a* y *b*, tienen masas iguales de 1,6 g y cargas de igual valor pero de signos contrarios. La partícula *b* está fija en el espacio, y la partícula *a* está colgada del techo por un hilo de masa despreciable (ver figura). Cuando ambas partículas están separadas una distancia de 0,25 m, la partícula *a* se halla en equilibrio y el hilo forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcula:



a) La tensión del hilo.

b) La fuerza de atracción entre las partículas.

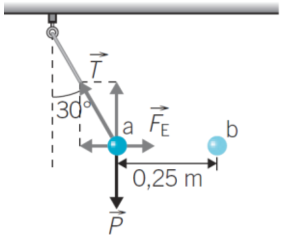
c) El valor absoluto de la carga de las partículas.

Datos: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C²; $g = 9,8$ m/s².

Planteamos el balance de fuerzas de la masa suspendida. Despreciamos la fuerza de atracción gravitatoria entre las dos partículas porque, como se deduce de la actividad anterior, será mucho menor que la fuerza.

Observa que la tensión debe descomponerse en sus componentes vertical y horizontal, que se calculan relacionando *T* con el ángulo que forma con la vertical (30°):

- Eje vertical: $T \cdot \cos 30° = P = m \cdot g = 0{,}0016\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 = 0{,}0157\ \text{N}$
- Eje horizontal: $T \cdot \text{sen}\ 30° = F_E = k \cdot \dfrac{q^2}{d^2} = 9 \cdot 10^9\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \dfrac{q^2}{(0{,}25\ \text{m})^2}$



a) Obtenemos la tensión del hilo, T, a partir del balance correspondiente al eje vertical:

$$T = \frac{0{,}0157\ \text{N}}{\cos 30°} = \mathbf{0{,}018\ N}$$

b) Conociendo el valor de la tensión T podemos obtener el valor de la fuerza electrostática de atracción de las partículas a partir del balance correspondiente al eje horizontal:

$$F_E = T \cdot \text{sen}\ 30° = 0{,}018\ \text{N} \cdot \text{sen}\ 30° = \mathbf{9{,}05 \cdot 10^{-3}\ N}$$

c) Conociendo el valor de la fuerza electrostática de atracción de las partículas y sabiendo que su carga es idéntica, podemos obtener su valor:

$$F_E = k \cdot \frac{q^2}{d^2} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{F_E \cdot d^2}{k}} = \sqrt{\frac{9{,}05 \cdot 10^{-3}\ \cancel{\text{N}} \cdot (0{,}25\ \cancel{\text{m}})^2}{9 \cdot 10^9\ \dfrac{\cancel{\text{N}} \cdot \cancel{\text{m}^2}}{\text{C}^2}}} = \mathbf{2{,}5 \cdot 10^{-7}\ C}$$

ACTIVIDADES FINALES (páginas 304)

Dinámica del MAS

24. Calcula la constante *k* del muelle de un dinamómetro que se alarga 5 cm cuando colgamos de él una pesa de 500 g.

Aplicamos la ley de Hooke teniendo en cuenta que el peso es la fuerza que hace el muelle se alargue:

$$P = -F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}05\ \text{m}} = \mathbf{98\ N/m}$$

25. Se cuelga de un muelle un cuerpo de 250 g de masa y se observa que se alarga una distancia de 20 cm, ¿cuál es el valor de la constante elástica del muelle? ¿Qué cuerpo hay que colgar para que el muelle se alargue 10 cm?

Aplicamos la ley de Hooke teniendo en cuenta que el peso es la fuerza que hace que el muelle se alargue:

$$F = k \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{0{,}25\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}2\ \text{m}} = \mathbf{12{,}25\ N/m}$$

Conocida la constante elástica del muelle, aplicamos de nuevo la ley de Hooke para calcular el valor de la masa que tendremos que colocar para que el muelle se alargue 10 cm:

$$F = k \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad m \cdot g = k \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad m = \frac{k \cdot \Delta x}{g} = \frac{12{,}25\ \text{N/m} \cdot 0{,}1\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}125\ \text{kg} = \mathbf{125\ g}$$

Como la deformación del muelle y la fuerza que provoca la deformación son magnitudes directamente proporcionales, si la masa que se coloca se reduce a la mitad, el alargamiento del muelle también es la mitad.

26. De dos resortes con la misma constante elástica *k* se cuelgan sendos cuerpos con la misma masa. Uno de los resortes tiene el doble de longitud que el otro. ¿El cuerpo vibrará con la misma frecuencia? Razona tu respuesta.

Tenemos: $$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2\pi \cdot f)^2 \Rightarrow f = \sqrt{\frac{k}{m \cdot 4\pi^2}}$$

Se deduce que la frecuencia depende de la constante elástica y la masa, pero no de la longitud del muelle. Como la constante k y la masa de los cuerpos es la misma, la vibración tendrá la misma frecuencia aunque varíe la longitud del resorte.

27. Un bloque de 0,5 kg cuelga del extremo inferior de un resorte de constante elástica $k = 72$ N/m. Al desplazar el bloque verticalmente hacia abajo de su posición de equilibrio comienza a oscilar, pasando por el punto de equilibrio con una velocidad de 6 m/s. Determina la amplitud y la frecuencia angular de oscilación.

Al pasar por el punto de equilibrio, se tiene la velocidad máxima del MAS:

$$v = \omega \cdot A$$

Por otra parte, conocemos el valor de la constante de elasticidad del resorte, que en función de la frecuencia angular puede expresarse como:

$$k = m \cdot \omega^2$$

A partir de este último dato obtendremos el valor de la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{72 \text{ N/m}}{0,5 \text{ kg}}} = \mathbf{12 \text{ rad/s}}$$

Por tanto:

$$A = \frac{v}{\omega} = \frac{6 \text{ m/s}}{12 \text{ rad/s}} = \mathbf{0,5 \text{ m}}$$

28. Un muelle se deforma 12 cm cuando se cuelga de él una partícula de 2 kg de masa.

a) Determina la constante elástica k del muelle.

b) A continuación se separa hacia abajo otros 10 cm de la posición de equilibrio y se deja oscilar en libertad. ¿Cuáles son la frecuencia angular y el periodo de oscilación en estas condiciones?

c) Escribe la ecuación de la posición de la partícula en función del tiempo.

Dato: $g = 9,8$ m/s².

a) Aplicamos la ley de Hooke teniendo en cuenta que el peso es la fuerza que hace que el muelle se alargue:

$$P = -F_e = -(-k \cdot x) \Rightarrow k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2}{0,12 \text{ m}} = \mathbf{163,\widehat{3} \text{ N/m}}$$

b) Calculamos la frecuencia:

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{163,\widehat{3} \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = \mathbf{9,04 \text{ rad/s}}$$

Y el periodo:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \text{ kg}}{163,\widehat{3} \text{ N/m}}} = \mathbf{0,695 \text{ s}}$$

Tanto la frecuencia angular como el periodo de la oscilación son independientes de la amplitud del MAS.

c) Consideramos que el movimiento se inicia en su posición de elongación máxima. Utilizamos la ecuación senoidal del MAS. Del enunciado se deduce que $A = 0,1$ m y que para $t = 0$ s, $x = -A$:

$$x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \Rightarrow -A = A \cdot \text{sen}\left(9,04 \text{ rad/s} \cdot 0 \text{ s} + \phi_0\right) \Rightarrow \text{sen}\,\phi_0 = -1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = 0,1 \cdot \text{sen}\left(9,04 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ m}}$$

29. Un cuerpo de 200 g de masa está en reposo y colgado de un muelle cuya constante elástica es de 5 N/m. Se tira de dicho cuerpo con una fuerza de 0,3 N y se le abandona libremente. Suponiendo ausencia de rozamiento:

a) Calcula la amplitud y la pulsación del movimiento vibratorio. Proporciona la expresión matemática de la ecuación del movimiento vibratorio armónico simple (suponer que en $t = 0$ la fase inicial es $3\pi/2$).

b) Determina los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de dicho movimiento vibratorio.

a) La expresión de la fuerza en función de la elongación es: $F = -k \cdot x$. Cuando se tira del cuerpo para luego liberarlo, se le lleva a su elongación máxima. Conociendo la constante del resorte y la fuerza que se ha aplicado (la fuerza de recuperación será equivalente, pero de sentido contrario), se puede obtener la amplitud resultante:

$$F = -F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad F = k \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F}{k} = \frac{0{,}3\ \text{N}}{5\ \text{N/m}} = 0{,}06\ \text{m} = \mathbf{6\ cm}$$

Teniendo que cuenta que:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5\ \text{N/m}}{0{,}2\ \text{kg}}} = \mathbf{5\ rad/s}$$

Con los resultados obtenidos:

$$\boldsymbol{x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad x = 6 \cdot \text{sen}\left(5 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)\ \text{cm}}$$

b) Se calculan los valores solicitados:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A = 5\ \text{rad/s} \cdot 0{,}06\ \text{m} = \mathbf{0{,}3\ m/s}$$
$$a_{\text{máx}} = \omega^2 \cdot A = (5\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}06\ \text{m} = \mathbf{1{,}5\ m/s^2}$$

30. De un resorte de 40 cm de longitud se cuelga un peso de 50 g de masa y, alcanzado el equilibrio, la longitud del resorte es de 45 cm. Se estira con la mano el conjunto masa-resorte 6 cm y se suelta. Obtén:

a) La constante del resorte.

b) La ecuación del MAS que describe el movimiento.

Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

a) Como al colgar la masa el conjunto se ha estirado de 40 a 45 cm, resulta que la masa ha producido una elongación $x = 5$ cm. De acuerdo con la ley de Hooke, obtendremos la constante k a partir del peso:

$$P = -F_e = -(-k \cdot x) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{P}{x} = \frac{m \cdot g}{x} = \frac{0{,}05\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}05\ \text{m}} = \mathbf{9{,}8\ N/m}$$

b) Calculamos la frecuencia angular:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{N/m}}{0{,}05\ \text{kg}}} = \mathbf{14\ rad/s}$$

Consideramos que el movimiento se inicia, $t = 0$ s, en su posición de máxima elongación $x = A$. Describiremos el movimiento mediante una función senoidal:

$$x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad A = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot 0 + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ \phi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}06 \cdot \text{sen}\left(14 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}}$$

31. Para medir el tiempo construimos un reloj de péndulo formado por una bola metálica unida a una cuerda. Lo hacemos oscilar de manera que en los extremos toque unas láminas metálicas.

a) ¿Cuál debe ser la longitud de la cuerda si queremos que de un toque al siguiente haya un intervalo de tiempo de 1 s?

b) Con el tiempo, es muy probable que la cuerda se deforme y estire. ¿Significa esto que nuestro reloj va más rápido o más lento?

Dato: suponemos péndulo ideal y $g = 9{,}8$ m/s².

a) Si queremos que dé un toque cada segundo y las láminas se colocan a ambos lados, el periodo total de oscilación del péndulo será $T = 2$ s. En el libro del alumno se ha deducido que para un péndulo:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \Rightarrow \quad L = g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} = 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{(2\ \text{s})^2}{4\pi^2} = \mathbf{0{,}993\ m}$$

b) La relación entre la longitud del hilo y el periodo de oscilación del péndulo viene dada por la expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

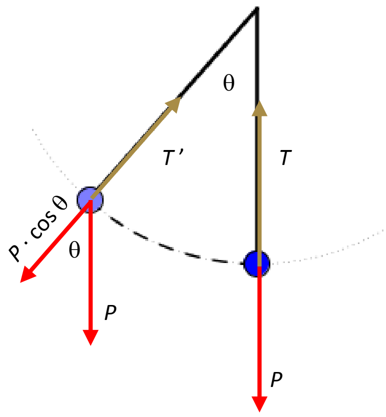
Si L aumenta, aumentará también T y, con esto, será mayor la separación entre toques sucesivos. Esto significa que la velocidad disminuye y el reloj va **más lento**.

Dinámica del movimiento circular

32. ¿Qué condiciones debe cumplir una fuerza para no modificar el módulo de la velocidad cuando actúa sobre un cuerpo?

Que sea siempre perpendicular a la velocidad. Una fuerza perpendicular a la velocidad solo modifica la dirección de la velocidad, no su módulo.

33. ¿Cuándo es mayor la tensión del hilo de un péndulo en el punto más bajo de su recorrido, cuando está en reposo o cuando se encuentra oscilando?



- Si el cuerpo está en reposo:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = P$$

- Si está oscilando y se encuentra en el punto más bajo:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T - P = m \cdot a_N \quad \Rightarrow \quad T = P + m \cdot a_N$$

La aceleración es la de un movimiento circular. Y al pasar por la posición de equilibrio la velocidad es máxima. Y el radio es la longitud del péndulo:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{v_{máx}^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = m \cdot g + m \cdot \frac{v_{máx}^2}{L} = m \cdot \left(g + \frac{v_{máx}^2}{L} \right)$$

- Si está oscilando y no se encuentra en el punto más bajo:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T - P \cdot \cos\theta = m \cdot a_N \quad \Rightarrow \quad T = P \cdot \cos\theta + m \cdot a_N$$

La aceleración es la de un movimiento circular. Y al pasar por una posición cualquiera la velocidad es la máxima multiplicada por el coseno de la fase. El radio sigue siendo la longitud del péndulo:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_{máx} \cdot \cos\theta)^2}{L} \quad \Rightarrow \quad T = m \cdot g \cdot \cos\theta + m \cdot \frac{(v_{máx} \cdot \cos\theta)^2}{L} = m \cdot \left(g + \frac{v_{máx}^2 \cdot \cos\theta}{L} \right) \cdot \cos\theta$$

La tensión del hilo es **mayor cuando el péndulo está oscilando** y se encuentra en el punto más bajo de su recorrido.

ACTIVIDADES FINALES (páginas 306)

34. Calcula la velocidad orbital (media) de la Tierra en su recorrido alrededor del Sol. Expresa el resultado en km/s. Datos: $M_{Sol} = 2 \cdot 10^{30}$ kg; $d_{Tierra\text{-}Sol} = 149{,}6$ millones de km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Cuando un cuerpo orbita alrededor de otro se cumple:

$$F_C = m \cdot a_N \quad \text{donde} \quad a_N = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad F = M_T \cdot \frac{v^2}{R^2} = M_T \cdot \frac{v^2}{d^2_{\text{Tierra-Sol}}}$$

Aplicando la ley de la gravitación universal:

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot M_S}{d^2_{\text{Tierra-Sol}}}$$

Igualando ambas fuerzas:

$$G \cdot \frac{\cancel{M_T} \cdot M_S}{d^{\cancel{2}}_{\text{Tierra-Sol}}} = \cancel{M_T} \cdot \frac{v^2}{\cancel{d_{\text{Tierra-Sol}}}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{d_{\text{Tierra-Sol}}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^{\cancel{2}}}{\text{kg}^{\cancel{2}}} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \cancel{\text{kg}}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \cancel{\text{m}}}} = \sqrt{8{,}917 \cdot 10^{8}\ \frac{\cancel{\text{kg}} \cdot \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\cancel{\text{kg}}}} = 29\,861{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \mathbf{30\ km/s}$$

35. Calcula el periodo de un satélite artificial que sigue una trayectoria circular a 400 km de altura. ¿Cuántas vueltas a la Tierra da el satélite en un día?
Datos: $M_{Tierra} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_{Tierra} = 6370$ km; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Teniendo en cuenta el problema anterior, pero ahora la masa es la masa de la Tierra:

$$v^2 = G \cdot \frac{M}{d}, \text{ siendo } d = R_T + h = 6370 \text{ km} + 400 \text{ km} = 6{,}77 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Calculamos la velocidad lineal del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{d}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6{,}77 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7669{,}3 \text{ m/s}$$

El periodo es el tiempo que el satélite tarda en dar una vuelta. Como el módulo de la velocidad es constante, dividimos la longitud de una vuelta entre el tiempo empleado en recorrerla o periodo. Despejando, sustituyendo y operando:

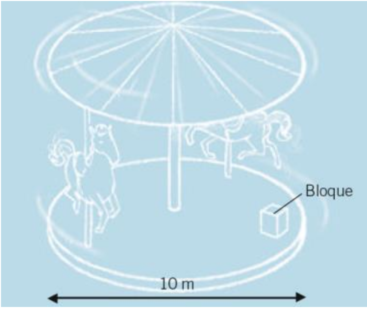
$$v = \frac{2\pi \cdot d}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot d}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}77 \cdot 10^6\ \cancel{\text{m}}}{7669{,}3 \dfrac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = \mathbf{5546\ s}$$

Y el número de vueltas que da el satélite a la Tierra en un día es:

$$1\ \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 86\,400 \text{ s}$$

$$\text{Número de vueltas} = \frac{86\,400\ \cancel{\text{s}}}{5546\ \cancel{\text{s}}} = \mathbf{15{,}6\ vueltas}$$

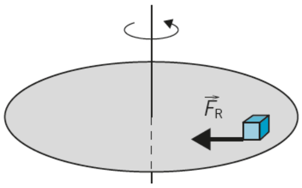
36. Un carrusel de 10 m de diámetro da una vuelta cada 5 s. Un bloque de madera está colocado sobre el suelo en el borde exterior del carrusel, a 5 m del centro. ¿Cuál debe ser el valor del coeficiente de rozamiento estático para que el bloque no sea lanzado al exterior?



Como el módulo de la velocidad es constante, dividimos la longitud de una vuelta entre el tiempo que tarda en dar una vuelta (periodo), y calculamos la velocidad lineal:

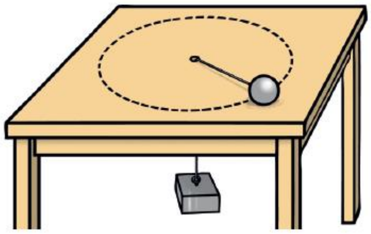
$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} = \frac{2\pi \cdot 5\text{ m}}{5\text{ s}} = 6{,}28\text{ m/s}$$

La fuerza de rozamiento es la fuerza centrípeta que mantiene al bloque girando:



$$F_C = F_R \Rightarrow \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{R} = \mu \cdot \cancel{m} \cdot g \Rightarrow \mu = \frac{v^2}{g \cdot R} = \frac{(6{,}28\text{ m/s})^2}{9{,}8\text{ m/s}^2 \cdot 5\text{ m}} = \mathbf{0{,}8}$$

37. Un cuerpo de masa de 200 g gira en un círculo horizontal de radio 50 cm sobre una mesa horizontal sin rozamiento dando 0,8 vueltas por segundo. El cuerpo está unido, mediante una cuerda que pasa por un orificio situado en el centro de la mesa, a otro cuerpo de masa *m*. ¿Qué valor debe tener *m* para que el sistema esté equilibrado?



Expresamos la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 0{,}8\text{ rev/s} = 0{,}8\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\text{s}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 1{,}6\pi\text{ rad/s}$$

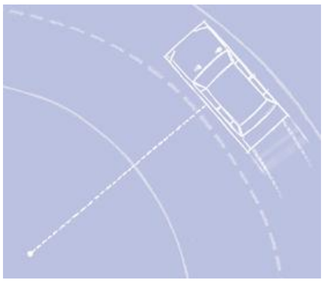
La tensión de la cuerda es la fuerza centrípeta que hace girar la bolita. Para que el sistema se encuentre en equilibrio el peso de la masa que cuelga debe ser igual a la fuerza centrípeta que hace girar a la bolita:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \Rightarrow \vec{P} = m_{\text{bolita}} \cdot \vec{a}_N \Rightarrow m \cdot g = m_{\text{bolita}} \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$m = \frac{m_{\text{bolita}} \cdot \omega^2 \cdot R}{g} = \frac{0{,}2\text{ kg} \cdot (1{,}6\pi\text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}5\text{ m}}{9{,}8\text{ m/s}^2} = 0{,}258\text{ kg} = \mathbf{258\text{ g}}$$

38. Un vehículo de 1200 kg de masa toma una curva de 50 m de radio con una velocidad de 50 km/h. Halla la mínima fuerza de rozamiento de las ruedas con el asfalto para poder efectuar el giro. Calcula el valor del coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el asfalto.

Expresamos la velocidad en unidades del SI:



$$v = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 50\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} \cdot \frac{1000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} = 13{,}\widehat{8}\text{ m/s}$$

Para que el vehículo tome la curva se necesita que actúe una fuerza dirigida hacia el centro de la trayectoria circular. La fuerza de rozamiento de los neumáticos con el suelo es en este caso la fuerza centrípeta, igual al producto de la masa por la aceleración normal.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \Rightarrow \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}_N \Rightarrow F_R = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1200\text{ kg} \cdot \frac{(13{,}\widehat{8}\text{ m/s})^2}{50\text{ m}} = \mathbf{4630\text{ N}}$$

Recuerda que en la dirección perpendicular al plano el sistema se encuentra en equilibrio, por lo que el valor de la normal se corresponde con el del peso:

$$F_R = \mu \cdot N = \mu \cdot P = \mu \cdot m \cdot g$$

Despejamos el coeficiente de rozamiento y calculamos:

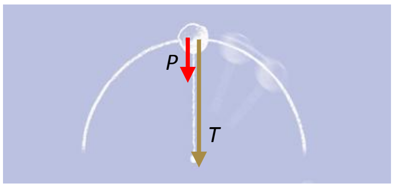
$$\mu = \frac{F_R}{m \cdot g} = \frac{4630\ \text{N}}{1200\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{0{,}4}$$

39. Se hace girar un cuerpo de masa 300 g atado al extremo de una cuerda de 60 cm de longitud a una velocidad de 300 rpm en una circunferencia vertical. Halla la tensión de la cuerda en los puntos más alto y más bajo de la trayectoria.

Expresamos la velocidad angular en unidades del SI:

$$\omega = 300\ \text{rpm} = 300\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\,\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = 10\,\pi\ \text{rad/s}$$

En el punto más alto, la suma de las dos fuerzas, peso y tensión, es la fuerza centrípeta responsable de la aceleración normal en dicho punto:

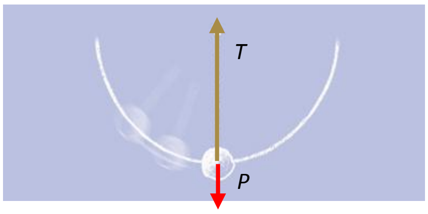


$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad \vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T + P = m \cdot a_N$$

Despejamos la tension:

$$T = m \cdot a_N - m \cdot g = m \cdot \left(\omega^2 \cdot R - g\right) = 0{,}3\ \text{kg} \cdot \left((10\,\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}6\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2\right) = \mathbf{175\ N}$$

En el punto más bajo la situación es similar, pero ahora la tensión y el peso tienen distinto sentido. La tensión, como la aceleración normal centrípeta, está dirigida hacia arriba y el peso, como siempre, está dirigido hacia abajo.



$$\vec{T} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_N \quad \Rightarrow \quad T - P = m \cdot a_N$$

Despejamos la tension:

$$T = m \cdot a_N + m \cdot g = m \cdot \left(\omega^2 \cdot R + g\right) = 0{,}3\ \text{kg} \cdot \left((10\,\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}6\ \text{m} + 9{,}8\ \text{m/s}^2\right) = \mathbf{181\ N}$$

40. Un coche de masa 1500 kg que se mueve con velocidad constante de 110 km/h toma una curva circular de 90 m de radio.

a) ¿Qué tipo de aceleración lleva?

b) ¿Qué intensidad tiene la fuerza que hay que ejercer sobre el coche para que no se salga de la curva?

c) ¿Qué agente ejerce esta fuerza?

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 110\ \text{km / h} = 110\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 30{,}\widehat{5}\ \text{m/s}$$

a) Lleva aceleración normal.

b) Calculamos la intensidad de la fuerza centrípeta:

$$F_C = m \cdot a_N = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1500\ \text{kg} \cdot \frac{(30{,}\widehat{5}\ \text{m/s})^2}{90\ \text{m}} = \mathbf{15\,561\ N}$$

c) La fuerza centrípeta es la fuerza de rozamiento de los neumáticos con el asfalto.

Cinemática de los planetas

41. Enuncia las leyes de Kepler y razona si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita.

1. Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas elípticas. El Sol está en uno de los focos de la elipse.
2. Los planetas se mueven con velocidad areolar constante; es decir, el vector de posición de cada planeta con respecto al Sol (el radio vector) barre áreas iguales en tiempos iguales. Siendo A el área barrida por el radio vector:

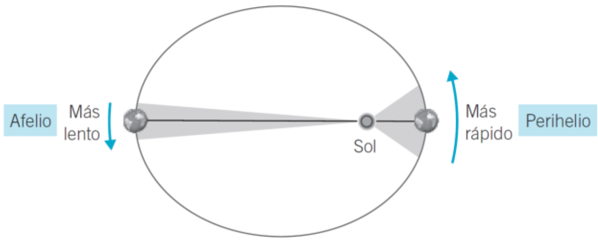
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{cte.}$$

3. Para todos los planetas:

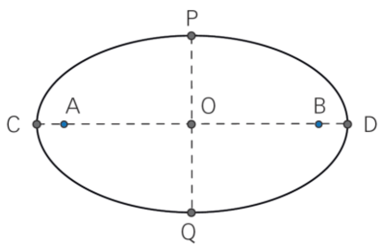
$$\frac{T^2}{a^3} = k\,(\text{constante})$$

Donde a es el semieje mayor de la elipse y T es el periodo del planeta.

Para que se cumpla la segunda ley de Kepler los planetas deben moverse más rápido al estar más cerca del Sol (perihelio), ya que una velocidad areolar constante implica una longitud de arco mayor en ese punto que cuando esté más alejado del Sol para un mismo intervalo de tiempo.



42. En la figura se muestra la trayectoria de un cometa. Indica en tu cuaderno en qué punto se coloca el Sol y dale nombre a los puntos etiquetados con las letras.



- El Sol se sitúa en el punto A o en el punto B.
- Si A es la posición del Sol: C es el perihelio y D es el afelio.
- O es el centro de la órbita.
- P y Q son los vértices menores.

43. El periodo de revolución de Marte alrededor del Sol es de 687 días. Sabiendo que la distancia de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros, calcula la distancia de Marte al Sol. (Suponer que las órbitas descritas son circunferencias). Dato: T_{Tierra} = 365,256 días.

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, todos los planetas que giran alrededor del Sol verifican:

$$\frac{T^2}{r^3} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{T_M^2}{r_M^3} = k = \frac{T_T^2}{r_T^3}$$

Igualando, despejando sustituyendo y operando:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \quad \Rightarrow \quad r_M = r_T \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_T}\right)^2} = 150 \cdot 10^6\ \text{km} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{687\ \cancel{\text{días}}}{365{,}256\ \cancel{\text{días}}}\right)^2} = 229 \cdot 10^6\ \text{km}$$

Por tanto, la distancia de Marte al Sol es de **229 millones de km**.

ACTIVIDADES FINALES (página 307)

44. Una partícula se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado alejándose continuamente de un punto que tomamos como origen del movimiento y en dirección radial. Indica en tu cuaderno su momento angular:

a) Es constante.

b) Es cero.

c) Aumenta indefinidamente.

Por la definición de momento angular:

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|m \cdot \vec{v}\right| \cdot \text{sen}\ \alpha$$

Si los vectores de $\vec{r}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección y sentido, resulta que forman un ángulo de 0°. Sabemos que sen $0° = 0$ y el resultado es nulo, $L = 0$.

Respuesta correcta: **b**.

45. Resuelve el ejercicio anterior suponiendo que la partícula se acerca continuamente al origen.

La única diferencia con respecto al ejercicio anterior es que, en este caso, los vectores forman un ángulo de 180°. Pero, nuevamente, sen $180° = 0$ y el resultado es nulo, $L = 0$.

46. Una partícula se mueve en un plano con movimiento rectilíneo y uniforme. Demuestra que su momento angular, con respecto a un punto cualquiera de ese plano, va a ser constante.

El momento angular es constante si no varía con el tiempo.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r} \times \vec{p})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\,(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\,(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad [1]$$

El vector $m \cdot \vec{v}$ es paralelo a $\vec{v}$. El producto vectorial entre ambos vectores es 0, porque el seno del ángulo que forman es 0, $\vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) = \vec{0}$.

Si la partícula se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, su aceleración es cero, $\vec{a} = 0$. Su masa tampoco varía con el tiempo, $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$. Como consecuencia, el segundo término es nulo:

$$\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) = \vec{r} \times \left(0 \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{a}\right) = \vec{r} \times \left(m \cdot \vec{0}\right) = \vec{0}$$

Sustituyendo en la expresión [1]:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\,(m \cdot \vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

La variación con el tiempo del vector momento angular es nula. Por tanto, es constante.

47. Escribe la respuesta en tu cuaderno. Si una partícula se mueve en un campo de fuerzas centrales, su momento angular respecto al centro de fuerzas:

a) Aumenta indefinidamente.

b) Es cero.

c) Permanece constante.

De acuerdo con el teorema del momento angular:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Una fuerza central tiene, en todo momento, la dirección del radio. Si la partícula describe un movimiento cualquiera bajo la acción de esta fuerza, se cumplirá $\vec{r} \times \vec{F} = 0$, por lo que $\vec{L}$ no presentará variación respecto al tiempo, y la respuesta correcta es la **c**, **permanece constante**.

48. Escribe en tu cuaderno la frase correcta. En el movimiento de la Tierra alrededor del Sol:

- **a) Se conservan el momento lineal y el momento angular.**
- **b) Se conserva el momento lineal y varía el momento angular.**
- **c) Varía el momento lineal y se conserva el momento angular.**
- **d) Varían el momento lineal y el momento angular.**

La respuesta correcta es la **c**. Al moverse bajo la acción de fuerzas centrales (gravitatoria), se conserva su momento angular.

Sin embargo, la velocidad lineal con la que se mueve no es constante, por lo que su momento lineal no se conservará. Es un vector que cambia de dirección en cada instante debido a la acción de una aceleración centrípeta, relacionada con la fuerza central. Recuérdese la segunda ley de Kepler: la Tierra se mueve con velocidad areolar constante, por lo que su velocidad en el perihelio será mayor que en el afelio.

49. Escribe la respuesta en tu cuaderno. Las órbitas de los planetas son planas porque:

- **a) Se mueven con velocidad constante.**
- **b) Se mueven bajo la acción de una fuerza central.**
- **c) Los planetas son restos materiales de una única estrella.**

No es verdad que los planetas se muevan con velocidad constante, cambian de dirección y de módulo a lo largo de la órbita. El origen de los materiales que forman los planetas no tiene nada que ver con la forma de su órbita. La respuesta correcta es la **b**, ya que al moverse bajo la acción de una fuerza central su momento angular es constante, y de ello se deriva que las órbitas son planas.

Recuérdese que $\vec{L}$ es en todo momento perpendicular a $\vec{r}$ y $\vec{p}$; para que la dirección de $\vec{L}$ no cambie, $\vec{r}$ y $\vec{p}$ deben definir siempre el mismo plano, lo que obliga a que los planetas describan órbitas planas.

50. Demuestra que para cualquier planeta el producto de su velocidad instantánea en un punto de la trayectoria por el radio vector correspondiente es constante.

Una consecuencia de la segunda ley de Kepler es que los planetas se mueven con momento angular constante. Para dos puntos cualesquiera es el mismo momento angular:

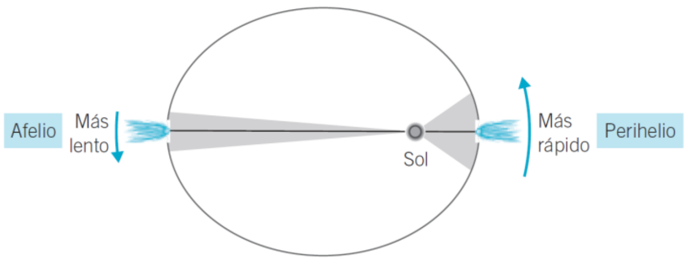
$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_1 \times (m \cdot \vec{v}_1) = \vec{r}_2 \times (m \cdot \vec{v}_2)$$

Es el mismo planeta con la misma masa a lo largo de la órbita. Simplificamos *m*:

$$\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 = \text{cte.}$$

51. Explica por qué los cometas que orbitan elípticamente alrededor del Sol tienen mayor velocidad cuando se encuentran cerca que cuando se encuentran lejos del Sol, considerando el carácter de fuerza central de la fuerza gravitatoria.

En el caso de fuerzas centrales, de acuerdo con la segunda ley de Kepler, el radio vector que une un cometa al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.



Por esto, cuando el cometa está más cerca del Sol, tendrá que recorrer una longitud de arco mayor para abarcar la misma área que la recorrida en el mismo tiempo cuando está alejado del Sol. Para ello debe moverse más rápido.

Dinámica de los planetas

52. Calcula la masa de la Tierra, sabiendo que la Luna tiene un periodo igual a 2,3 · 10⁶ s y se encuentra a una distancia media de la Tierra de 384 400 km. Dato: *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m²/kg².

Cuando la Luna está en órbita alrededor de la Tierra:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad \cancel{M_L} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{\cancel{M_L} \cdot M_T}{r^{\cancel{2}}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\left(\frac{2\,\pi}{T} \cdot r\right)^2 = G \cdot \frac{M_T}{r} \quad \Rightarrow \quad M_T = \frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot \frac{r^3}{G} = \frac{4\,\pi^2}{\left(2{,}3 \cdot 10^6 \text{ s}\right)^2} \cdot \frac{\left(3{,}884 \cdot 10^8 \text{ m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = \mathbf{6{,}35 \cdot 10^{24}\ kg}$$

53. ¿A qué distancia del centro de la Tierra la aceleración de la gravedad vale 4,9 m/s²?

Datos: *G* = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m²/kg²; *M*T = 5,97 · 10²⁴ kg.

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra vale 9,8 m/s². Como a distancias mayores *g* decrece, calculamos la distancia a la que *g* = 4,9 m/s²:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \quad \Rightarrow \quad R_T + h = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{g}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4{,}9 \text{ m/s}^2}} = 9{,}015 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$R_T + h = \mathbf{9015\ km}$$

54. Una persona de 70 kg se encuentra sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuál es su peso? Y cuál sería su peso si:

a) La masa de la Tierra se reduce a la mitad.

b) El radio de la Tierra se reduce a la mitad.

c) El radio y la masa de la Tierra se reducen a la mitad.

Dato: *g* = 9,8 m/s².

$$P = F_G = m \cdot g$$

En la Tierra:

$$g = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = g_0 = 9{,}8 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad P = 70 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 686 \text{ N}$$

a) Si $M'_T = \frac{M_T}{2}$:

$$g' = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{R_T^2} = \frac{g_0}{2} \quad \Rightarrow \quad P' = m \cdot g' = m \cdot \frac{g_0}{2} = \frac{P}{2} = \frac{686 \text{ N}}{2} = \mathbf{343\ N}$$

b) Si $R'_T = \frac{R_T}{2}$:

$$g'' = G \cdot \frac{M_T}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{M_T}{\frac{R_T^2}{4}} = 4 \cdot g_0 \quad \Rightarrow \quad P'' = m \cdot g'' = m \cdot 4 \cdot g = 4 \cdot P = 4 \cdot 686 \text{ N} = \mathbf{2744\ N}$$

c) Si $M_T' = \dfrac{M_T}{2}$ y $R_T' = \dfrac{R_T}{2}$

$$g''' = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{\frac{M_T}{2}}{\frac{R_T^2}{4}} = 2 \cdot g_0 \quad \Rightarrow \quad P''' = m \cdot g''' = m \cdot 2 \cdot g = 2 \cdot P = 2 \cdot 686\ \text{N} = \mathbf{1372\ N}$$

55. Calcula la aceleración de la gravedad en un punto que está situado a una distancia de la Tierra equivalente a la distancia a la que se encuentra la Luna (unos 60 radios terrestres). Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Llamamos g_0 al valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y suponemos que vale 9,8 m/s²:

$$g = G \cdot \frac{M}{(R_T + h)^2} = G \cdot \frac{M}{(R_T + 60 \cdot R_T)^2} = G \cdot \frac{M}{61^2 \cdot R_T^2} = \frac{g_0}{61^2}$$

$$g = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{3721} = 2{,}63 \cdot 10^{-3}\ \text{m/s}^2 = \mathbf{2{,}63\ mm/s^2}$$

56. La Luna describe una órbita casi circular en torno a la Tierra en 27,3 días. Calcula:

a) La distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna.

b) El valor de la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna y con que la Luna atrae a la Tierra, sabiendo que la masa de la Luna es 1/81 veces la de la Tierra.

c) Si en la Luna se deja caer un objeto desde una altura de 10 m, ¿con qué velocidad llegará al suelo?

d) ¿Con qué velocidad llegará al suelo si se deja caer desde una altura de 10 m de la Tierra?

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 4 \cdot R_L$; $R_T = 6370$ km.

$$27{,}3\ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 2{,}36 \cdot 10^6\ \text{s}$$

a) Cuando la Luna está en órbita alrededor de la Tierra:

$$F_G = F_C \quad \Rightarrow \quad \cancel{M_L} \cdot \frac{v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{\cancel{M_L} \cdot M_T}{r^{\cancel{2}}} \quad \Rightarrow \quad v^2 = G \cdot \frac{M_T}{r}$$

Sabiendo que $v = \omega \cdot r = \dfrac{2\pi}{T} \cdot r$, sustituyendo y despejando:

$$\left(\frac{2\pi}{T} \cdot r_L\right)^2 = G \cdot \frac{M_T}{r_L}$$

$$r_L = \sqrt[3]{G \cdot M_T \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^{-2}} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{2{,}36 \cdot 10^6\ \text{s}}{2\pi}\right)^2} = \mathbf{3{,}83 \cdot 10^8\ m}$$

b) En este caso:

$$F_T = G \cdot \frac{M_T \cdot M_L}{r_L^2} = G \cdot \frac{M_T \cdot \frac{M_T}{81}}{r_L^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\left(5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}\right)^2}{81 \cdot \left(3{,}83 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = \mathbf{2{,}00 \cdot 10^{20}\ N}$$

La fuerza con que la Tierra atrae a la Luna es igual y de sentido contrario a la fuerza con que la Luna atrae a la Tierra.

c) El cuerpo que cae tendrá un movimiento uniformemente acelerado. Vendrá determinado por las ecuaciones:

$$v = v_0 + a \cdot t; \quad y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Suponemos que $v_0 = 0$ y que el origen de tiempos y espacios está en el momento y en el punto en que se inicia el movimiento. La aceleración será en cada caso la de la gravedad en la Luna; utilizando un sistema de referencia cartesiano, tendrá signo negativo.

Trabajamos en unidades del SI. Para una altura de 10 m será:

$$g_L = G \cdot \frac{M_L}{(R_L + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\dfrac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{81}}{\left(\dfrac{6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}}{4} + 10\ \text{m}\right)^2} = 1{,}94\ \text{m/s}^2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g_L \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{-2 \cdot (-10\ \text{m})}{1{,}94\ \text{m/s}^2}} = 3{,}21\ \text{s}$$

Por tanto:

$$v_L = -g_L \cdot t = -1{,}94\ \text{m/s}^2 \cdot 3{,}21\ \text{s} = \mathbf{-6{,}23\ m/s}$$

El signo negativo indica que está descendiendo.

d) Las consideraciones son las mismas que en el caso anterior. Calculamos el valor de g en ese punto; como antes, es muy similar al valor en la superficie:

$$g_T = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{\left(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} + 10\ \text{m}\right)^2} = 9{,}813\ \text{m/s}^2$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g_L \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{-2 \cdot (-10\,\text{m})}{9{,}813\,\text{m/s}^2}} = 1{,}43\,\text{s}$$

Por tanto:

$$v_T = -g_T \cdot t = -9{,}813\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}43\ \text{s} = \mathbf{-14{,}02\ m/s}$$

El signo negativo indica que está descendiendo.

57. Júpiter está rodeado de una serie de lunas que giran en torno a él de forma similar a como los planetas giran alrededor del Sol. Completa la tabla en tu cuaderno para conocer los datos orbitales de algunas lunas de Júpiter.

Nombre	Radio orbital (10^6 m)	Periodo (días)
Ío	421,6	1,769
Europa		3,551
Ganimedes	1070	
Calisto	1882	16,689

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, todos los planetas que giran alrededor de un mismo planeta verifican:

$$\frac{T^2}{r^3} = k$$

Por tanto:

$$\frac{T_I^2}{r_I^3} = \frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_G^2}{r_G^3} = \text{cte.}$$

Igualando:

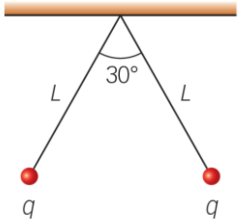
$$\frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_I^2}{r_I^3} \quad \Rightarrow \quad r_E = r_I \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_E}{T_I}\right)^2} = 421{,}6 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3{,}551\ \cancel{\text{días}}}{1{,}769\ \cancel{\text{días}}}\right)^2} = \mathbf{670{,}9 \cdot 10^6\ m}$$

Y para Ganimedes:

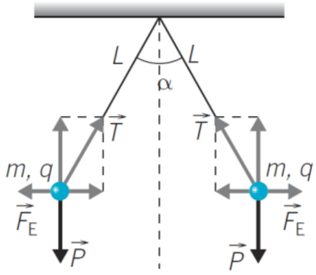
$$\frac{T_G^2}{r_G^3} = \frac{T_I^2}{r_I^3} \quad \Rightarrow \quad T_G = T_I \cdot \sqrt{\left(\frac{r_G}{r_I}\right)^3} = 1{,}769\,\text{días} \cdot \sqrt{\left(\frac{1070 \cdot \cancel{10^6\ \text{m}}}{421{,}6 \cdot \cancel{10^6\ \text{m}}}\right)^3} = \mathbf{7{,}152\ días}$$

Cargas eléctricas suspendidas

58. **Dos esferas, de masa $m = 50$ g y con carga q, cada una, se suspenden del mismo punto mediante hilos de masa despreciable y longitud $L = 0{,}25$ m, bajo la gravedad terrestre. ¿Cuál debe ser el valor de la carga q para que, en equilibrio, los hilos formen entre sí un ángulo de 30°? Datos: $g = 9{,}8$ m/s^2; $k = 9 \cdot 10^9$ N · m^2/C^2.**



Planteamos el balance de fuerzas para cada una de las cargas suspendidas y en equilibrio.



- Eje vertical:

$$T \cdot \cos\theta = P = m \cdot g$$

- Eje horizontal:

$$T \cdot \operatorname{sen}\theta = F_E = k \cdot \frac{|q \cdot q|}{d^2}$$

La separación entre las cargas es $d = 2 \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta$. El ángulo es:

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \frac{30°}{2} = 15°$$

Para calcular la carga, dividimos miembro a miembro y sustituimos los datos que tenemos, expresando las magnitudes en unidades del SI:

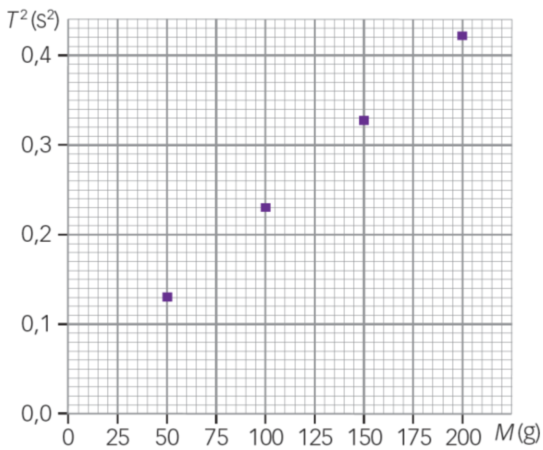
$$\frac{\cancel{T} \cdot \cos\theta}{\cancel{T} \cdot \operatorname{sen}\theta} = \frac{m \cdot g}{k \cdot \dfrac{q^2}{d^2}} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{(2 \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 \cdot m \cdot g}{k \cdot q^2} \Rightarrow q^2 = \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot (2 \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 \cdot m \cdot g}{k \cdot \cos\theta}$$

$$q = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\theta \cdot (2 \cdot L \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 \cdot m \cdot g}{k \cdot \cos\theta}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}15° \cdot (2 \cdot 0{,}25\ \text{m} \cdot \operatorname{sen}15°)^2 \cdot 0{,}05\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \cdot \cos 15°}} = 4{,}94 \cdot 10^{-7}\ \text{C}$$

$$q = \mathbf{0{,}49\ \mu C}$$

Ampliación (página 308)

59. **Disponemos de un muelle y de cuatro masas, cada una de ellas de valor M. Las masas se suspenden sucesivamente del muelle acumulando su valor. Al tomar medidas de pequeñas oscilaciones, anotamos en cada caso el periodo de oscilación, T. Tras la representación de los resultados experimentales según se muestra en la gráfica.**



a) Determina la constante elástica del muelle.

b) Justifica físicamente el comportamiento observado.

a) Tenemos en cuenta la ecuación de una recta y la relación entre el periodo y la constante elástica del muelle, $y = a \cdot x + b$, donde a es la pendiente y b la ordenada en el origen:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow \begin{cases} T^2 = \dfrac{4\pi^2}{k} \cdot M + 0 \\ y = a \cdot x + b \end{cases}$$

Elaboramos una tabla que recoja los puntos conocidos de la gráfica, denominando x a M (kg) e y a T^2 (s^2):

	x	y	$x \cdot y$	x^2
	0,05	0,13	0,0065	0,0025
	0,10	0,23	0,0230	0,0100
	0,15	0,33	0,0495	0,0225
$n = 4$	0,20	0,43	0,0860	0,0400
Sumas	0,50	1,12	0,1650	0,0750
Promedios	0,125	0,28		

La pendiente de la recta de regresión lineal:

$$a = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1650 - 0{,}50 \cdot 1{,}12}{4 \cdot 0{,}0750 - (0{,}50)^2} = 2$$

La ordenada en el origen de la recta de regresión lineal:

$$b = \langle y \rangle - a \cdot \langle x \rangle = 0{,}28 - 2 \cdot 0{,}125 = 0{,}03$$

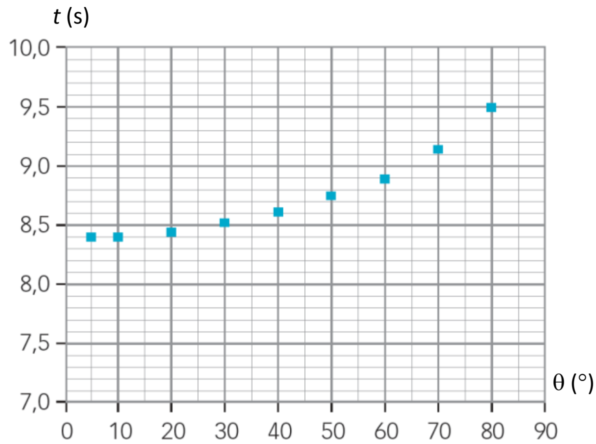
La recta de regresión lineal es $y = 2 \cdot x + 0{,}03$. Comparando con las variables originales:

$$\frac{4\pi^2}{k} = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2 = \mathbf{19{,}74\,\frac{N}{m}}$$

La ordenada en el origen debería resultar nula pero no es así. Esto ocurre porque la masa del muelle no es despreciable, la masa del muelle también está oscilando.

b) Cuando se estira el muelle, aparece una fuerza recuperadora que le obliga a realizar un movimiento armónico simple. Como se ha deducido en el libro del alumno, el cuadrado del periodo de oscilación es directamente proporcional a la masa sujeta al resorte.

60. Un astronauta realiza un viaje espacial a un planeta del sistema solar. Durante su aproximación determina, con sus aparatos de telemetría, el radio de dicho planeta, que resulta ser $R = 3{,}37 \cdot 10^6$ m. Una vez en la superficie del planeta utiliza un péndulo simple, formado por una pequeña esfera de plomo y un hilo de 25 cm de longitud, y realiza el análisis de sus oscilaciones, variando la amplitud angular de la oscilación, θ, y midiendo, en cada caso, el tiempo, t, correspondiente a 5 oscilaciones completas del péndulo. El astronauta representa los valores experimentales según la gráfica:



a) Comenta físicamente los resultados mostrados en la figura.

b) Determina la masa del planeta.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2.

a) El periodo del péndulo se relaciona con su longitud y el valor de g en el punto donde oscila:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

De acuerdo con la deducción que se recoge en el libro del alumno, el periodo es independiente de la amplitud angular siempre que esta no exceda de 15°, ya que, para valores más altos, no se cumple la simplificación $\theta \simeq \text{sen}\,\theta$

En la gráfica se observa que el tiempo que tarda el péndulo en dar cinco oscilaciones (y, por tanto, su periodo) aumenta a medida que aumenta la amplitud angular. Para amplitudes mayores de 15° el movimiento del péndulo deja de ser armónico.

b) En la parte fiable de la gráfica leemos que el periodo del péndulo es:

$$T = \frac{\text{Tiempo}}{\text{Número de oscilaciones}} = \frac{8{,}4\ \text{s}}{5\ \text{oscilaciones}} = 1{,}68\ \text{s}$$

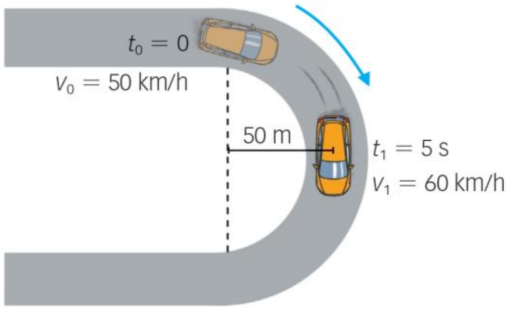
Con este dato calculamos g en la superficie del planeta:

$$g = \frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot L = \frac{4\,\pi^2}{(1{,}68\ \text{s})^2} \cdot 0{,}25\ \text{m} = 3{,}5\ \text{m/s}^2$$

Como el valor de g en la superficie del planeta es:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{3{,}5\ \text{m/s}^2 \cdot (3{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = \mathbf{5{,}95 \cdot 10^{23}\ kg}$$

61. Un coche de 1100 kg acelera justo al entrar a una curva, de manera que su velocidad aumenta de 50 a 60 km/h en un tiempo de 5 segundos.



a) Calcula la fuerza normal, la fuerza tangencial y la fuerza total en el vehículo cuando este está a mitad de la curva.

b) Haz un esquema con las fuerzas.

Expresamos la velocidad en unidades del SI.

$$v_0 = 50\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 13{,}\widehat{8}\ \text{m/s}$$

$$v_1 = 60\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 16{,}\widehat{6}\ \text{m/s}$$

La aceleración tangencial del coche es:

$$a_T = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = \frac{16{,}\widehat{6}\ \text{m/s} - 13{,}\widehat{8}\ \text{m/s}}{5\ \text{s}} = 0{,}\widehat{5}\ \text{m/s}^2$$

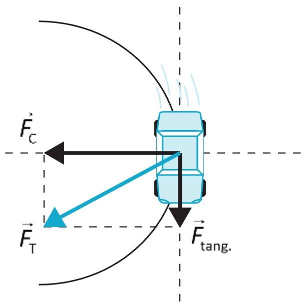
a) Hallamos la fuerza normal, la tangencial y la total en la mitad de la curva:

$$F_C = m \cdot \frac{v^2}{R} = 1100\ \text{kg} \cdot \frac{(16{,}\widehat{6}\ \text{m/s})^2}{50\ \text{m}} = 6111{,}\widehat{1}\ \text{N} \simeq \mathbf{6111\,N}$$

$$F_{\text{tang.}} = m \cdot a_T = 1100\ \text{kg} \cdot 0{,}\widehat{5}\ \text{m/s}^2 = 611{,}\widehat{1}\ \text{N} \simeq \mathbf{611\,N}$$

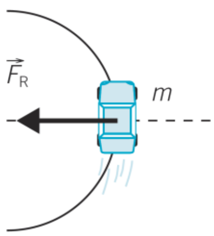
$$F_T = \sqrt{F_C^2 + F_{\text{tang.}}^2} = \sqrt{(6111{,}\widehat{1}\ \text{N})^2 + (611{,}\widehat{1}\ \text{N})^2} = 6141{,}59\ \text{N} \simeq \mathbf{6142\,N}$$

b) Respuesta gráfica:



62. Explica por qué es más fácil que un coche derrape cuando toma una curva con una velocidad elevada. Haz un esquema con las fuerzas que actúan cuando el coche toma una curva.

La fuerza responsable del movimiento circular cuando un coche toma una curva es la fuerza de rozamiento entre los neumáticos y la calzada, y va dirigida hacia el centro de la curva.

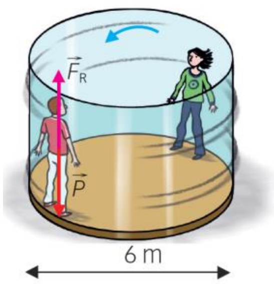


Cuanto más cerrada es una curva y mayor es la velocidad con que se toma, mayor es la a_N y más grande es la fuerza que se precisa.

Si la calzada está mojada o la curva es muy cerrada, la fuerza de rozamiento puede ser insuficiente y el coche derrapa.

$$F_R = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

63. Una atracción de un parque de atracciones consiste en un cilindro vertical giratorio (3 m de radio) en cuya pared interior se colocan las personas con la espalda apoyada en la pared. Al girar rápidamente, un operario retira el suelo de la atracción y las personas quedan adheridas a la pared. Dato: g = 9,8 m/s².

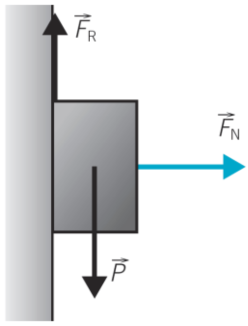


a) Calcula la velocidad mínima que debe llevar el cilindro para que las personas no caigan, si el coeficiente de rozamiento estático con la pared es μ_e = 0,3.

b) Calcula la velocidad angular del cilindro.

c) ¿Cuántas vueltas da cada persona en un minuto?

a) Las personas quedan pegadas a la pared sin caerse, si la fuerza de rozamiento es igual al peso:



$$F_R = \mu \cdot N, \text{ donde } N = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad F_R = P \quad \Rightarrow \quad \mu_e \cdot \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{R} = \cancel{m} \cdot g$$

Despejamos la velocidad y sustituimos:

$$v = \sqrt{\frac{R \cdot g}{\mu_e}} = \sqrt{\frac{3 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{0{,}3}} = \mathbf{9{,}90 \text{ m/s}}$$

b) La velocidad angular se calcula:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{9{,}90 \text{ m/s}}{3 \text{ m}} = \mathbf{3{,}30 \text{ rad/s}}$$

c) Para calcular el número de vueltas, en primer lugar hallamos el ángulo recorrido en 60 s y sustituimos:

$$\varphi = \omega \cdot t = 3{,}30 \text{ rad/s} \cdot 60 \text{ s} = 198 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{198 \cancel{\text{rad}}}{2\pi \cancel{\text{rad}}/\text{vuelta}} = \mathbf{31{,}5 \text{ vueltas}}$$

64. ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo que la fuerza centrípeta a que está sometido en la superficie de la Tierra, en el ecuador? Datos: R_E = 6 378 km; G = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m² · kg⁻²; M_T = 5,97 · 10²⁴ kg.

El peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra lo atrae. Utilizamos unidades del SI:

$$P = F_G = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot m}{\left(6{,}378 \cdot 10^6 \text{ m}\right)^2} = 9{,}789 \cdot m \qquad [1]$$

Para calcular la fuerza centrípeta tenemos en cuenta que el cuerpo que está en la superficie de la Tierra sobre el ecuador tiene un movimiento de rotación idéntico al de la Tierra, es decir, con un periodo de 1 día. Utilizamos unidades del SI:

$$1 \cancel{\text{día}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} = 86\,400 \text{ s}$$

$$F_C = m \cdot \frac{v^2}{R_E} = m \cdot \frac{(\omega \cdot R_E)^2}{R_E} = m \cdot \omega^2 \cdot R_E = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R_E = m \cdot \left(\frac{2\pi}{86\,400 \text{ s}}\right)^2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6 \text{ m} = 0{,}0337 \cdot m \qquad [2]$$

Relacionando las expresiones [1] y [2]:

$$\frac{P}{F_C} = \frac{9{,}789 \cdot \cancel{m}}{0{,}0337 \cdot \cancel{m}} \simeq \mathbf{290}$$

65. **Rea y Titán son dos satélites de Saturno que tardan, respectivamente, 4,52 y 15,9 días terrestres en recorrer sus órbitas en torno a dicho planeta. Sabiendo que el radio medio de la órbita de Rea es $5{,}27 \cdot 10^8$ m, calcula el radio medio de la órbita de Titán y la masa de Saturno. Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻².**

Teniendo en cuenta la tercera ley de Kepler para ambos satélites:

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_R^2}{r_R^3} \Rightarrow r_T = r_R \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_T}{T_R}\right)^2} = 5{,}27 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{15{,}9 \cancel{\text{ días}}}{4{,}52 \cancel{\text{ días}}}\right)^2} = \mathbf{1{,}22 \cdot 10^9 \text{ m}}$$

Para calcular la masa de Saturno estudiamos el sistema formado por este planeta y uno de sus satélites, por ejemplo, Rea. Cuando el satélite está en órbita alrededor de Saturno:

$$F_C = F_G \Rightarrow \cancel{m_R} \cdot \frac{v_R^2}{\cancel{r_R}} = G \cdot \frac{M_{Sat} \cdot \cancel{m_R}}{r_R^{\cancel{2}}} \Rightarrow v_R^2 = G \cdot \frac{M_{Sat}}{r_R}$$

Sabiendo que $v_R = \omega \cdot r_R = \frac{2\pi}{T_R} \cdot r_R$, sustituyendo y despejando:

$$\left(\frac{2\pi}{T_R}\right)^2 \cdot r_R^2 = G \cdot \frac{M_S}{r_R} \Rightarrow M_S = \left(\frac{2\pi}{T_R}\right)^2 \cdot \frac{r_R^3}{G}$$

Teniendo en cuenta los datos de Rea, expresados en unidades SI:

$$4{,}52 \cancel{\text{ día}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{ h}}}{1 \cancel{\text{ día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{ h}}} = 390\,528 \text{ s}$$

$$M_S = \left(\frac{2\pi}{390\,528 \text{ s}}\right)^2 \cdot \frac{\left(5{,}27 \cdot 10^8 \text{ m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}} = 5{,}682 \cdot 10^{26} \frac{\cancel{\text{m}^3} \cdot \text{kg}^{\cancel{2}}}{\left(\cancel{\text{kg}} \cdot \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}^2}}\right) \cdot \cancel{\text{m}^2} \cdot \cancel{\text{s}^2}} = \mathbf{5{,}68 \cdot 10^{26} \text{ kg}}$$

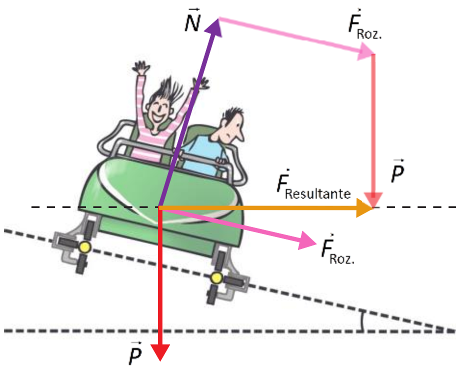
FÍSICA EN TU VIDA (página 310)

INTERPRETA

1. **Haz un esquema en tu cuaderno de las fuerzas ejercidas sobre un vehículo en una curva con peralte. ¿Hacia dónde va dirigida la aceleración normal que sufre el vehículo? Dibújala.**

En una curva con peralte actúan las siguientes fuerzas sobre el vehículo:

- El peso.
- La fuerza de rozamiento.
- La fuerza normal.



La aceleración normal va dirigida hacia el centro de la curva. La obtenemos al aplicar la segunda ley de Newton. La resultante de todas las fuerzas es un vector en la dirección del eje *Y*:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_N$$

2. **¿Una curva más cerrada necesitará un ángulo de peralte mayor o menor?**

Suponiendo la velocidad constante. Como podemos deducir, de la expresión de la velocidad máxima en la curva, despejando el radio en función del ángulo de inclinación del peralte:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{R \cdot g \cdot \frac{\text{sen}\ \alpha + \mu_e \cdot \cos\ \alpha}{\cos\ \alpha - \mu_e \cdot \text{sen}\ \alpha}} \Rightarrow R = \frac{v_{\text{máx}}^2}{g} \cdot \frac{\cos\ \alpha - \mu_e \cdot \text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha + \mu_e \cdot \cos\ \alpha}$$

Podemos plantear el problema a la inversa. ¿Cómo varía el radio con el ángulo? Haciendo la derivada:

$$\frac{dR}{d\alpha} = -\frac{v_{\text{máx}}^2}{g} \cdot \frac{1 + \mu_e^2}{\left(\text{sen}\ \alpha + \mu_e \cdot \cos\ \alpha\right)^2}$$

No encontramos que la variación del radio de curvatura respecto del peralte es siempre un número negativo. Esto significa que, considerando la velocidad constante, si el ángulo aumenta, el radio disminuye y viceversa.

Así, una curva más cerrada, radio menor, necesita un ángulo de peralte más inclinado, ángulo mayor.

3. **Calcula la velocidad máxima a la que un vehículo puede tomar una curva de $R = 100$ m si $\alpha = 15°$ y $\mu_e = 0{,}7$. Repite el cálculo para un suelo mojado ($\mu_e = 0{,}35$). Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.**

Sustituyendo en la expresión de la velocidad máxima y operando:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{100\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{\text{sen}\ 15° + 0{,}7 \cdot \cos\ 15°}{\cos\ 15° - 0{,}7 \cdot \text{sen}\ 15°}} = \mathbf{34{,}17\ m/s}$$

Repetimos el cálculo para el caso del suelo mojado:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{100\ \text{m} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{\text{sen}\ 15° + 0{,}35 \cdot \cos\ 15°}{\cos\ 15° - 0{,}35 \cdot \text{sen}\ 15°}} = \mathbf{25{,}85\ m/s}$$

REFLEXIONA

4. **¿Qué ocurre en carreteras mojadas? ¿Cómo varía la velocidad máxima «segura» en las curvas? ¿Es entonces el peralte igual de eficiente o varía la velocidad máxima con que puede tomarse la curva en condiciones de seguridad?**

En las carreteras mojadas varía el coeficiente de rozamiento (disminuye). Como hemos comprobado en la actividad anterior, en las carreteras mojadas disminuye la velocidad máxima segura para el vehículo. Para 15° se reduce la velocidad máxima al 75 % del valor en seco, suponiendo que el coeficiente de rozamiento se reduce a la mitad.

También puede verse que sin peralte, $\alpha = 0°$, el cambio de carretera seca a mojada es más acusado. Suponiendo el caso de que el coeficiente de rozamiento se reduce a la mitad, la velocidad máxima se reduce en un 70 %.

OPINA

5. **¿Qué otras maneras se te ocurren para aumentar la seguridad de los conductores en las curvas?**

Los conductores deben disminuir su velocidad antes de llegar a una curva, frenando y reduciendo la marcha. Nunca se debe frenar ya dentro de la curva, ya que se puede perder el control del vehículo, corriendo el riesgo de un deslizamiento, vuelco y posterior salida de vía.

Al salir de la curva se girará con suavidad el volante para enderezar la dirección al mismo tiempo que se aumenta progresivamente la aceleración, cambiando a marchas más largas para adquirir la velocidad normal.