8

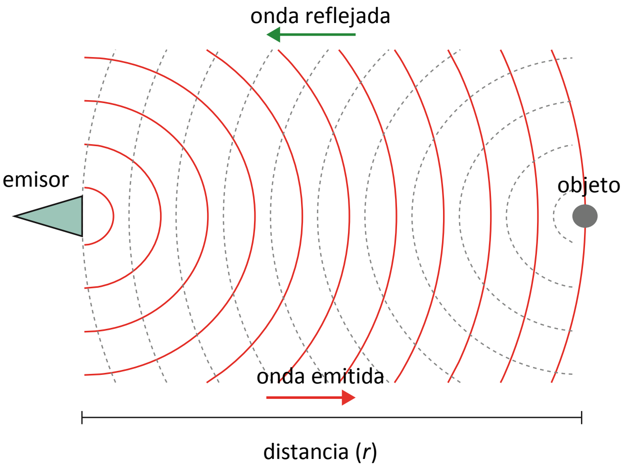
Tipos de movimientos

Tipos de movimientos 8

PARA COMENZAR (página 209)

- **¿Cómo funciona un radar? Elabora un esquema**

  Su funcionamiento se basa en la emisión de ondas electromagnéticas que se reflejan al chocar con el obstáculo (objetivo), regresando a la fuente de emisión. Estas ondas se desplazan a la velocidad de la luz
  (299 792 km/s), midiendo el tiempo que tardan en ir y volver es posible calcular la distancia al obstáculo.



- **¿Cuánto tarda en recibir una señal un radar que detecta un avión situado a 60 km de distancia?**

  Teniendo en cuenta la velocidad de la luz, hallamos el tiempo:

$$v=\frac{e}{t} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{e}{v}=\frac{60\ \cancel{\text{km}}}{299\,792\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\text{s}}}=2\cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

PRACTICA (página 210)

1. Halla el dominio y recorrido de la función $f(x)=\sqrt{x^2-9}$.

- Dominio: El radicando tiene que ser un número mayor o igual que cero:
  $x^2-9\geq 0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+3)\geq 0$, es decir, el dominio es el intervalo $(+\infty,-3]\cup[3,+\infty)$.

$$\mathbf{Dom}(f)=(+\infty,-3]\cup[3,+\infty)$$

- Recorrido: La raíz puede ser positiva o negativa. Para que sea función, a cada x le debe corresponder una única y. Escogemos por ejemplo los valores positivos de la raíz y el recorrido es el intervalo $[0,+\infty)$.

$$\mathbf{Rec}(f)=[0,+\infty)$$

2. Expresa en radianes y revoluciones los siguientes ángulos:

a) 720° **b) 270°** **c) 90°**

Convertimos los ángulos, expresados en grados, a radianes:

a) $720°\cdot\frac{2\pi\ \text{rad}}{360°}=\frac{720°\cdot 2\pi}{360°}\text{rad}=\mathbf{4\pi\ rad}$

b) $270°\cdot\frac{2\pi\ \text{rad}}{360°}=\frac{270°\cdot 2\pi}{360°}\text{rad}=\mathbf{\frac{3\pi}{2}\ rad}$

c) $90°\cdot\frac{2\pi\ \text{rad}}{360°}=\frac{90°\cdot 2\pi}{360°}\text{rad}=\mathbf{\frac{\pi}{2}\ rad}$

Convertimos los ángulos, expresados en grados, a revoluciones:

a) $720°\cdot\frac{1\ \text{rev}}{360°}=\frac{720°}{360°}\text{rev}=\mathbf{2\ rev}$

b) $270°\cdot\frac{1\ \text{rev}}{360°}=\frac{270°}{360°}\text{rev}=\mathbf{0,75\ rev}$

c) $90°\cdot\frac{1\ \text{rev}}{360°}=\frac{90°}{360°}\text{rev}=\mathbf{0,25\ rev}$

PRACTICA (página 211)

3. Una piedra se deja caer y tarda 2,5 s en llegar al suelo. Dato: *g* = 9,8 m/s.

a) ¿Qué tipo de movimiento lleva?

b) ¿Cuál es la velocidad con la que llega al suelo?

c) Calcula el espacio recorrido.

a) Lleva un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) bajo la aceleración de la gravedad.

b) Escribimos la ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 - 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2{,}5\,\text{s} = \mathbf{-24{,}5\ m/s}$$

c) Escribimos la ecuación de la posición:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

El espacio recorrido será el valor absoluto de la diferencia entre su posición final y su posición inicial:

$$|y - y_0| = \left|v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right| = \left|0 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2{,}5\,\text{s})^2\right| = \mathbf{30{,}6\ m}$$

4. Un coche de juguete da una vuelta a un circuito circular de 2 m de radio cada 20 segundos.

a) Calcula su velocidad angular.

b) ¿Qué espacio recorre durante un minuto?

a) El coche da una vuelta cada 20 s. Como 1 vuelta = 2π rad, su velocidad angular es:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{20\,\text{s}} = \mathbf{0{,}1\pi\ rad/s}$$

b) Para calcular el espacio recorrido en primer lugar calculamos el ángulo de giro en dicho tiempo:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = 0{,}1\pi\,\frac{\text{rad}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 60\,\cancel{\text{s}} = \mathbf{6\pi\ rad}$$

Sustituimos y tenemos que el espacio que recorre en un minuto es:

$$s = \Delta\theta \cdot R = 6\pi\ \text{rad} \cdot 2\ \text{m} = 12\pi\ \text{m} = \mathbf{37{,}7\ m}$$

ACTIVIDAD (página 212)

5. La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$; su velocidad $\vec{v} = 2\,\vec{i}$. Calcula la ecuación del vector posición y escribe en forma escalar la ecuación del MRU.

Escribimos el vector posición:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{i} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{r}(t) = (2 + 2t)\,\vec{i}}$$

Como el vector posición solo tiene componente en el eje *X*, podemos escribir:

$$x = x_0 + v \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x(t) = 2 + 2 \cdot t\ \text{m}}$$

ACTIVIDADES (página 213)

6. La velocidad de un barco es de 40 nudos. Sabiendo que un nudo corresponde a una velocidad de 1 milla náutica/h y que una milla náutica equivale a 1,852 km, calcula la velocidad del barco en m/s.

$$v = 40\,\text{nudos} = 40\,\frac{\cancel{\text{millas}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\,\text{s}} \cdot \frac{1{,}852\,\cancel{\text{km}}}{1\,\cancel{\text{milla}}} \cdot \frac{10^3\,\text{m}}{1\,\cancel{\text{km}}} = \mathbf{20{,}5\overset{\frown}{7}\ m/s}$$

7. La ecuación de movimiento de un ciclista durante una contrarreloj es la siguiente:

$$\boldsymbol{x(t) = 45 \cdot t}$$

(El espacio se expresa en km, y el tiempo, en horas).

a) Compara con la ecuación del MRU, ¿cuál es el valor de x_0?

b) ¿Cuál es la velocidad del ciclista? Expresa el resultado en km/h y en m/s.

c) ¿Cuánto tiempo emplea en recorrer 55 km?

a) La ecuación del MRU en forma escalar es: $x(t) = x_0 + v \cdot t$. Por tanto:

$$x_0 = \mathbf{0\ km}$$

b) La velocidad del ciclista en km/h será:

$$v = \mathbf{45\,\frac{km}{h}}$$

Pasando las unidades de la velocidad a m/s:

$$v = 45\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = \mathbf{12{,}5\,\frac{m}{s}}$$

c) Hallamos el tiempo que tarda el ciclista en recorrer 55 km:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t \quad \Rightarrow \quad x(t) = 45 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{55\ \cancel{\text{km}}}{45\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}}} = 1{,}\widehat{2}\ \text{h}$$

$$t = 1{,}\widehat{2}\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0{,}\widehat{2}\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{60\ \text{min}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 1\ \text{h} + 13{,}\widehat{3}\ \text{min} = 1\ \text{h} + 13\ \text{min} + 0{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}} = \mathbf{1\ h + 13\ min + 20\ s}$$

ACTIVIDADES (página 215)

8. La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$ m; su velocidad inicial, $\vec{v}_0 = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m/s; y la aceleración, $\vec{a} = 0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$ m/s^2.

a) Calcula la velocidad y la posición en los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s.

b) Representa en un diagrama cartesiano las tres posiciones y en cada posición su vector velocidad.

c) ¿Corresponde con un movimiento con aceleración uniforme? ¿Es rectilíneo?

a) Escribimos los vectores posición y velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = 2\,\vec{i} + (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}) \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}) + (0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}) \cdot t$$

Agrupamos:

$$\vec{r}(t) = (2 + 3 \cdot t + 0{,}15 \cdot t^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot t + 0{,}4 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (3 + 0{,}3 \cdot t)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot t)\,\vec{j}$$

Calculamos la posición para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{r}_1\,(t = 1\ \text{s}) = (2 + 3 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 1^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 1^2)\,\vec{j} = \mathbf{5{,}15\,\vec{i} - 3{,}6\,\vec{j}\ m}$$

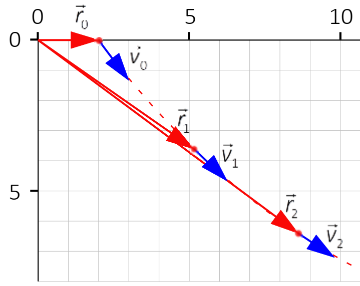
$$\vec{r}_2\,(t = 2\ \text{s}) = (2 + 3 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2)\,\vec{i} + (-4 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 2^2)\,\vec{j} = \mathbf{8{,}6\,\vec{i} - 6{,}4\,\vec{j}\ m}$$

Análogamente, calculamos la velocidad para los instantes $t_1 = 1$ s; y, $t_2 = 2$ s:

$$\vec{v}_1(t = 1\ \text{s}) = (3 + 0{,}3 \cdot 1)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot 1)\,\vec{j} = \mathbf{3{,}3\,\vec{i} - 3{,}2\,\vec{j}\ m/s}$$

$$\vec{v}_2(t = 2\ \text{s}) = (3 + 0{,}3 \cdot 2)\,\vec{i} + (-4 + 0{,}8 \cdot 2)\,\vec{j} = \mathbf{3{,}6\,\vec{i} - 2{,}4\,\vec{j}\ m/s}$$

b)



c) No es rectilíneo, ya que su trayectoria no es una línea recta. Es uniformemente acelerado, ya que $\vec{a}$ = cte., no depende del tiempo.

9. **La posición inicial de un móvil es $\vec{r}_0 = 2\ \vec{i}$ m; su velocidad inicial, $\vec{v}_0 = 2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$ m/s; y aceleración, $\vec{a} = 0{,}4\vec{i} + 0{,}3\vec{j}$ m/s^2.**

a) Calcula la velocidad y la posición en los instantes t_1 = 1 s; y, t_2 = 2 s.

b) Representa en un diagrama cartesiano las tres posiciones y en cada posición su vector velocidad.

c) ¿Corresponde con un movimiento con aceleración uniforme? ¿Es rectilíneo?

a) Escribimos los vectores posición y velocidad:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) = 2\vec{i} + (2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (0{,}4\vec{i} + 0{,}3\vec{j}) \cdot t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = (2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}) + (0{,}4\vec{i} + 0{,}3\vec{j}) \cdot t$$

Agrupamos:

$$\vec{r}(t) = (2 + 2 \cdot t + 0{,}2 \cdot t^2)\vec{i} + (1{,}5 \cdot t + 0{,}15 \cdot t^2)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (2 + 0{,}4 \cdot t)\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot t)\vec{j}$$

Calculamos la posición para los instantes t_1 = 1 s; y, t_2 = 2 s:

$$\vec{r}_1(t = 1\text{ s}) = (2 + 2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 1^2)\vec{i} + (1{,}5 \cdot 1 + 0{,}15 \cdot 1^2)\vec{j} = \mathbf{4{,}2\vec{i} + 1{,}65\vec{j}\ m}$$

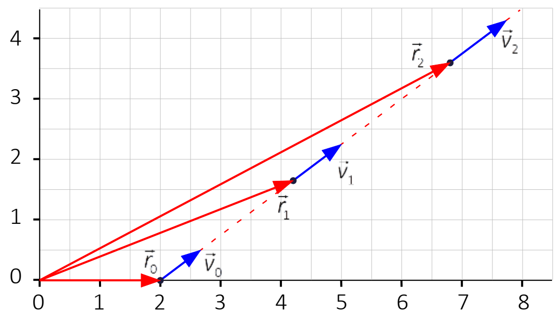
$$\vec{r}_2(t = 2\text{ s}) = (2 + 2 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2^2)\vec{i} + (1{,}5 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 2^2)\vec{j} = \mathbf{6{,}8\vec{i} + 3{,}6\vec{j}\ m}$$

Análogamente, calculamos la velocidad para los instantes t_1 = 1 s; y, t_2 = 2 s:

$$\vec{v}_1(t = 1\text{ s}) = (2 + 0{,}4 \cdot 1)\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot 1)\vec{j} = \mathbf{2{,}4\vec{i} + 1{,}8\vec{j}\ m/s}$$

$$\vec{v}_2(t = 2\text{ s}) = (2 + 0{,}4 \cdot 2)\vec{i} + (1{,}5 + 0{,}3 \cdot 2)\vec{j} = \mathbf{2{,}8\vec{i} + 2{,}1\vec{j}\ m/s}$$

b)



c) Es rectilíneo, ya que su trayectoria es una línea recta. Es uniformemente acelerado, ya que $\vec{a}$ = cte., no depende del tiempo.

ACTIVIDADES (página 216)

10. Una conductora circula a una velocidad de 90 km/h observa un obstáculo en la calzada. Justo en ese momento pisa el freno, lo que proporciona al vehículo una deceleración constante de 1,5 m/s². Calcula la distancia desde su vehículo hasta el obstáculo si se detiene justo ante él al cabo de 10 s.

Es un movimiento rectilíneo uniformemente desacelerado. Expresamos la velocidad inicial en m/s:

$$v_0 = 90\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\,\text{m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\,\text{s}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aplicando la ecuación de la posición del MRUA:

$$x = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0 + 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (10\ \text{s})^2 = \mathbf{175\ m}$$

11. Un móvil se desliza sobre una superficie horizontal a una velocidad de 5 m/s. Sobre este móvil actúa una fuerza de rozamiento, que lo frena con una aceleración de 0,5 m/s². Calcula la velocidad después de recorrer 8 m y el espacio que recorre hasta pararse.

Es un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado. La velocidad después de recorrer 8 m se puede calcular con la ecuación:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta x} = \sqrt{\left(5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8\ \text{m}} = \mathbf{4{,}12\,\frac{m}{s}}$$

Como cuando se pare $v = 0$, hallamos el tiempo que tarda en pararse con la ecuación:

$$v = v_o + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_o}{a} = \frac{0 - 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10\ \text{s}$$

El espacio recorrido hasta pararse es:

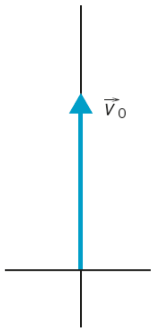
$$x = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 0 + 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (10\ \text{s})^2 = \mathbf{25\ m}$$

ACTIVIDADES (página 219)

12. Al hacer un tiro en suspensión un jugador de baloncesto lanza un balón desde el aire:

a) ¿Qué debe hacer un jugador de baloncesto para estar el máximo tiempo posible en el aire?

b) Si un jugador puede estar 0,6 s en el aire y sube unos 44 cm, ¿cuál es su velocidad de salto?



a) Se trata de un lanzamiento vertical. El tiempo que está en el aire depende solo de la velocidad vertical en el momento del salto, y es independiente de la velocidad horizontal (velocidad a la que corre). Lo que debe hacer es **impulsarse lo máximo posible hacia arriba**.

b) La ecuación del movimiento del jugador es:

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Haciendo $y = 0$ y sustituyendo t por 0,6 s (tiempo que tarda en subir y bajar) se calcula v_0:

$$0 = 0 + v_0 \cdot t \cdot - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t\right) \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t = 0$$

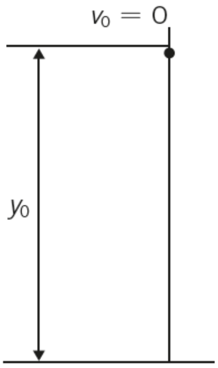
$$v_0 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}6\ \text{s} = \mathbf{2{,}94\ m/s}$$

13. **Se deja caer una pelota desde la azotea de un edificio de 44 m de altura:**

a) Calcula el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.

b) ¿Con qué velocidad (expresada en km/h) llega al suelo la pelota del apartado anterior?

a) Se trata de un movimiento de caída libre desde el reposo. La ecuación del movimiento tomando el origen de coordenadas en la superficie de la Tierra es:



$$y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Cuando la pelota llega al suelo $y = 0$:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 44\ \cancel{\text{m}}}{9{,}8\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^2}} = \mathbf{3\ s}$$

b) La velocidad con la que llega al suelo será:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 3\ \text{s} = -29{,}4\ \text{m/s}$$

Expresamos la velocidad en km/h:

$$v_0 = -29{,}4 \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\ \text{km}}{1000\ \cancel{\text{m}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \text{h}} = \mathbf{-106\ \frac{km}{h}}$$

ACTIVIDADES (página 222)

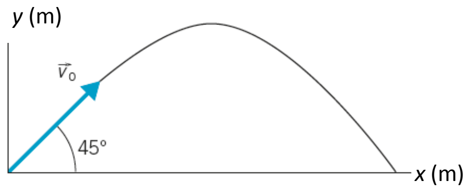
14. **Un futbolista chuta hacia la portería con una velocidad inicial de 17 m/s y un ángulo de tiro con la horizontal de 45°. Calcula:**

a) El alcance máximo.

b) El tiempo de vuelo.

a) Alcance:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 2\alpha}{g} = \frac{(17\ \text{m/s})^2 \cdot \text{sen}\ 90°}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{29{,}5\ m}$$



a) Tiempo de vuelo:

$$t_{\text{vuelo}} = \frac{2 v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 17\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ 45°}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{2{,}45\ s}$$

15. **Contesta:**

a) ¿Con qué velocidad hay que lanzar un balón de fútbol para que, si lo golpeamos con un ángulo de 45° respecto a la horizontal, llegue al otro extremo de un campo de 100 m de largo?

b) Cuando el balón va por el aire, ¿a qué distancia horizontal del punto de lanzamiento estaría el balón a 1,80 m por encima del suelo?

a) A partir de la ecuación del alcance con $\alpha = 45°$:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\ 90°}{g} = \frac{v_0^2}{g} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = g \cdot x_{\text{máx}} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{g \cdot x_{\text{máx}}}$$

$$v_0 = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 100\ \text{m}} = \mathbf{31{,}30\ m/s}$$

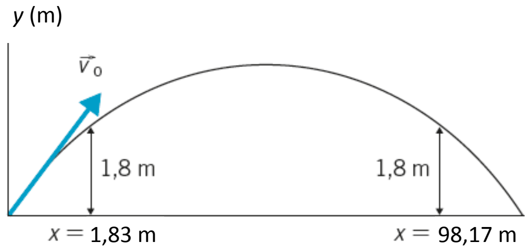
b) Hay dos puntos a 1,80 m del suelo. Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot \cos\ \alpha \cdot t$$

$$y = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Sustituimos en la segunda ecuación y por 1,80 m y v_0 por 31,30 m/s:

$$1{,}80\ \text{m} = 31{,}30\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\,45° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$



Es una ecuación de segundo grado con la incógnita en t, resulta:

$$t_1 = 0{,}083\ \text{s y } t_2 = 4{,}43\ \text{s}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación del movimiento del eje X:

$$x_1 = 31{,}30\ \text{m/s} \cdot \cos 45° \cdot 0{,}083 = \mathbf{1{,}83\ m}$$

$$x_2 = 31{,}30\ \text{m/s} \cdot \cos 45° \cdot 4{,}43 = \mathbf{98{,}17\ m}$$

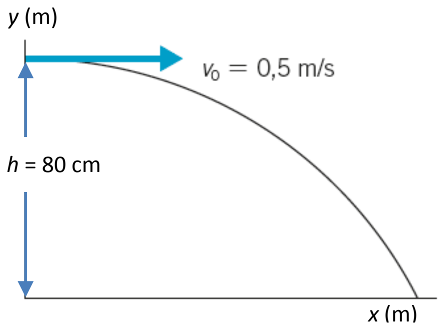
La suma de x_1 y x_2 es 100 m, como debe ser. Ambos puntos se encuentran a 1,83 m del origen y del final de la trayectoria.

ACTIVIDADES (página 223)

16. Una bola que rueda sobre una mesa con una velocidad de 0,5 m/s al llegar al borde cae al suelo. Si la altura de la mesa es de 80 cm, calcula:

a) El tiempo que tarda en caer.

b) La distancia horizontal recorrida desde la vertical de la mesa hasta el punto en el que la bola choca con el suelo.



a) Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot t$$

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

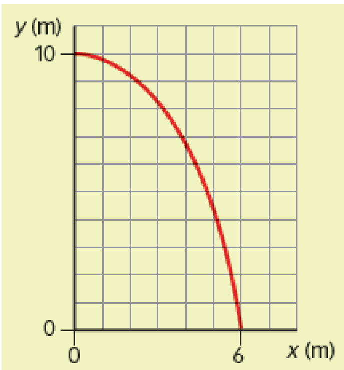
Haciendo $y = 0$ m despejamos t y calculamos el tiempo que tarda en caer:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}80\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{0{,}40\ s}$$

b) La distancia recorrida es:

$$x = v_0 \cdot t = 0{,}5\ \text{m/s} \cdot 0{,}40\ \text{s} = \mathbf{0{,}20\ m}$$

17. Se lanza horizontalmente una pelota desde un balcón a 10 m de altura sobre el suelo y cae a 6 metros de la vertical de la terraza.



a) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

b) ¿Con qué velocidad se lanzó?

a) Las ecuaciones del movimiento del balón son:

$$x = v_0 \cdot t$$

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \text{(origen en el suelo)}$$

De la segunda, al sustituir y por 0 m se obtiene el tiempo que tarda en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{1{,}43\ s}$$

b) De la primera despejamos v_0 y sustituimos los valores conocidos:

$$x = v_0 \cdot t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{x}{t} = \frac{6\ \text{m}}{1{,}43\ \text{s}} = \mathbf{4{,}2\ m/s}$$

ACTIVIDADES (página 224)

18. Queremos clavar un dardo en una diana cuyo centro está por encima de nuestra mano al lanzar.

a) ¿Debemos apuntar directamente al blanco?

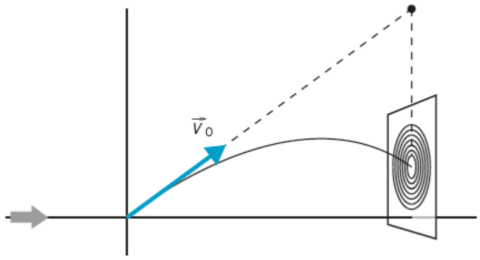
b) ¿Más arriba? ¿Más abajo? ¿Por qué?

a) **No**, porque el dardo, según recorre distancias horizontales, también está afectado en vertical por la gravedad. Mientras se desplaza en el eje horizontal, estará cayendo en el eje vertical.

b) Hay que apuntar **más arriba**, de forma que impacte en un punto inferior al que se apunta. Todo ello se puede comprobar a partir de las ecuaciones del movimiento y la figura.

$$x = v_{0x} \cdot t$$

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



19. Tiran una pelota desde un balcón a 10 m de altura con velocidad inicial de 18 km/h y ángulo de 15° por debajo de la horizontal. ¿Cuándo y dónde llega al suelo? ¿Y si se lanza con ángulo de 15° por encima de la horizontal?

$$v = 18 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

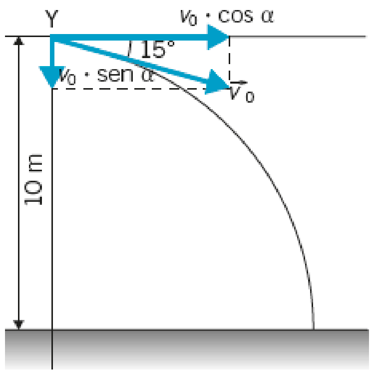
Ecuación del movimiento de la pelota según el eje *Y*:

$$y = h - v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Al sustituir *y* por 0 m se consigue una ecuación de segundo grado con la incógnita en la variable tiempo:

$$0 = 10\ \text{m} - 5\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ 15° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

$$4{,}9\ t^2 + 1{,}29\ t - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \mathbf{1{,}3\ s}$$



Ecuación del movimiento de la pelota según el eje *X*:

$$x = v_0 \cdot \cos\ \alpha \cdot t = 5\ \text{m/s} \cdot \cos\ 15° \cdot 1{,}3\ \text{s} = \mathbf{6{,}3\ m}$$

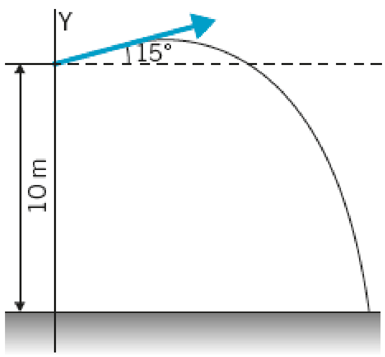
Si se lanza con ángulo de 15° por encima de la horizontal, la ecuación de movimiento según el eje *Y* es ahora:

$$y = h + v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Al sustituir *y* por 0 m se obtiene el tiempo en llegar al suelo:

$$0 = 10\ \text{m} + 5\ \text{m/s} \cdot \text{sen}\ 15° \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

$$4{,}9\ t^2 - 1{,}29\ t - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \mathbf{1{,}6\ s}$$



Y al sustituir en la ecuación del movimiento de la pelota según el eje *X*:

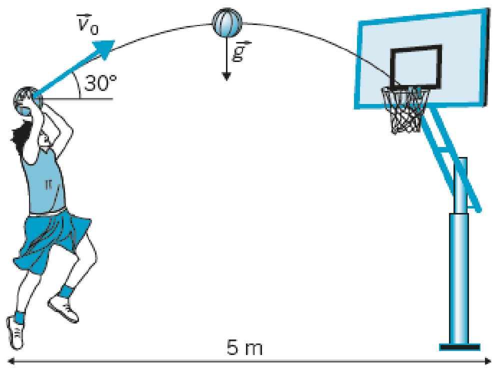
$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 5\ \text{m/s} \cdot \cos 15° \cdot 1{,}6\,\text{s} = \mathbf{7{,}6\,m}$$

20. Si un jugador de baloncesto lanza un tiro libre con un ángulo de 30° respecto a la horizontal desde una altura de 2,20 m sobre el suelo, ¿con qué velocidad ha de lanzar la pelota sabiendo que la distancia horizontal del punto de tiro al aro es de 5 m y que este está a 3,05 m de altura?

Las ecuaciones del movimiento de la pelota son:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$y = h + v_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



Se despeja t de la primera:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

Y al sustituir t en la segunda se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = h + \cancel{v_0} \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 = h + x \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Se despeja v_0, y se sustituye: y por 3,05 m, h por 2,2 m, x por 5 m, y α por 30°.

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot \cos^2\alpha \cdot (h + x \cdot \operatorname{tg}\alpha - y)}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot (5 \text{ m})^2}{2 \cdot \cos^2 30° \cdot (2{,}2 \text{ m} + 5 \text{ m} \cdot \operatorname{tg} 30° - 3{,}05 \text{ m})}} = \mathbf{8{,}96\ \frac{m}{s}}$$

ACTIVIDADES (página 226)

21. Un disco de 40 cm de radio gira a 33 rpm. Calcula:

a) La velocidad angular en rad/s.

b) La velocidad angular en rad/s en un punto situado a 20 cm del centro.

a) $\omega = 33 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} = 1{,}1\pi \text{ rad/s} = \mathbf{3{,}46\ rad/s}$

b) Es la misma, ya que no varía con el radio. Es la velocidad lineal la que varía con el radio: $v = \omega \cdot R$.

Por tanto: $\omega = \mathbf{3{,}46\ rad/s}$.

22. Calcula la velocidad lineal del borde de una rueda de 75 cm de diámetro si gira a 1000 rpm.

$$\omega = 1000 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} = 33{,}\widehat{3}\pi \text{ rad/s}$$

Calculamos la velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{D}{2} = 33{,}\widehat{3}\pi \text{ rad/s} \cdot \frac{0{,}75 \text{ m}}{2} = \mathbf{39{,}27\ \frac{m}{s}}$$

ACTIVIDADES (página 227)

23. Determina si las siguientes frases son verdaderas o falsas:

a) La aceleración angular se mide en rad/s.

b) La aceleración tangencial de un punto de la circunferencia se puede medir con el ángulo recorrido por unidad de tiempo.

c) Todos los radios de una rueda de bicicleta tienen la misma aceleración angular.

a) **Falso**. Son las unidades de la velocidad, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; θ en rad y t en s.

b) **Falsa**. Se mide en m/s.

c) **Verdadera**. Todos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo.

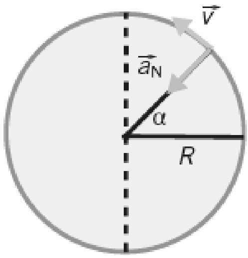
24. En el siguiente esquema reconoce:

a) La aceleración normal.

b) La velocidad lineal.

c) El ángulo recorrido y el radio

Respuesta gráfica:



ACTIVIDAD (página 228)

25. Dos niños van montados en dos caballitos que giran solidarios con la plataforma de un tiovivo con $\omega = 4$ rpm. Si la distancia de los caballos al eje de giro es de 2 y 3 m, calcula:

a) La velocidad angular en rad/s.

b) El número de vueltas que dan los niños en cinco minutos.

c) El espacio recorrido por cada uno de ellos en ese tiempo.

d) ¿Qué niño se mueve con mayor aceleración total?

a) $\omega = 4\dfrac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\dfrac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}}\cdot\dfrac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} = 0{,}1\widehat{3}\pi\ \text{rad/s} = \mathbf{0{,}42\ rad/s}$

b) Si dan 4 vueltas en 1 minuto, en 5 minutos darían **20 vueltas**.

c) Hallamos el espacio recorrido:

$$s_1 = \theta\cdot R_1 = 2\pi\cdot 2\ \text{m} = \mathbf{251\ m}$$
$$s_2 = \theta\cdot R_2 = 2\pi\cdot 3\ \text{m} = \mathbf{377\ m}$$

d) Ambos tienen solo aceleración normal: $a_N = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2\cdot R$. Como ambos tienen la misma velocidad angular, tendrá mayor aceleración el que se encuentra más lejos, o sea, el caballo situado a 3 m del eje de giro.

ACTIVIDADES (página 230)

26. Una rueda que gira a 300 rpm es frenada y se detiene completamente a los 10 s. Calcula:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad angular a los 3 s después de comenzar el frenado.

c) El número de vueltas que da hasta que frena.

$$\omega_0 = 300\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}}\cdot\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$

a) $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{(0-10\pi)\ \text{rad/s}}{10\ \text{s}} = -\boldsymbol{\pi}\dfrac{\textbf{rad}}{\textbf{s}^2}$

b) $\omega = \omega_0 + \alpha\cdot t = 10\pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}} - \pi\dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2}\cdot 3\ \text{s} = \mathbf{7}\boldsymbol{\pi}\dfrac{\textbf{rad}}{\textbf{s}^2}$

c) Cuando se detiene: $\omega = 0$. Sustituimos en la ecuación de la velocidad angular y despejamos el tiempo:

$$0 = \omega_0 + \alpha\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-10\pi\ \text{rad/s}}{-\pi\ \text{rad/s}^2} = 10\ \text{s}$$

Sustituimos en la ecuación de la posición angular y calculamos el ángulo recorrido. Pasamos los radianes a vueltas:

$$\Delta\theta = \omega_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 = -10\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdot 10\ \text{s} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\cdot(10\ \text{s})^2 = 50\pi\ \cancel{\text{rad}}\cdot\frac{1\ \text{vuelta}}{2\pi\ \cancel{\text{rad}}} = \mathbf{25\ vueltas}$$

27. Se deja caer una rueda de 30 cm de radio por un plano inclinado, de forma que su velocidad angular aumenta a un ritmo constante. Si la rueda parte del reposo y llega al final del plano al cabo de 5 s con una velocidad angular de π rad/s, calcula:

a) La aceleración angular.

b) La velocidad angular a los 3 s.

c) La aceleración tangencial y normal al final del plano.

a) Es un movimiento circular uniformemente acelerado:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\pi \text{ rad/s}}{5 \text{ s}} = \mathbf{0{,}2\pi \text{ rad/s}^2}$$

b) $\omega = \alpha \cdot t = 0{,}2\pi \dfrac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ s} = \mathbf{0{,}6\pi \dfrac{rad}{s^2}}$

c) Para calcular la aceleración normal hallamos la velocidad angular a los 5 s:

$$\omega = \alpha \cdot t = 0{,}2\pi \text{ rad/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = \pi \text{ rad/s}$$

La aceleración normal será:

$$a_N = \omega^2 \cdot R = (\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}3 \text{ m} = \mathbf{2{,}96 \text{ m/s}^2}$$

La aceleración tangencial será:

$$a_T = \alpha \cdot R = 0{,}2\pi \text{ rad/s}^2 \cdot 0{,}3 \text{ m} = \mathbf{0{,}19 \text{ m/s}^2}$$

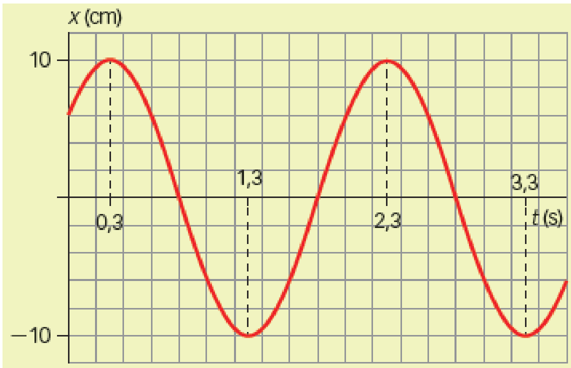
ACTIVIDAD (página 231)

28. Además de los ejemplos que pueden verse en las ilustraciones de movimientos periódicos añade algunos ejemplos más. Explica cuáles de ellos son también un movimiento armónico y simple.

- Un electrocardiograma es periódico, pero no MAS.
- Un niño en un columpio si el ángulo tiende a cero es MAS.
- Volantes giratorios de la maquinaria de un reloj.

ACTIVIDADES (página 234)

29. Escribe la ecuación del movimiento del muelle de la figura cuya gráfica posición-tiempo es la que se indica:



La ecuación del movimiento del muelle se corresponde con la expresión:

$$\underbrace{x}_{\text{Elongación}} = \underbrace{A}_{\text{Amplitud}} \cdot \text{sen}\,(\overbrace{\underbrace{\omega}_{\text{Frecuencia angular}} \cdot t + \underbrace{\phi_0}_{\text{Fase inicial}}}^{\text{Fase}})$$

Identificamos términos a partir de la gráfica:

- Amplitud: $A = 10$ cm $= 0{,}1$ m.
- Frecuencia angular: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$. El periodo es el tiempo entre dos máximos sucesivos:

$$T = 2{,}3 \text{ s} - 0{,}3 \text{ s} = 2 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{2 \text{ s}} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

- Fase inicial: ϕ_0. Para $t_0 = 0$, $x_0 = 6$ cm $= 0{,}06$ m $\Rightarrow$ $6 = 10 \cdot \text{sen}\,\phi_0$ $\Rightarrow$ $\phi_0 = \text{arcsen}\,0{,}6 = \dfrac{\pi}{5}$ rad.

Por tanto:

$$\mathbf{x = 0{,}1 \cdot sen\left(\pi \cdot t + \frac{\pi}{5}\right)}$$

30. Se estira un muelle hasta que su longitud aumenta 5 cm. A continuación se suelta y se le deja oscilar libremente, de forma que completa 30 oscilaciones en 5 segundos. Determina:

a) La ecuación de su movimiento suponiendo que empezamos a estudiarlo cuando se encuentra en la posición más estirada.

b) La posición en la que se encuentra el muelle a los 10 s de iniciado el movimiento.

c) El tiempo que tarda el muelle en alcanzar la posición de equilibrio desde que está en la posición de máximo estiramiento.

a) Dado que en el enunciado se menciona que la posición inicial de estudio ($t = 0$) coincide con un máximo:

$$t = 0,\ x = A \quad \Rightarrow \quad x = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La amplitud del muelle coincide con su elongación máxima: $A = 5\text{ cm} = 0{,}05\text{ m}$.

La frecuencia angular: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot \dfrac{30\text{ ciclos}}{5\text{ s}} = 12\pi\text{ rad/s}$.

Sustituyendo:

$$\boldsymbol{x = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(12\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

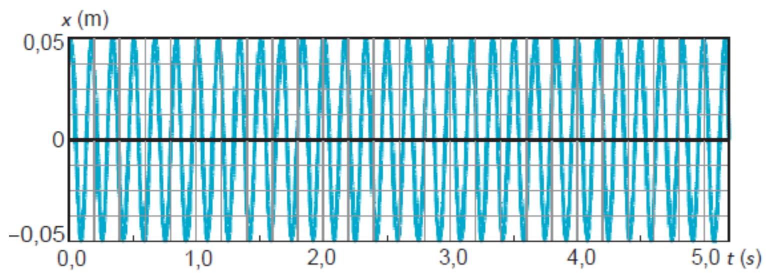
b) A los 10 s de inicio del movimiento:

$$x(t = 10\text{ s}) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(12\pi \cdot 10 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}05\text{ m} = \mathbf{5\ cm}$$

c) En la posición de equilibrio $x = 0$:

$$0 = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(12\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{arcsen } 0 = 12\pi \cdot t + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t = \mathbf{0{,}042\ s}$$

31. Representa la gráfica posición-tiempo de un muelle cuyo movimiento se describe en la actividad anterior.



ACTIVIDAD (página 246)

32. Un MAS está caracterizado por una amplitud de 30 cm y una velocidad máxima de 9π m/s con fase inicial nula. Determina su velocidad cuando $t = 5{,}25$ s.

$$A = 30\text{ cm} = 0{,}3\text{ m}$$
$$v_{\text{máx}} = 9\pi\text{ m/s}$$

A partir de la velocidad máxima calculamos la frecuencia angular:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_{\text{máx}}}{A} = \frac{9\pi\text{ m/s}}{0{,}3\text{ m}} = 30\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Sustituimos en la ecuación de la velocidad del MAS, $v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0)$:

$$v = 0{,}3 \cdot 30\pi \cdot \cos(30\pi \cdot t + 0) = 9\pi \cdot \cos(30\pi \cdot t)$$

Para $t = 5{,}25$ s: $v(t = 5{,}25\text{ s}) = 9\pi \cdot \cos(30\pi \cdot 5{,}25) = \mathbf{0\ m/s}$.

33. ¿Cuál será la velocidad del móvil del ejemplo 18 cuando se encuentra a 2 cm del punto más bajo?

$$x = -4 \text{ cm} = -0{,}04 \text{ m}$$

$$A = 6 \text{ cm} = 0{,}06 \text{ m}$$

$$v = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2} = \pm\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{(0{,}06)^2 - (0{,}04)^2} = \pm 0{,}07\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{\pm 7\,\frac{cm}{s}}$$

ACTIVIDADES (página 237)

34. En el extremo de un muelle colocamos un cuerpo, lo estiramos una longitud de 4 cm y lo dejamos oscilar libremente. Escribe la función que permite conocer su elongación, velocidad y aceleración en función del tiempo si vibra con una frecuencia de 2 Hz. Representa gráficamente dichas funciones tomando valores del tiempo que permitan conocer lo que sucede en dos oscilaciones completas.

Como la posición inicial considerada se corresponde con su elongación máxima, utilizaremos la ecuación cosenoidal del MAS.

- **Elongación:**

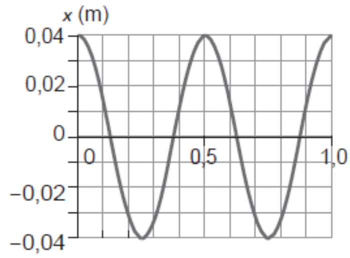
  La elongación máxima es precisamente $A = 4$ cm.

  Calculamos la frecuencia angular:

  $$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 2 \text{ Hz} = 4\pi \text{ rad/s}$$

  La ecuación de la elongación será:

  $$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) \Rightarrow \boldsymbol{x = 4 \cdot \textbf{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \textbf{ cm}}$$

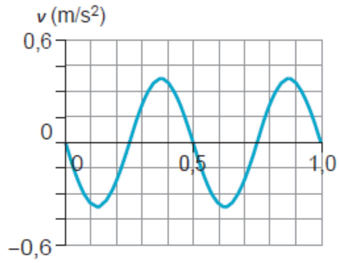


- **Velocidad:**

  La velocidad se obtiene derivando la expresión de la elongación con respecto al tiempo:

  $$v = \frac{dx}{dt} = 4\pi \cdot 4 \cdot \cos\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

  $$\boldsymbol{v = 16\pi \cdot \textbf{cos}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \textbf{ cm/s}}$$

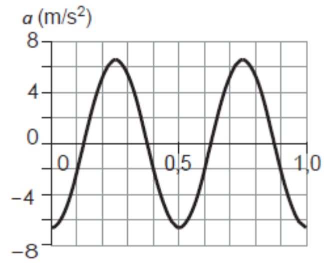


- **Aceleración:**

  La aceleración se obtiene derivando la expresión de la velocidad con respecto al tiempo:

  $$a = \frac{dv}{dt} = -4\pi \cdot 16\pi \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

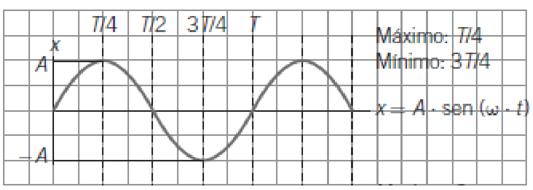
  $$\boldsymbol{a = 64\pi^2 \cdot \textbf{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \textbf{ cm/s}^2}$$



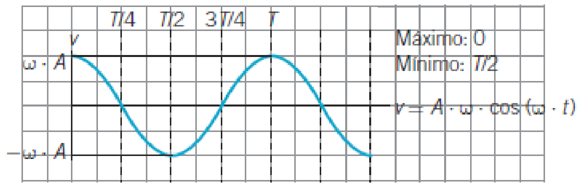
35. Haz la representación gráfica de las funciones $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ para un muelle que oscila apoyado en una superficie horizontal sin rozamiento. De forma similar a la figura 8.39, indica en qué posición las magnitudes x, v y a alcanzan sus valores máximos y mínimos.

Respuesta gráfica:

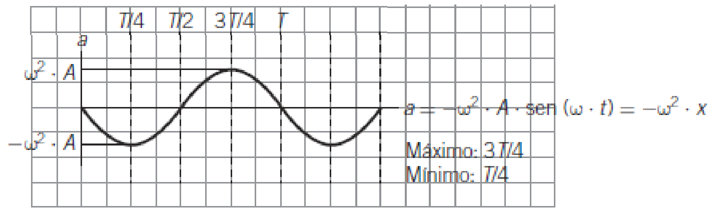
La posición.



La velocidad.



La aceleración.



ACTIVIDADES FINALES (página 241)

Movimiento uniforme

36. Escribe la ecuación de movimiento de un móvil que parte del punto $\vec{r}_1 = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ km y, tras 2 horas moviéndose en línea recta, llega al punto $\vec{r}_2 = 6\,\vec{i} + 9\,\vec{j}$ km.

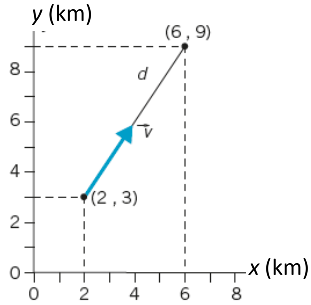
a) ¿Cuál es el vector velocidad del móvil?

b) ¿Cuál es el módulo de la velocidad? Expresa el resultado en km/h.

a) El vector velocidad del móvil es:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t} = \frac{\left[(6\,\vec{i} + 9\,\vec{j}) - (2\,\vec{i} + 3\,\vec{j})\right]\text{km}}{2\,\text{h}}$$

$$\vec{v} = \frac{4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}}{2}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \mathbf{2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\ \textbf{km/h}}$$



b) Calculamos el módulo del vector velocidad:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3{,}6\ \textbf{km/h}}$$

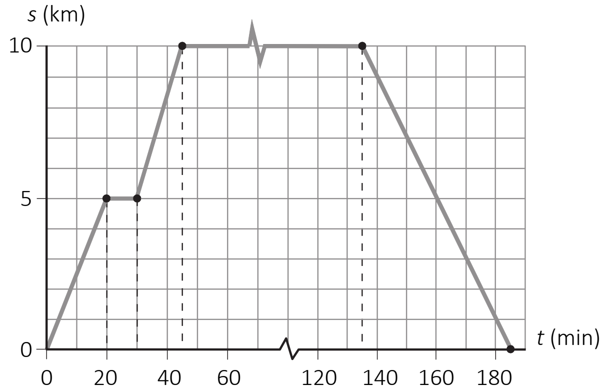
37. Óscar va a visitar a su amigo en bicicleta desde su pueblo hasta un pueblo próximo que se encuentra a 10 km.

- **Parte de su casa a las 8 h 15 min de la mañana con una velocidad de 18 km/h.**
- **A los 20 minutos de la salida hace un descanso de 10 minutos y después continúa pedaleando, pero ahora, más deprisa, con una velocidad de 20 km/h, hasta que llega a casa de su amigo.**
- **Una vez allí se queda hasta las 10 h 30 min, momento en el que emprende la vuelta a su casa con una velocidad constante de 12 km/h.**

a) Representa el movimiento de ida y vuelta de Óscar en una gráfica *s*-*t*.

b) ¿Qué tipo de movimiento ha llevado?

a) Figura de la derecha.



b) A: En los primeros 20 minutos a $v_A = 15$ km/h recorre:

$$d_A = v_A \cdot t_A = 15\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1}{3}\,\cancel{\text{h}} = 5\ \text{km}$$

B: Luego está parado 10 min.

C: Reanuda la marcha a 20 km/h hasta recorrer los restantes $d_C = 5$ km. Tarda:

$$\Delta t_C = \frac{d_C}{v_C} = \frac{5\ \cancel{km}}{20\ \cancel{km}/h} = \frac{1}{4}\ h = 15\ min$$

D: Parado desde las 9:00 (8:15 + 0:20 + 0:10 + 0:15 = 9:00) hasta las 10:30; 90 minutos en total.

E: Recorre los 10 km de vuelta a $v_E = 12$ km/h en un tiempo:

$$\Delta t_E = \frac{d_E}{v_E} = \frac{10\ \cancel{km}}{12\ \cancel{km}/h} = \frac{5}{6}\ h = 50\ min$$

38. Un coche A parte del punto kilométrico cero de una carretera a las 10:40 h con una velocidad constante de 80 km/h. Media hora más tarde otro coche B parte a su encuentro desde el mismo punto con una velocidad de 100 km/h.

a) Calcula el punto kilométrico de la carretera en que están situados ambos vehículos y el tiempo que transcurre hasta encontrarse.

b) ¿Qué velocidad debería llevar el coche B para que se encuentren en el punto kilométrico 180?

$$v_A = 80\ km/h; \quad v_B = 100\ km/h$$

a) Cuando los coches se encuentran, la posición de ambos es la misma:

$$x_A = v_A \cdot t \quad \Rightarrow \quad x_A = 80 \cdot t$$
$$x_B = v_B \cdot (t - 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad x_B = 100 \cdot t - 50$$
$$x_A = x_B \quad \Rightarrow \quad 80 \cdot t = 100 \cdot t - 50$$
$$t = \mathbf{2{,}5\ h}$$

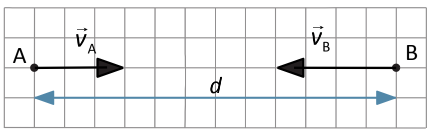
Sustituimos el tiempo en cualquiera de las ecuaciones de posición y calculamos el punto kilométrico en el que se encuentran:

$$x_A = x_B = 80 \frac{km}{\cancel{h}} \cdot 2{,}5\ \cancel{h} = \mathbf{200\ km}$$

b) Calculamos el tiempo que tarda el coche A en llegar al kilómetro 180 y lo sustituimos en la ecuación de la posición de B despejando la velocidad:

$$x_B = v_B \cdot (t - 0{,}5)$$
$$x_A = v_A \cdot t = 80 \cdot t$$
$$t = \frac{x_A}{v_A} = \frac{180\ \cancel{km}}{80\ \cancel{km}/h} = 2{,}25\ h \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{x_B}{t - 0{,}5} = \frac{180\ km}{1{,}75\ h} = \mathbf{102{,}8\ km/h}$$

39. Un tren parte de una ciudad A en dirección a otra B con una velocidad constante de 90 km/h. Una hora más tarde otro tren parte desde B hacia A con velocidad de 120 km/h. Calcula la distancia entre las dos ciudades si los trenes se cruzan a una distancia de 250 km de la ciudad A.



Considerando el origen del sistema de referencias para los dos trenes la ciudad A, y el sentido positivo desde A hacia B, negativo el opuesto, las ecuaciones de movimiento para ambos trenes son:

$$\begin{cases} x_A = v_A \cdot t_A \\ x_B = d - v_B \cdot t_B \end{cases}$$

Para expresar la diferencia de tiempo: $t_B = t_A - 1$. Por eso:

$$\begin{cases} x_A = 90 \cdot t_A \\ x_B = d - 120 \cdot (t_A - 1) \end{cases}$$

Cuando los dos trenes se cruzan están en la misma posición, $x_A = x_B = 250$ km, y en el mismo instante, $t_A = t$.

$$\begin{cases} 250 = 90 \cdot t \\ 250 = d - 120 \cdot (t - 1) \end{cases}$$

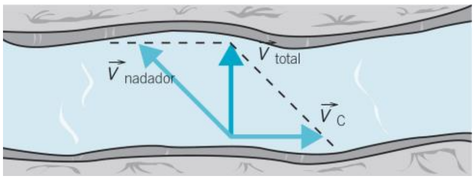
Resolviendo el sistema de ecuaciones nos queda que:

$$t = 2,\widehat{7}\text{ h}; \quad d = \mathbf{463,\widehat{3}\ km}$$

Solo queremos la distancia entre las dos ciudades.

40. Si queremos cruzar transversalmente un río a nado, ¿qué debemos hacer?

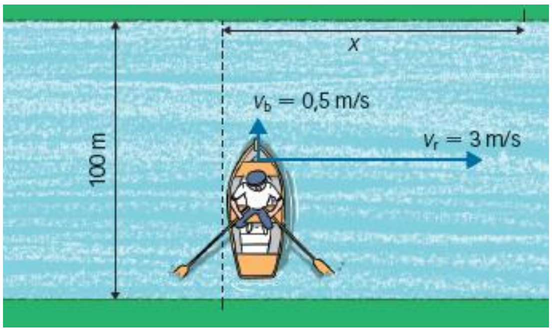
Nadar en una dirección de forma que la suma de la velocidad de la corriente y la del nadador sea perpendicular a la corriente.



41. Un pescador quiere atravesar un río de 100 m de ancho para lo cual dispone de una lancha, con la que rema a 0,5 m/s.

a) Si la velocidad de la corriente es de 3 m/s, ¿a qué distancia aguas abajo del punto de partida se encuentra el pescador cuando consigue atravesar el río?

b) ¿Influiría la velocidad de la corriente en el tiempo que se tarda en atravesar el río?



a) El tiempo que tardará en atravesar el río será:

$$d = v_{\text{barca}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_{\text{barca}}} = \frac{100\ \cancel{\text{m}}}{0,5\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = 200\text{ s}$$

La distancias aguas abajo que se habrá desviado la barca será:

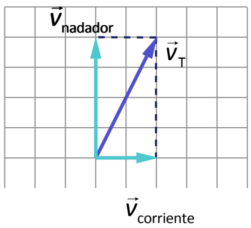
$$x = v_{\text{corriente}} \cdot t = 3\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 200\ \cancel{\text{s}} = \mathbf{600\ m}$$

b) No, la velocidad de la corriente influye en la distancia recorrida aguas abajo, no en el tiempo.

42. Un nadador que es capaz de nadar a una velocidad de 0,5 m/s pretende cruzar un río de 20 m de anchura en el que la velocidad del agua es de 0,25 m/s. Calcula el tiempo que tarda en cruzarlo y la distancia aguas abajo que le arrastra la corriente. ¿En qué dirección debería nadar para cruzarlo perpendicularmente?

El tiempo que tardará en cruzar el río será:

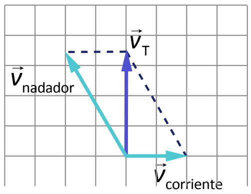
$$d = v_{\text{nadador}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v_{\text{nadador}}} = \frac{20\ \cancel{\text{m}}}{0,5\ \frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}}} = \mathbf{40\ s}$$



La distancia aguas abajo que lo arrastra la corriente será:

$$x = v_{\text{corriente}} \cdot t = 0,25\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 40\ \cancel{\text{s}} = \mathbf{10\ m}$$

Para cruzar el río transversalmente, la suma de la velocidad de la corriente y la del nadador debe ser perpendicular a la corriente, es decir, $\vec{v}_T$ tiene que ser perpendicular a $\vec{v}_c$:



$$\text{sen}\ \alpha = \frac{v_c}{v_n} = \frac{0{,}25\ \cancel{\text{m/s}}}{0{,}5\ \cancel{\text{m/s}}} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathbf{30°}$$

Movimiento con aceleración constante

43. Un electrón que se mueve con una velocidad de 3 · 10⁵ m/s frena debido a la existencia de otras cargas.

a) Si la aceleración de frenado es de 10⁶ cm/s², ¿cuánto tiempo tardará el electrón en reducir la velocidad a la mitad?

b) ¿Y desde que tiene esta nueva velocidad hasta que se detiene?

c) Compara los resultados obtenidos y explica por qué ambos tiempos son iguales.

a) $$v_0 = 3 \cdot 10^5\ \text{m/s}; \quad a = -10^6\ \text{cm/s}^2 = -10^4\ \text{m/s}^2$$

Hallamos el tiempo que tarda el electrón en reducir su velocidad a la mitad:

$$v = v_o + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{2} = v_o + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad \frac{v_o}{2} - v_o = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-v_o}{2 \cdot a} = \frac{-3 \cdot 10^5\ \text{m/s}}{2 \cdot (-10^4)\ \text{m/s}^2} = \mathbf{15\ s}$$

b) Ahora, hasta pararse tardará:

$$0 = v_o + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-v_o}{a} = \frac{-1{,}5 \cdot 10^5\ \text{m/s}}{(-10^4)\ \text{m/s}^2} = \mathbf{15\ s}$$

c) Son iguales. Como la aceleración es la medida del cambio de velocidad en la unidad de tiempo, a cambios de velocidad iguales le corresponden tiempos iguales.

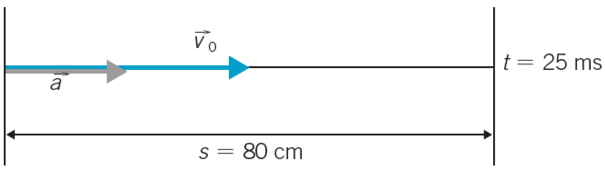
44. Un haz de iones positivos que posee una velocidad de 15 m/s entra en una región y acelera. Necesitamos que en 25 ms los iones alcancen un cátodo situado a 80 cm.

a) Dibuja en tu cuaderno un esquema del ejercicio.

b) Calcula la aceleración constante que hay que comunicarles.

c) Halla la velocidad con que llegan el cátodo.

a)



b) Escribimos la ecuación de la posición del MRUA y despejamos la aceleración, considerando que $x_0 = 0$:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot (x - v_0 \cdot t)}{t^2} = \frac{2 \cdot (0{,}8\ \text{m} - 15\ \text{m/s} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{s})}{(2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{s})^2} = \mathbf{1360\ m/s^2}$$

c) Escribimos la ecuación de la velocidad del MRUA, sustituimos y calculamos:

$$v = v_o + a \cdot t = 15\ \text{m/s} + 1360\ \text{m/s}^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{s} = \mathbf{49\ m/s}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 242)

45. Contesta:

a) ¿Qué tipo de movimientos se dan cuando la velocidad y la aceleración tienen el mismo sentido?

b) ¿Y si es distinto? Pon ejemplos.

a) Se trata de un movimiento rectilíneo donde la velocidad crece con el tiempo.

Ejemplo: un coche que se mueve por una carretera recta acelerando o un cuerpo que se deja caer desde cierta altura.

b) Se trata de un movimiento rectilíneo como antes, pero de velocidad decreciente.

Ejemplo: lanzamiento vertical y hacia arriba de un cuerpo.

46. ¿Qué aceleración actúa sobre un electrón en el «cañón de electrones» de un osciloscopio que alcanza el 10 % de la velocidad de la luz en un espacio de 10 cm? Especifica claramente las suposiciones que has hecho para resolver este ejercicio. Dato: $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Hallamos la velocidad, que es el 10 % de c_0:

$$v = \frac{10 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{100} = 3 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2 \cdot a \cdot x \Rightarrow a = \frac{v^2}{2 \cdot x} = \frac{(3 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0{,}1 \text{ m}} = \mathbf{4{,}5 \cdot 10^{15}\ m/s^2}$$

Se supone que no es necesario utilizar cálculos relativistas.

47. En el anuncio de un nuevo modelo de coche se dice que es capaz de pasar de cero a 100 km/h en 6 s.

a) Calcula la aceleración media.

b) Calcula el espacio que recorre durante este tiempo.

a) Expresamos la velocidad en m/s:

$$v = 100 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 2{,}\widehat{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Calculamos la aceleración media:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(2{,}\widehat{7} - 0) \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = 4{,}629 \text{ m/s}^2 = \mathbf{4{,}63\,m/s^2}$$

b) Determinamos el espacio recorrido en 6 s, teniendo en cuenta que x_0 y v_0 son cero:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}629 \text{ m/s}^2 \cdot (6 \text{ s})^2 = \mathbf{83{,}\widehat{3}\ m}$$

48. Un coche necesita 40 s para alcanzar una velocidad de 100 km/h partiendo del reposo.

a) Calcula la aceleración y el espacio recorrido en ese tiempo.

b) Si después frena con una aceleración de 3 m/s², calcula el tiempo que tarda hasta pararse.

c) Dibuja en tu cuaderno la gráfica velocidad-tiempo del movimiento desde que el coche arranca hasta que se para.

a) Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 100 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 27{,}\widehat{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La aceleración será:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(27{,}\widehat{7} - 0) \text{ m/s}}{40 \text{ s}} = \mathbf{0{,}69\widehat{4}\ m/s^2}$$

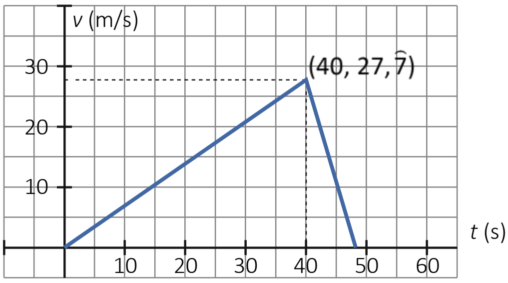
El espacio recorrido es:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}69\widehat{4} \text{ m/s}^2 \cdot (40 \text{ s})^2 = \mathbf{555{,}\widehat{5}\ m}$$

b) El tiempo que tarda en pararse es:

$$v = v_0 + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 27{,}\widehat{7} \text{ m/s}}{-3 \text{ m/s}^2} = 9{,}259 \text{ s} = \mathbf{9{,}26\ s}$$

c) Representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo:



49. Un tren de 80 m de longitud circula a 120 km/h y una señal le indica que a una distancia de 100 m debe ir a 90 km/h.

a) ¿Qué aceleración de frenado debe aplicar el conductor?

b) ¿Cuánto tiempo tarda el tren en cruzar completamente un túnel de 200 m cuando lleva una velocidad constante de 90 km/h?

Expresamos las velocidades en m/s:

$$v_0 = 120\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 33,\widehat{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 90\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) A partir de la siguiente expresión, que relaciona velocidad y posición en un MRUA, calculamos la aceleración de frenado:

$$v^2 - {v_0}^2 = 2\cdot a\cdot x \quad\Rightarrow\quad a = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2\cdot x} = \frac{(25\ \text{m/s})^2 - (33,\widehat{3}\ \text{m/s})^2}{2\cdot 100\ \text{m}} = -2,430\widehat{5}\ \text{m/s}^2 = \mathbf{-2,43\ m/s^2}$$

b) Para cruzar completamente un túnel de 200 m debemos tener en cuenta la longitud del túnel más la longitud del tren; por tanto, el espacio que debe recorrer es:

$$x = 200\ \text{m} + 80\ \text{m} = 280\ \text{m}$$

Y el tiempo que emplea será:

$$x = v\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{v} = \frac{280\ \cancel{\text{m}}}{25\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = \mathbf{11,2\ s}$$

50. Una moto que se encuentra parada en un semáforo arranca en el mismo momento que es adelantada por un coche que se mueve con velocidad constante de 90 km/h. Si la moto arranca con aceleración constante de 1,5 m/s^2, calcula:

a) El tiempo que transcurre hasta que la moto adelanta al coche.

b) La velocidad que lleva la moto en ese instante.

Expresamos la velocidad del coche en m/s:

$$v_{\text{coche}} = 90\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \text{m/s}$$

a) Planteamos las ecuaciones de movimiento (el coche lleva un MRU y la moto lleva un MRUA):

$$\begin{cases} x_{\text{coche}} = x_{0,\text{coche}} + v_{\text{coche}}\cdot t = v_{\text{coche}}\cdot t \\ x_{\text{moto}} = x_{0,\text{moto}} + v_0\cdot t + \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = \dfrac{1}{2}\cdot a_{\text{moto}}\cdot t^2 \end{cases}$$

En $t = 0$ s los dos vehículos están en la línea del semáforo, $x_{0,\text{coche}} = x_{0,\text{moto}} = 0$ m. En el instante, t, que la moto adelanta al coche, las posiciones de ambos vehículos coinciden, $x_{\text{coche}} = x_{\text{moto}}$. Igualamos y resolvemos para despejar el tiempo de encuentro:

$$x_{\text{coche}} = x_{\text{moto}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{coche}} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a_{\text{moto}} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2 \cdot v_{\text{coche}}}{a_{\text{moto}}} = \frac{2 \cdot 25\ \cancel{\text{m}}/\text{s}}{1{,}5\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^2} = \mathbf{33{,}\widehat{3}\ s}$$

b) La velocidad de la moto cuando adelanta al coche:

$$v_{\text{moto}} = v_0 + a \cdot t = 0 + 1{,}5\ (\text{m/s}^2) \cdot 33{,}\widehat{3}\ \text{s} = \mathbf{50\ m/s}$$

51. Un móvil se mueve sobre una superficie horizontal y en línea recta con una aceleración constante de 3 m/s². Si en $t_0 = 0$ s el móvil se encuentra en $x_0 = 20$ m moviéndose con una velocidad $v_0 = 10$ km/h, determina la ecuación del movimiento y halla la velocidad y la posición a los 10 s. ¿Con qué aceleración hay que frenar si se quiere que el móvil se pare después de recorrer 100 m?

Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v = 10 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 2{,}\widehat{7} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ecuación de la posición:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 20\ \text{m} + 2{,}\widehat{7}\ \text{m/s} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(3\ \text{m/s}^2\right) \cdot t^2$$

Ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 + a \cdot t = 2{,}\widehat{7}\ \text{m/s} + 3\ \text{m/s}^2 \cdot t$$

Para $t = 10$ s:

$$v(t = 10\ \text{s}) = 2{,}\widehat{7}\ \text{m/s} + 3\ \text{m/s}^2 \cdot 10\ \text{s} = \mathbf{32{,}\widehat{7}\ m/s}$$

$$x(t = 10\ \text{s}) = 20\ \text{m} + 2{,}\widehat{7}\ \text{m/s} \cdot 10\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(3\ \text{m/s}^2\right) \cdot (10\ \text{s})^2 = \mathbf{197{,}\widehat{7}\ m}$$

A partir de la siguiente expresión, que relaciona velocidad y posición en un MRUA, calculamos la aceleración de frenado:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot x} = \frac{(0)^2 - (32{,}\widehat{7}\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 100\ \text{m}} = \mathbf{-5{,}37\ m/s^2}$$

52. Un vehículo parte del reposo y aumenta su velocidad a un ritmo de 2 m/s cada segundo durante 10 s. Después continúa con velocidad constante durante 5 s. Al final frena y se para en 4 s. Calcula el espacio total recorrido y la aceleración en el último tramo.

Para calcular el espacio total recorrido debemos analizar cada tramo por separado:

Primer tramo (MRUA): $t = 10$ s; $v_0 = 0$ m/s; $a = 2$ m/s².

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{m/s}^2 \cdot (10\ \text{s})^2 = 100\ \text{m}$$

$$v_1 = v_0 + a \cdot t = 2\ \text{m/s}^2 \cdot 10\ \text{s} = 20\ \text{m/s}$$

Segundo tramo (MRU): $t = 5$ s; $x_1 = 100$ m; $v_1 = 20$ m/s = cte.

$$x_2 = x_1 + v_1 \cdot t = 100\ \text{m} + 20\ \text{m/s} \cdot 5\ \text{s} = 200\ \text{m}$$

Tercer tramo (MRUA): $t = 4$ s; $x_2 = 200$ m; $v_2 = 20$ m/s; $v_3 = 0$ m/s.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(0 - 20)\ \text{m/s}}{4\ \text{s}} = -5\ \text{m/s}^2$$

$$x_3 = x_2 + v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = 200\ \text{m} + 20\ \text{m/s} \cdot 4\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 5\ \text{m/s}^2 \cdot (4\ \text{s})^2 = 240\ \text{m}$$

El espacio total recorrido es **240 m** y la aceleración en el último tramo es **–5 m/s²**.

53. Representa gráficamente la velocidad y la posición frente al tiempo para el caso de un cuerpo que cae bajo la acción de la gravedad desde una altura de 100 m.

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \\ v = -g \cdot t \end{cases}$$

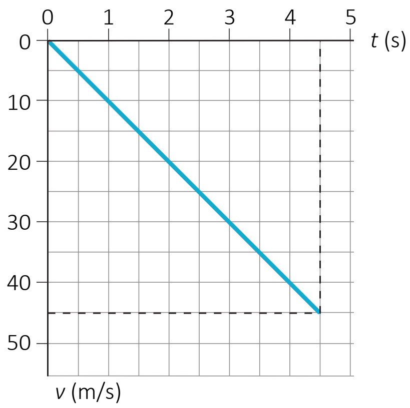
Hacemos $y = 0$ m, y calculamos el tiempo que tarda en caer:

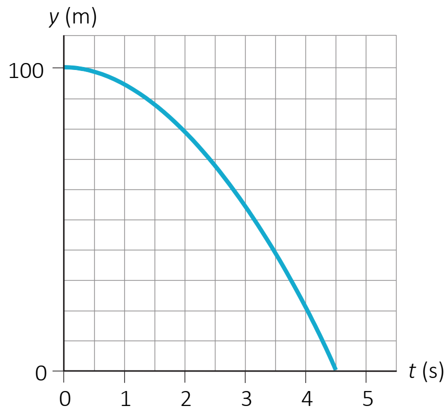
$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 4{,}5\ \text{s}$$

Sustituimos el tiempo de caída en la ecuación de la velocidad y calculamos la velocidad con la que llega al suelo:

$$v = -9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 4{,}5\ \text{s} = -44{,}3\ \text{m/s}$$

El signo negativo indica que el cuerpo se mueve hacia abajo. Representamos la componente vertical de la velocidad frente al tiempo y la posición vertical también frente al tiempo:





54. Se dejan caer dos bolas de acero de masas 5 kg y 20 kg.

a) ¿Cuál de ellas llegará antes al suelo?

b) ¿Cuál llegará con una mayor velocidad?

a) Ambas llegan a la vez. La aceleración es igual para las dos e igual a g. Escribimos la ecuación de movimiento y hacemos $y = 0$ para calcular el tiempo que tardan en llegar al suelo es:

$$y = h + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Como podemos ver en la ecuación anterior, el tiempo no depende de la masa.

b) Ambas llegan con la misma velocidad independientemente de su masa:

$$v = -g \cdot t$$

55. Una pelota que se suelta desde una cierta altura tarda 10 segundos en caer al suelo.

a) ¿Durante cuál de esos 10 segundos se produce un mayor incremento de la velocidad?

b) ¿Y del espacio recorrido?

a) $\Delta v = a \cdot \Delta t$. La aceleración es $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

La variación de la velocidad para cada $\Delta t = 1$ s es $\Delta v = 9{,}8$ m/s, es decir, siempre la misma.

La velocidad va aumentando cada segundo en 9,8 m/s.

b) Como:

$$y = y_i + v_i \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_i y = y - y_i = v_i \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (\Delta t)^2$$

Donde v_i es la velocidad al inicio de cada intervalo de tiempo, y $\Delta t = 1$ s. La velocidad de cada intervalo es mayor, y el espacio recorrido, $\Delta_i y$, en ese segundo también lo es. El mayor incremento en el espacio recorrido ocurre en el último segundo, donde se inicia con mayor velocidad.

56. **Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m/s. Halla la velocidad cuando se encuentra a 30 m de altura y el tiempo que tarda en llegar al punto más alto de su recorrido. Dibuja la gráfica velocidad-tiempo desde que el cuerpo se lanzó hasta que volvió otra vez al punto de partida.**
Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

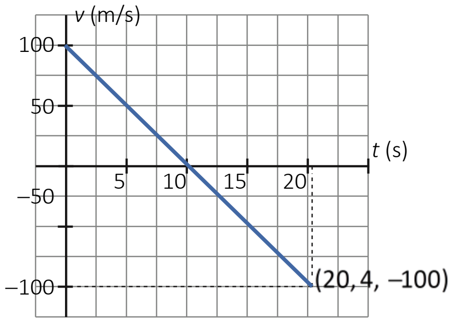
A partir de la siguiente expresión, particularizada para un MRUA bajo la aceleración de la gravedad, que relaciona velocidad y posición, calculamos la velocidad para $y = 30$ m:

$$v^2 - v_0^2 = 2 \cdot (-g) \cdot y \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot y} = \sqrt{(100\ \text{m/s})^2 - 2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 30\ \text{m}} = \mathbf{97{,}02\ m/s}$$

Como el lanzamiento se lleva a cabo verticalmente, la velocidad solo tiene componente en el eje *Y*. En el punto más alto esta velocidad se anula, por tanto:

$$v = v_0 - g \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{100\ \text{m/s}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{10{,}2\ s}$$

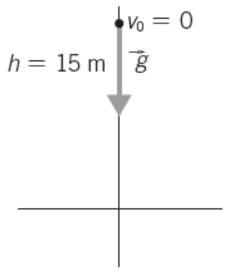
Representamos gráficamente la velocidad frente al tiempo:



57. **Un niño que se encuentra en la calle ve caer una pelota verticalmente desde una ventana. Si el niño se encuentra a 4 m de distancia en horizontal al punto de caída y la altura de la ventana es de 15 m, calcula a qué velocidad media debe correr para atraparla antes de que llegue al suelo. Dibuja en tu cuaderno un esquema de la situación.**

Ecuación del movimiento de la pelota:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



Haciendo $y = 0$ m se calcula el tiempo que invierte el cuerpo en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 1{,}75\ \text{s}$$

La velocidad a la que debe correr el niño es:

$$v = \frac{4\ \text{m}}{1{,}75\ \text{s}} = \mathbf{2{,}29\ m/s}$$

58. **Se lanzan dos cuerpos verticalmente hacia arriba con velocidad de 50 m/s separados por un intervalo de tiempo de 3 s. Calcula el tiempo que tardan en cruzarse, la velocidad que lleva cada uno en ese momento y la altura a la que se cruzan. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².**

El intervalo de tiempo es $t_2 = t_1 - 3$ s. Escribimos las ecuaciones de la posición de ambos cuerpos:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

$$y_2 = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 50 \cdot (t_1 - 3) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 3)^2$$

En el momento de cruce sus posiciones coinciden, $y_1 = y_2$. Queda una ecuación con la incógnita en el tiempo que tardan en cruzarse desde que se lanzó la primera. Resolviendo:

$$50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 50 \cdot (t_1 - 3) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t_1 - 3)^2$$

$$50 \cdot t_1 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} = 50 \cdot t_1 - 150 - \cancel{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2} - \frac{9}{2} \cdot g + 3 \cdot g \cdot t_1$$

$$0 = -150 - \frac{9}{2} \cdot g + 3 \cdot g \cdot t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{150 + 4{,}5 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 9{,}8} = \mathbf{6{,}60\ s}$$

La velocidad para $t = 6{,}60$ s:

$$v_1 = v_0 - g \cdot t = 50\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}60\ \text{s} = \mathbf{-14{,}7\ m/s}$$
$$v_2 = v_0 - g \cdot (t - 3) = 50\ \text{m} - 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot \left(6{,}60\ \text{s} - 3\ \text{s}\right) = \mathbf{14{,}7\ m/s}$$

Para calcular la altura a la que se cruzan basta sustituir el tiempo del cruce en cualquiera de las ecuaciones de la posición:

$$y_1 = 50 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 50\ \text{m} \cdot 6{,}60\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (6{,}60\ \text{s})^2 = \mathbf{116{,}5\ m}$$

59. Una persona situada frente a una ventana de 1 m de altura ve pasar un cuerpo que cae desde más arriba y comprueba que tarda 0,2 s en cruzarla. Si la distancia de la ventana al suelo es de 10 m, calcula la altura desde la que se dejó caer el cuerpo. Dato: g = 9,8 m/s².

Escribimos las ecuaciones de movimientos en los instantes t_1 y t_2:

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 11 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$
$$y_2 = y_0 + v_0 \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \quad \Rightarrow \quad 10 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2$$

Restando a la primera expresión la segunda, tenemos:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t_2^2 - t_1^2\right) \quad \Rightarrow \quad 2 = g \cdot \left(t_2^2 - t_1^2\right)$$

Como tarda 0,2 s en cruzar la ventana $t_2 - t_1 = 0{,}2\ \text{s}$, es decir, $t_2 = t_1 + 0{,}2\ \text{s}$.

Sustituimos y despejamos t_1:

$$2 = g \cdot \left(\cancel{t_1^2} + 0{,}04 + 0{,}4 \cdot t_1 - \cancel{t_1^2}\right) \quad \Rightarrow \quad 2 = g \cdot \left(0{,}04 + 0{,}4 \cdot t_1\right)$$

$$t_1 = \frac{2 - 9{,}8 \cdot 0{,}04}{9{,}8 \cdot 0{,}4} = 0{,}41\ \text{s}$$

Despejamos la posición inicial de la primera expresión y sustituimos el tiempo t_1:

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = y_1 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 11\ \text{m} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (0{,}41\ \text{s})^2 = \mathbf{11{,}82\ m}$$

60. El tiempo transcurrido desde que se deja caer una piedra a un pozo hasta que se oye el sonido que produce al chocar con el agua es de 4 s. Con estos datos halla la profundidad del pozo. Dato: la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s; g = 9,8 m/s².

Escribimos las ecuaciones de ambos movimientos. Consideramos el origen del sistema de referencias en el punto más hondo del pozo. Despejamos el tiempo en cada ecuación:

- La piedra cae: $y = y_0 + v_0 \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t_{\text{piedra en caer}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot h}{g}}$

- El sonido sube: $y = y_0 + v_s \cdot t' \Rightarrow h = 0 + v_s \cdot t' \Rightarrow t' = t_{\text{sonido en subir}} = \dfrac{h}{v_s}$

El tiempo total:

$$t_T = t_{\text{piedra en caer}} + t_{\text{sonido en subir}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + \frac{h}{v_s}$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = t_T - \frac{h}{v_s} \Rightarrow \frac{2 \cdot h}{g} = t_T^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t_T \cdot \frac{h}{v_s}$$

$$\left[\frac{2 \cdot h}{g} = t_T^2 + \frac{h^2}{v_s^2} - 2 \cdot t_T \cdot \frac{h}{v_s}\right] \times v_s^2 \cdot g \Rightarrow 2 \cdot h \cdot v_s^2 = t_T^2 \cdot v_s^2 \cdot g + h^2 \cdot g - 2 \cdot t_T \cdot h \cdot v_s \cdot g$$

$$g \cdot h^2 - 2 \cdot \left(v_s + t_T \cdot g\right) \cdot v_s \cdot h + t_T^2 \cdot v_s^2 \cdot g = 0$$

Sustituyendo los valores conocidos y ordenando queda una ecuación de segundo grado con la incógnita en *h*. Resolviendo obtenemos la profundidad del pozo pedida:

$$9{,}8\ h^2 - 257\,856\ h + 18\,126\,080 = 0 \Rightarrow h = \mathbf{70{,}5\,m}$$

La profundidad del pozo resulta positiva pues hemos considerado el origen del sistema de referencias en el punto más hondo del pozo. Solo una de las dos soluciones tiene sentido.

ACTIVIDADES FINALES (página 243)

Movimiento parabólico

61. Contesta:

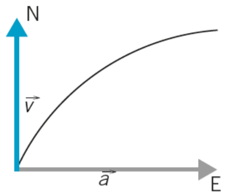
a) ¿Puede tener un automóvil su velocidad dirigida hacia el norte y sin embargo la aceleración estar dirigida hacia el sur?

b) ¿Y hacia el este?

c) ¿Cómo serían estos movimientos?

a) Sí, sería un movimiento hacia el norte con velocidad decreciente, hasta detenerse.

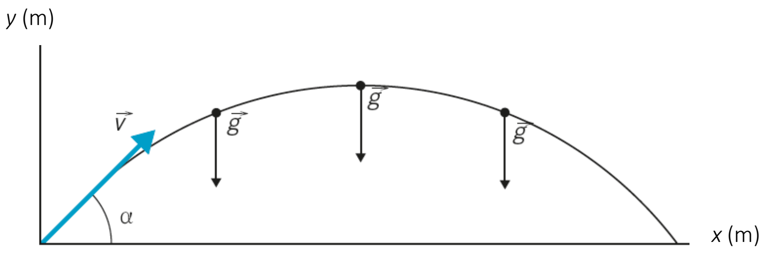
b) Solo en el instante inicial. A partir del instante inicial la velocidad cambiaría de dirección y ya no estaría dirigida hacia el norte. Su movimiento seguiría una trayectoria curva, como se indica en el dibujo.



c) El primero es rectilíneo, y el segundo, curvilíneo. En el caso de que la componente norte de la velocidad fuera constante, parabólico.

62. ¿Qué dirección tiene la aceleración de un cuerpo que es lanzado con determinada velocidad formando un ángulo α con la superficie de la Tierra? Haz un esquema que aclare la respuesta.

La aceleración siempre apunta hacia la superficie de la Tierra (perpendicular a la misma y dirigida hacia el centro).



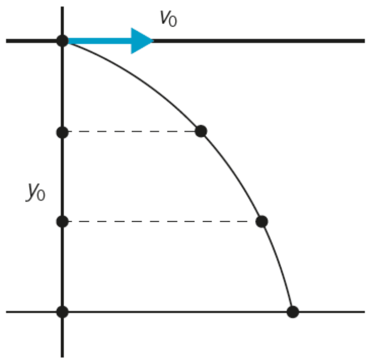
63. Se deja caer un cuerpo desde una altura *h* a la vez que se lanza otro objeto desde el mismo punto con velocidad horizontal v_0.

a) ¿Cuál de los dos llega antes a la superficie de la Tierra?

b) Haz un esquema.

a) Llegan a la vez. El movimiento horizontal no afecta al vertical.

b) $v_0 = 0$ m/s.



Ecuaciones del cuerpo que se deja caer sin velocidad inicial:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Ecuaciones del cuerpo al que se le da una velocidad horizontal:

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

En lo que respecta al movimiento vertical, la ecuación de movimiento es la misma para ambos:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

64. Se lanza horizontalmente un proyectil con una cierta velocidad inicial.

a) Demuestra lo que sucede con el alcance del proyectil si se dobla la velocidad de lanzamiento.

b) ¿También se dobla el alcance?

a) El tiempo de caída es independiente de la velocidad horizontal v_0; solo depende de la altura *h*.

Ecuaciones del movimiento del proyectil:

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Haciendo $y = 0$ se obtiene el tiempo de caída:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

b) Al duplicar la velocidad de lanzamiento se duplica el alcance:

$$x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad \Rightarrow \quad x' = 2 \cdot v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \text{para } 2 \cdot v_0 \Rightarrow x' = 2 \cdot x$$

65. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) En un MUA la velocidad tiene siempre la misma dirección que la aceleración.

b) En un MUA la representación gráfica de $\Delta\vec{r}$ frente a t siempre es una parábola, aunque el movimiento sea retardado.

c) En el punto más elevado de la trayectoria de un proyectil la velocidad total es nula.

d) En el punto más elevado de la trayectoria de un proyectil la velocidad vertical es nula.

e) El alcance de un proyectil solo depende de la velocidad inicial.

f) El alcance de un proyectil depende del ángulo α de lanzamiento.

a) **Falso**. $\vec{v}$ y $\vec{a}$ pueden tener cualquier dirección.

b) **Verdadero**.

c) **Falso**. Es nula la velocidad vertical.

d) **Verdadero**.

e) **Falso**. Depende de la velocidad inicial y del ángulo.

f) **Verdadero**, aunque también depende de la velocidad inicial v_0.

66. Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un móvil son:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 50 \cdot t} \\ \boldsymbol{y = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2} \end{cases}$$

Halla la ecuación de la trayectoria y calcula la velocidad en $t = 3$ s.

Para obtener la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 50 \cdot t & \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{50} \\ y = 50 \cdot t - 5 \cdot t^2 & \Rightarrow \quad y = 50 \cdot \dfrac{x}{50} - 5 \cdot \left(\dfrac{x}{50}\right)^2 \end{cases}$$

Ecuación de la trayectoria:

$$\boldsymbol{y = x - \frac{x^2}{500}}$$

El vector velocidad se obtiene derivando respecto al tiempo el vector de posición:

$$\vec{r} = 50 \cdot t\,\vec{i} + (50 \cdot t - 5 \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left[50 \cdot t\,\vec{i} + (50 \cdot t - 5 \cdot t^2)\,\vec{j}\right]}{dt} = 50\,\vec{i} + (50 - 10 \cdot t)\,\vec{j} \text{ m/s}$$

Para $t = 3$ s:

$$\vec{v}\left(t = 3 \text{ s}\right) = 50\,\vec{i} + (50 - 10 \cdot 3)\,\vec{j} = \mathbf{50\,\vec{i} + 20\,\vec{j} \text{ m/s}}$$

67. Un cañón dispara un proyectil a una velocidad de 500 m/s con un ángulo de 15°. Calcula, despreciando el rozamiento con el aire: Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) El alcance máximo

b) La altura máxima.

a) Calculamos el alcance máximo:

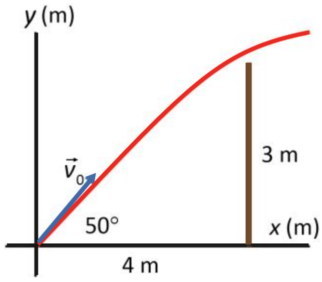
$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\left(2\,\alpha\right)}{g} = \frac{\left(500 \text{ m/s}\right)^2 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 15°\right)}{9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{12\,755 \text{ m}}$$

b) Calculamos la altura máxima:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2\ \alpha}{2 \cdot g} = \frac{(500\ \text{m/s})^2 \cdot \text{sen}^2\ 15°}{2 \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2} = \mathbf{854{,}4\ m}$$

68. Un niño chuta un balón con un ángulo de 50° sobre la horizontal. A una distancia de 4 m delante del niño hay una valla de 3 m de altura. Halla el valor mínimo del módulo de la velocidad inicial del balón para que pase por encima de la valla. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Escribimos las ecuaciones de la posición:



$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\ \alpha \cdot t \\ y = v_{0y} \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Para calcular la velocidad inicial imponemos la condición del problema de que el balón pase por encima de la valla, es decir, para $x = 4$ m, $y \geq 3\text{m}$. Despejamos el tiempo de la primera ecuación:

$$x = v_0 \cdot \cos\ \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\ \alpha} = \frac{4}{v_0 \cdot \cos\ 50°}$$

Sustituimos la expresión en la segunda ecuación y resolvemos la inecuación:

$$y = v_0 \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot \frac{4}{v_0 \cdot \cos\ \alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{4}{v_0 \cdot \cos\ \alpha}\right)^2 \geq 3$$

$$4 \cdot \text{tg}\ \alpha - \frac{8 \cdot g}{v_0^2 \cdot \cos^2\ \alpha} \geq 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \text{tg}\ \alpha - 3 \geq \frac{8 \cdot g}{v_0^2 \cdot \cos^2\ \alpha}$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{8 \cdot g}{(4 \cdot \text{tg}\ \alpha - 3) \cdot \cos^2\ \alpha}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 9{,}8}{(4 \cdot \text{tg}\ 50° - 3) \cdot \cos^2\ 50°}} = 10{,}36\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

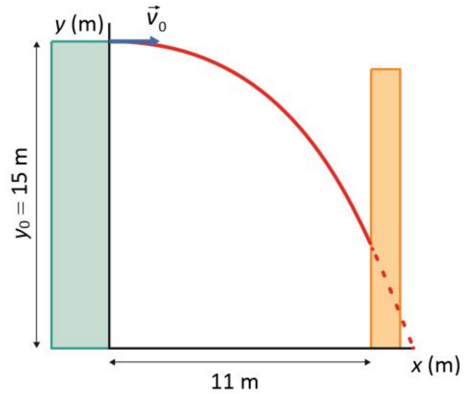
El módulo de la velocidad inicial debe ser mayor o igual que **10,36 m/s.**

69. Desde la azotea de un edificio, a 15 m del suelo, se lanza horizontalmente un balón con una velocidad de 8 m/s. Si la anchura de la calle a la que da el edificio es de 11 m:

a) ¿Choca la pelota con el edificio de enfrente o cae directamente al suelo?

b) En el caso de que choque, ¿a qué altura choca?

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



a) Tomamos el origen de alturas en el suelo. Escribimos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Haciendo $y = 0$ m, se calcula el tiempo que tarda el balón en llegar al suelo:

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 1{,}75\ \text{s}$$

Sustituyendo el tiempo en la componente x, calculamos el alcance horizontal:

$$x = v_{0x} \cdot t = 8\ \text{m/s} \cdot 1{,}75\ \text{s} = 14\ \text{m}$$

Como es mayor que el ancho de la calle, el balón **chocará con la pared del edificio** de enfrente antes de tocar el suelo.

b) Tenemos que calcular el valor de *y* cuando *x* valga 11 m. Calculamos el tiempo que tarda el balón en conseguir dicha posición:

$$x = v_{0x} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{11\ \cancel{\text{m}}}{8\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = 1{,}375\ \text{s}$$

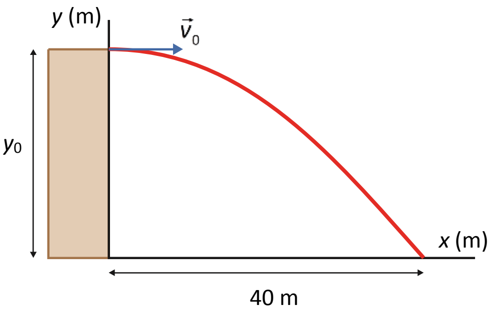
Sustituyendo el tiempo en la componente *y* calculamos la altura a la que choca con la pared:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 15\ \text{m} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (1{,}375\ \text{s})^2 = \mathbf{5{,}74\ m}$$

ACTIVIDADES FINALES (página 244)

70. Se lanza un cuerpo horizontalmente desde lo alto de un acantilado con una velocidad inicial de 72 km/h. El cuerpo cae a una distancia de 40 m contados desde la vertical del punto de lanzamiento. Calcula la altura del acantilado y la velocidad del cuerpo al llegar al mar. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Tomamos como origen del sistema de referencia el punto del suelo situado en la vertical de lanzamiento.



Expresamos la velocidad en unidades del SI:

$$v_{0x} = 72 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Escribimos las ecuaciones del movimiento:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$$

$$\vec{r} = h\,\vec{j} + v_{0x}\,\vec{i} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-g\,\vec{j}\right) \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = v_{0x} \cdot t\,\vec{i} + \left(h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\right)\vec{j}$$

Cuyas componentes son:

$$\begin{cases} x = v_{0x} \cdot t \\ y = h - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Calculamos el tiempo que tarda el cuerpo en recorrer los 40 m en horizontal:

$$x = v_{0x} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{40\ \cancel{\text{m}}}{20\ \cancel{\text{m}}/\text{s}} = 2\ \text{s}$$

Calculamos la altura del acantilado. Sustituimos el valor $y = 0$ m, al caer al agua. Y el tiempo calculado antes:

$$y = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (2\ \text{s})^2 = \mathbf{19{,}6\ m}$$

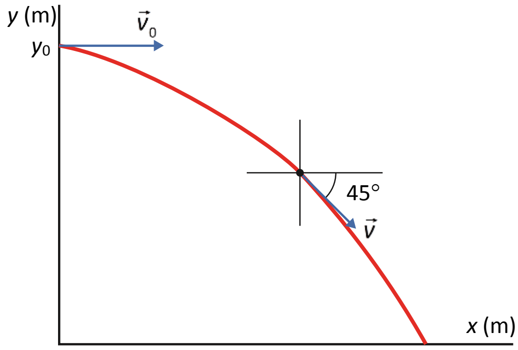
Resolvemos vectorialmente, ya que la velocidad final tiene componente en ambas direcciones. La velocidad del cuerpo al llegar al suelo es:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t = v_{0x}\,\vec{i} - g \cdot t\,\vec{j} = 20\,\vec{i} - 9{,}8 \cdot 2\,\vec{j} = 20\,\vec{i} - 19{,}6\,\vec{j}\ \text{m/s}$$

Y su módulo será la raíz cuadrada de sus componentes al cuadrado:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(20\ \text{m/s})^2 + (-19{,}6\ \text{m/s})^2} = \mathbf{28\ m/s}$$

71. Un esquiador salta desde un trampolín que se encuentra a una altura de 10 m con una velocidad horizontal de 30 km/h. Calcula el tiempo de vuelo y el punto en el que su velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal. Dato: *g* = 9,8 m/s².



Expresamos la velocidad en m/s:

$$v_{0x} = 30\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 8,\widehat{3}\ \text{m/s}$$

Escribimos las componentes de la ecuación de movimiento:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}\cdot t = v_{0x}\cdot t \\ y = y_0 + v_{0y}\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = y_0 - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{cases}$$

Haciendo $y = 0$, calculamos el tiempo de vuelo:

$$0 = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2\cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\ \text{m}}{9,8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{1,43\ s}$$

Escribimos las componentes de la velocidad:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g\cdot t = -g\cdot t \end{cases}$$

Para que el vector velocidad forme un ángulo de 45° con la horizontal ha de cumplirse que:

$$\text{tg } 45° = \frac{|v_y|}{|v_x|} = 1 \quad\Rightarrow\quad |v_x| = |v_y|$$

$$v_{0x} = g\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{v_{0x}}{g} = \frac{8,\widehat{3}\ \cancel{\text{m}}/\text{s}}{9,8\ \cancel{\text{m}}/\text{s}^2} = 0,85\ \text{s}$$

Sustituyendo el tiempo en las componentes de la ecuación de movimiento calculamos la situación de dicho punto:

$$\begin{cases} x = v_{0x}\cdot t = 8,\widehat{3}\ \text{m/s}\cdot 0,85\ \text{s} = 7,09\ \text{m} \\ y = y_0 - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = 10\ \text{m} - \dfrac{1}{2}\cdot 9,8\ \text{m/s}^2\cdot(0,85\ \text{s})^2 = 6,46\ \text{m} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\vec{r} = \mathbf{7,09\ \vec{i} + 6,46\ \vec{j}\ m/s}$$

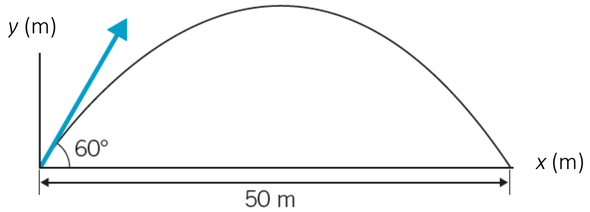
72. Un balón es lanzado con un ángulo de 60° por encima de la horizontal y recorre una longitud de 50 m en el campo de fútbol.

a) Dibuja un esquema del ejercicio.

b) Calcula la velocidad inicial.

c) ¿Qué altura alcanzó?

a)



b) Despejamos v_0 de la ecuación del alcance:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen } 2\alpha}{g} \Rightarrow v_0^2 = \frac{x_{\text{máx}} \cdot g}{\text{sen } 2\alpha} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{x_{\text{máx}} \cdot g}{\text{sen } 2\alpha}} = \sqrt{\frac{50 \text{ m} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2}{\text{sen } 120^\circ}} = \mathbf{23{,}8 \text{ m/s}}$$

c) Calculamos la altura que alcanzó el balón:

$$y_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{2 \cdot g} = \frac{(23{,}8 \text{ m/s})^2 \cdot \text{sen}^2 60^\circ}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = \mathbf{21{,}7 \text{ m}}$$

73. Dos aviones que se encuentran en la misma vertical pretenden alcanzar el mismo blanco dejando caer una bomba. Si uno vuela a una altura doble que el otro, halla la relación entre sus velocidades para conseguirlo. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Calculamos cuánto tiempo tarda una de las bombas en alcanzar el blanco ($y_1 = 0$):

$$y_1 = y_{01} + v_{y1} \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow 0 = y_{01} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{01}}{g}}$$

Análogamente, ($y_2 = 0$):

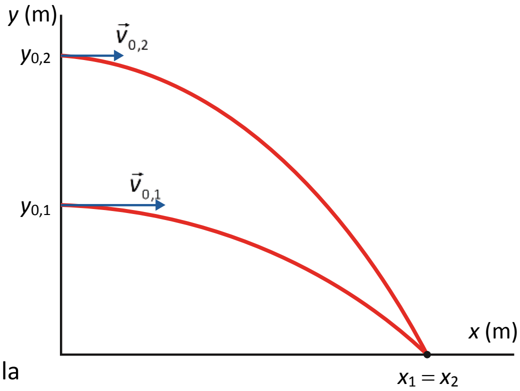
$$y_2 = y_{02} + v_{y2} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow 0 = y_{02} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{02}}{g}}$$

Como $y_{02} = 2 \cdot y_{01}$:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{02}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot y_{01}}{g}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot y_{01}}{g}} \Rightarrow t_2 = \sqrt{2} \cdot t_1$$

En ese tiempo la distancia horizontal recorrida por las bombas debe ser la misma ($x_1 = x_2$):

$$x_1 = x_{01} + v_{01} \cdot t_1 = v_{01} \cdot t_1$$
$$x_2 = x_{02} + v_{02} \cdot t_2 = v_{02} \cdot t_2$$



Igualando:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow v_{01} \cdot t_1 = v_{02} \cdot t_2$$

Como $t_2 = \sqrt{2} \cdot t_1$, tenemos que:

$$v_{01} \cdot \cancel{t_1} = v_{02} \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{t_1} \Rightarrow \mathbf{v_{01} = \sqrt{2} \cdot v_{02}}$$

Es decir, el avión que vuela más bajo debe ir más rápido para que la posición de impacto de la bomba sea la misma.

Movimiento circular

74. La Estación Espacial Internacional dio 133 vueltas a la Tierra en 8 días y 13 horas a una altura media de 409 km.

Sabiendo que el radio medio de la Tierra es de 6371 km:

a) Haz un esquema en tu cuaderno con las velocidades orbitales de la nave (lineal y angular), así como la aceleración normal, a_N, en la órbita.

b) ¿Por qué el valor de a_N se parece tanto al valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre, g?

Ayuda: ¿Hay «gravedad» en órbita? ¿A qué fuerza se debe esa aceleración de la nave?

$$\left.\begin{array}{l} 8 \text{ días} = 8\,\cancel{\text{días}} \cdot \dfrac{24\,\cancel{\text{h}}}{1\,\cancel{\text{día}}} \cdot \dfrac{3600\text{ s}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 691\,200\text{ s} \\ 13\text{ h} = 13\,\cancel{\text{h}} \cdot \dfrac{3600\text{ s}}{1\,\cancel{\text{h}}} = 46\,800\text{ s} \end{array}\right\} t = 738\,000\text{ s}$$

$$133\text{ vueltas} = 133\,\cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} = 266\pi\text{ rad}$$

a) Calculamos la velocidad angular, la velocidad lineal y la aceleración normal en la órbita:

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{266\pi\text{ rad}}{738\,000\text{ s}} = 3{,}60 \cdot 10^{-4}\,\pi\text{ rad/s}$$

$$v = \omega \cdot R = 3{,}60 \cdot 10^{-4}\,\pi\text{ rad/s} \cdot (409\,000 + 6\,371\,000)\text{ m} = 7677{,}24\text{ m/s}$$

$$a_N = \omega^2 \cdot R = (3{,}60 \cdot 10^{-4}\,\pi\text{ rad/s})^2 \cdot (409\,000 + 6\,371\,000)\text{ m} = 8{,}69\text{ m/s}^2$$

b) Para un satélite en órbita se cumple que $F = m \cdot a_N$, donde F es la fuerza gravitatoria:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} = m \cdot \frac{v^2}{d} \quad \Rightarrow \quad g = G \cdot \frac{M}{d} = \frac{v^2}{d} = a_N$$

La intensidad del campo gravitatorio g a una distancia d del centro de la Tierra es igual a la aceleración normal del satélite.

Como el satélite se encuentra cerca de la superficie de la Tierra (en comparación con el radio), el valor de la aceleración normal no es muy distinto al valor de g en la superficie, es decir, 9,8 m/s^2:

$$g = G \cdot \frac{M}{(R_T + h)^2} \simeq G \cdot \frac{M}{R_T^2}; \quad R_T + h = d$$

ACTIVIDADES FINALES (página 245)

75. Un cuerpo gira en una circunferencia de 3 m de radio con velocidad angular constante dando 8 vueltas cada minuto. Halla la velocidad angular en el SI, el periodo, la frecuencia, la velocidad lineal y la aceleración normal.

- Velocidad angular:

$$\omega = 8\text{ rpm} = 8\,\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\text{ rad}}{1\,\cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{min}}}{60\text{ s}} = \mathbf{\frac{4\pi}{15}\,rad/s}$$

- Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{15}\text{ rad/s}} = \mathbf{7{,}5\ s}$$

- Frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7{,}5\text{ s}} = \mathbf{0{,}1\widehat{3}\ Hz}$$

- Velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = \frac{4\pi}{15}\text{ rad/s} \cdot 3\text{ m} = \mathbf{2{,}51\ m/s}$$

- Aceleración normal:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{4\pi}{15}\text{ rad/s}\right)^2 \cdot 3\text{ m} = \mathbf{2{,}1\ m/s^2}$$

76. Una rueda de 100 cm de radio gira en torno a un eje perpendicular a la misma que pasa por su centro a razón de 900 vueltas por minuto. Determina la velocidad angular en rad/s, el periodo y la velocidad lineal de un punto de su periferia. ¿Cuánto tiempo tardará en girar un ángulo de 0,5 rad?

- Velocidad angular:

$$\omega = 900 \text{ rpm} = 900 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = \mathbf{30\pi \text{ rad/s}}$$

- Periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30\pi \text{ rad/s}} = \mathbf{0{,}0\widehat{6} \text{ s}}$$

- Velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = 30\pi \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ m} = \mathbf{94{,}25 \text{ m/s}}$$

El tiempo que tardará en girar un ángulo $\Delta\theta = 0{,}5$ rad será:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{0{,}5 \text{ rad}}{30\pi \text{ rad/s}} = \mathbf{5{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ s}}$$

77. El disco duro de un ordenador gira con una velocidad angular de 4200 vueltas por minuto. Calcula:

a) La velocidad angular en el SI.

b) El tiempo que tarda en dar 1,5 vueltas.

c) Las vueltas que da en 10 s.

d) La velocidad de un punto del borde del disco.

Dato: diámetro del disco duro 10 cm.

a) Velocidad angular:

$$\omega = 4200 \text{ rpm} = 4200 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = \mathbf{140\pi \text{ rad/s}}$$

b) Para calcular el tiempo que tarda en dar 1,5 vueltas, pasamos las 1,5 vueltas a radianes:

$$1{,}5 \cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} = 3\pi \text{ rad}$$

Y calculamos el tiempo pedido:

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{3\pi \cancel{\text{rad}}}{140\pi \cancel{\text{rad}}/\text{s}} = \mathbf{0{,}021 \text{ s}}$$

c) Para calcular las vueltas que da en 10 s calculamos el ángulo de giro:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = 140\pi \text{ rad/s} \cdot 10 \text{ s} = 1400\pi \text{ rad}$$

Y convertimos los radianes en vueltas:

$$1400\pi \cancel{\text{rad}} \cdot \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \cancel{\text{rad}}} = \mathbf{700 \text{ vueltas}}$$

d) La velocidad lineal de un punto del borde del disco es:

$$v = \omega \cdot R = 140\pi \text{ rad/s} \cdot 0{,}05 \text{ m} = \mathbf{22 \text{ m/s}}$$

78. La distancia entre la Tierra y la Luna es 385 000 km. Sabiendo que el periodo de rotación de la Luna es de 28 días, calcula la velocidad angular de la Luna, su velocidad lineal y su aceleración normal.

Expresamos el periodo de rotación en segundos:

$$T = 28 \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24 \cancel{\text{h}}}{1 \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} = 2\,419\,200 \text{ s}$$

La velocidad angular de la Luna es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\,419\,200 \text{ s}} = 8{,}27 \cdot 10^{-7}\pi \text{ rad/s} = \mathbf{2{,}60 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}}$$

La velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 2{,}60 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s} \cdot 3{,}85 \cdot 10^{8} \text{ m} = \mathbf{1000 \text{ m/s}}$$

La aceleración normal:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (2{,}60 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s})^2 \cdot 3{,}85 \cdot 10^{8} \text{ m} = \mathbf{2{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2}$$

79. Un disco de 25 cm de radio, inicialmente en reposo, gira con movimiento uniformemente acelerado alcanzando una velocidad de 100 rpm en 10 s. Calcula:

a) La aceleración angular del disco.

b) La velocidad lineal de un punto de la periferia del disco a los 5 s.

c) El módulo de la aceleración normal en ese momento.

a) Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0; \quad \omega = 100 \text{ rpm} = 100 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 3{,}\widehat{3}\pi \text{ rad/s}$$

Aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{3{,}\widehat{3}\pi \text{ rad/s}}{10 \text{ s}} = \mathbf{\frac{\pi}{3} \text{ rad/s}^2}$$

b) Para calcular la velocidad lineal de un punto de la periferia del disco a los 5 s necesitamos calcular la velocidad angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad \omega = \alpha \cdot t = \frac{\pi}{3} \text{rad/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = 1{,}\widehat{6}\pi \text{ rad/s}$$

Así, la velocidad lineal es:

$$v = \omega \cdot R = 1{,}\widehat{6}\pi \text{ rad/s} \cdot 0{,}25 \text{ m} = \mathbf{1{,}31 \text{ m/s}}$$

c) El módulo de la aceleración normal a los 5 s es:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = (1{,}\widehat{6}\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}25 \text{ m} = \mathbf{6{,}85 \text{ m/s}^2}$$

80. Un volante de 40 cm de radio parte del reposo y acelera durante 30 s hasta alcanzar una velocidad angular de 300 rpm. Después de girar 4 min con dicha velocidad angular, se aplica un freno durante 50 s hasta que el volante se para. Calcula la aceleración angular en el último tramo del recorrido, la aceleración normal 10 s después de aplicar el freno y el ángulo total girado.

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 300 \text{ rpm} = 300 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 10\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega_3 = 0 \text{ rad/s}$$

La aceleración angular del primer tramo es:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} = \frac{10\pi \text{ rad/s} - 0 \text{ rad/s}}{30 \text{ s}} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

La aceleración angular del último tramo es:

$$\alpha_3 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{\Delta t} = \frac{0\ \text{rad/s} - 10\pi\ \text{rad/s}}{50\,\text{s}} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{5}}\ \frac{\textbf{rad}}{\textbf{s}^2}$$

El signo negativo indica que la aceleración es de frenado.

Para calcular la aceleración normal a los 10 s de pisar el freno calculamos primero la velocidad angular del volante en ese momento:

$$\omega = \omega_2 + \alpha_3 \cdot t \quad \Rightarrow \quad \omega = 10\pi\ \text{rad/s} - \frac{\pi}{5}\text{rad/s} \cdot 10\ \text{s} = 8\pi\ \text{rad/s}$$

Así, la aceleración normal es:

$$a_\text{N} = \omega^2 \cdot R = (8\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}4\ \text{m} = \mathbf{252{,}66\ m/s^2}$$

Para calcular el ángulo total girado debemos analizar cada tramo por separado:

Primer tramo (MCUA):

$$t = 30\ \text{s}; \quad \omega_0 = 0\ \text{rad/s}; \quad \omega_1 = 10\pi\ \text{rad/s}; \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{3}\text{rad/s}^2$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 \cdot t^2 = 0\ \text{rad} + 0\ \text{rad/s} \cdot 30\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}\text{rad/s}^2 \cdot (30\ \text{s})^2 = 150\pi\ \text{rad}$$

Segundo tramo (MCU):

$$t = 4\ \text{min} = 240\ \text{s}; \quad \omega_1 = 10\pi\ \text{rad/s}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1 \cdot t = 150\pi\ \text{rad} + 10\pi\frac{\text{rad}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 240\ \cancel{\text{s}} = 2550\pi\ \text{rad}$$

Tercer tramo (MCUA):

$$t = 50\ \text{s}; \quad \omega_2 = 10\pi\ \text{rad/s}; \quad \omega_3 = 0\ \text{rad/s}; \quad \alpha_3 = -\frac{\pi}{5}\text{rad/s}^2$$

$$\theta_3 = \theta_2 + \omega_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha_3 \cdot t^2 = 2550\pi\ \text{rad} + 10\pi\ \text{rad/s} \cdot 50\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{5}\text{rad/s}^2 \cdot (50\ \text{s})^2 = 2800\pi\ \text{rad}$$

El ángulo total girado es **2800π rad** = **8796,46 rad** = **1400 vueltas**.

81. Un volante de 50 cm de radio parte del reposo y alcanza una velocidad angular de 300 rpm en 5 s. Calcula la aceleración tangencial y la velocidad lineal de un punto de su periferia a los 2 s de iniciado el movimiento.

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 0\ \text{rad/s}; \quad \omega = 300\ \text{rpm} = 300\frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}} = 10\pi\,\text{rad/s}$$

Para calcular la aceleración tangencial calculamos primero la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{10\pi\ \text{rad/s}}{5\ \text{s}} = 2\pi\ \text{rad/s}^2$$

La aceleración tangencial:

$$a_\text{T} = \alpha \cdot R = 2\pi\ \text{rad/s}^2 \cdot 0{,}5\ \text{m} = \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{m/s^2}$$

Para calcular la velocidad lineal calculamos primero la velocidad angular del volante a los 2 s:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad \omega = \alpha \cdot t = 2\pi\ \text{rad/s}^2 \cdot 2\ \text{s} = 4\pi\ \text{rad/s}$$

La velocidad lineal:

$$v = \omega \cdot R = 4\pi\ \text{rad/s} \cdot 0{,}5\ \text{m} = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\ \mathbf{m/s^2}$$

82. La velocidad angular de un motor que gira a 900 rpm desciende uniformemente hasta 10π rad/s después de dar 50 vueltas. Calcula la aceleración angular de frenado y el tiempo necesario para realizar las 50 revoluciones.

Expresamos las velocidades angulares en unidades del SI:

$$\omega_0 = 900 \text{ rpm} = 900 \frac{\cancel{\text{rev}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = 30\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = 10\pi \text{ rad/s}$$

Para calcular la aceleración angular y el tiempo necesario para realizar 50 vueltas, pasamos las 50 vueltas a radianes:

$$50 \cancel{\text{rev}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{rev}}} = 100\pi \text{ rad}$$

Y a partir de la siguiente expresión, que relaciona ω y θ en un MCUA, calculamos la aceleración angular:

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{2 \cdot \theta} = \frac{(10\pi \text{ rad/s})^2 - (30\pi \text{ rad/s})^2}{2 \cdot 100\pi \text{ rad}} = \mathbf{-4\pi \text{ rad/s}^2}$$

El signo negativo indica que la aceleración es de frenado.

Ahora calculamos el tiempo:

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{10\pi \text{ rad/s} - 30\pi \text{ rad/s}}{-4\pi \text{ rad/s}^2} = \mathbf{5 \text{ s}}$$

Movimiento armónico simple

83. Un objeto realiza un MAS. ¿Qué magnitudes son proporcionales entre sí? Elige la correcta.

a) La elongación y la velocidad.

b) La aceleración y la elongación.

La expresión de la velocidad en un MAS es:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

Por tanto, *v* y *x* no son directamente proporcionales.

La expresión de la aceleración de un MAS es:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left[\omega \cdot A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \phi_0\right)\right]}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = -\omega^2 \cdot x$$

Por tanto, la respuesta correcta en la b), ya que la aceleración y la elongación son magnitudes proporcionales entre sí, la constante de proporcionalidad es $-\omega^2$.

84. Estiramos un resorte 5 cm y lo dejamos oscilar libremente resultando que completa una oscilación cada 0,2 s.

a) La ecuación que nos permite conocer su posición en función del tiempo.

b) La velocidad y la aceleración a la que estará sometido su extremo libre a los 15 s de iniciado el movimiento.

a) El movimiento empieza en el punto de máxima elongación: $A = 0{,}05$ m. A partir del periodo calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2 \text{ s}} = 10\pi \text{ rad/s}$$

Con todos estos datos podemos expresar la posición en función del tiempo como

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)$$

Para $t = 0$, $x = A$:

$$A = A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot 0 + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{x = 5 \cdot \text{sen}\left(10\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm}}$$

b) La velocidad se obtiene derivando la expresión de la elongación con respecto al tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0)]}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad v = 10\pi \cdot 0{,}05 \cdot \cos\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s}$$

Para $t = 15$ s:

$$v = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(4\pi \cdot 15\ \text{s} + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{61\pi}{2}\right) = \mathbf{0\,m/s}$$

La aceleración se calcula derivando la expresión de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[\omega \cdot A \cdot \cos\,(\omega \cdot t + \phi_0)]}{dt} = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\,(\omega \cdot t + \phi_0) \quad \Rightarrow \quad a = -(10\pi)^2 \cdot 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s}^2$$

Para $t = 15$ s:

$$a = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(4\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m/s}^2 = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{61\pi}{2}\right)\text{m/s}^2 = \boldsymbol{-5\pi^2\ \text{m/s}^2}$$

El valor de la velocidad es cero, por lo que el cuerpo estará en alguno de los extremos (elongación máxima). El valor de la aceleración correspondiente es el máximo. Como la aceleración es de valor negativo, resulta que el resorte estará próximo a su elongación máxima.

ACTIVIDADES FINALES (página 246)

85. Un móvil realiza un movimiento armónico simple en el extremo de un muelle realizando dos oscilaciones por segundo, siendo la amplitud del movimiento 20 cm.

a) La velocidad máxima que llega a alcanzar la masa que oscila.

b) La aceleración de la masa al pasar por el extremo del movimiento vibratorio armónico.

a) Calculamos la frecuencia angular a partir de la frecuencia de oscilación determinada en el enunciado:

$$f = \frac{2\ \text{ciclos}}{1\ \text{s}} = 2\ \text{Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 2\ \text{Hz} = 4\pi\ \text{rad/s}$$

La velocidad máxima a la que se mueve la masa puede obtenerse a partir de:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A = 4\pi\ \text{rad/s} \cdot 0{,}02\ \text{m} = \boldsymbol{\frac{4\pi}{5}\ \text{m/s}}$$

b) La aceleración a la que se mueve el MAS se calcula así:

$$a = -\omega^2 \cdot x = -\omega^2 \cdot A = (4\pi\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}02\ \text{m} = \boldsymbol{\frac{16\pi^2}{5}\ \text{m/s}^2}$$

86. Una partícula recorre de extremo a extremo en un movimiento armónico simple 8 cm y su aceleración máxima es 48 m/s². Calcula:

a) La frecuencia y el periodo del movimiento.

b) La velocidad máxima de la partícula.

a) La aceleración máxima de un MAS se puede obtener a partir de: $a = -\omega^2 \cdot A$. Su elongación máxima es $A = 4$ cm, la mitad del recorrido de extremo a extremo. La frecuencia angular del MAS:

$$a = -\omega^2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\left|\frac{a}{A}\right|} = \sqrt{\frac{48\ \text{m/s}^2}{0{,}04\ \text{m}}} = 20\sqrt{3}\ \text{rad/s}$$

Como $\omega = 2\pi \cdot f$, despejando la frecuencia y sustituyendo, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\sqrt{3}\ \text{rad/s}}{2\pi} = \frac{\mathbf{10\sqrt{3}}}{\boldsymbol{\pi}}\ \mathbf{Hz}$, el periodo es el inverso de la frecuencia: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{10\sqrt{3}}{\pi}\text{Hz}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{10\sqrt{3}}}\ \mathbf{s}$

b) La velocidad máxima de una partícula es:

$$v_{\text{máx}} = |\omega \cdot A| = \left|\sqrt{\left|\frac{a}{A}\right|} \cdot A\right| = \left|\sqrt{|a \cdot A|}\right| = \left|\sqrt{\left|48\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}04\ \text{m}\right|}\right| = \frac{\mathbf{4\sqrt{3}}}{\mathbf{5}}\ \mathbf{m/s}$$

87. Calcula la aceleración y la velocidad en el instante inicial, $t = 0$ s, para un muelle cuyo movimiento viene descrito por la ecuación:

$$\boldsymbol{x(t) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{cm}}$$

La ecuación de la posición es:

$$x(t) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2\ t + \frac{\pi}{6}\right)\text{cm}$$

En el instante $t = 0$ s.

$$x(t = 0\ \text{s}) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{cm} = 0{,}26\ \text{m}$$

La velocidad se obtiene derivando la posición con respecto al tiempo:

$$v = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = -2 \cdot 0{,}3 \cdot \text{sen}\left(2\ t + \frac{\pi}{6}\right)\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

En el instante $t = 0$ s.

$$v(t = 0\ \text{s}) = -0{,}6 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = -0{,}6 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathbf{-0{,}3\ \frac{cm}{s}}$$

La aceleración se obtiene derivando la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\text{d}v}{\text{d}t} = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = -\omega^2 \cdot x$$

En el instante $t = 0$ s.

$$a(t = 0\ \text{s}) = -\omega^2 \cdot x(t = 0\ \text{s})$$

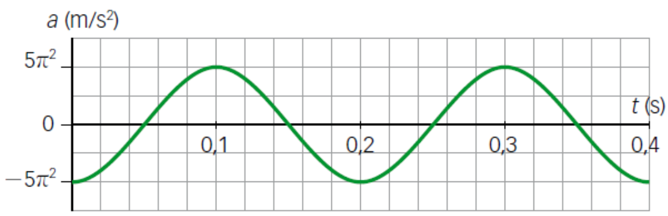
$$x(t = 0\ \text{s}) = 0{,}3 \cdot \cos\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{20}\ \text{cm}$$

$$a(t = 0\ \text{s}) = -\left(2\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{20}\ \text{cm} = \mathbf{-\frac{3\sqrt{6}}{5}\ \frac{cm}{s^2}}$$

88. Un móvil oscila según un MAS en torno al origen en la dirección del eje *OX*. En el dibujo se representa la aceleración del móvil en función del tiempo.

a) La ecuación de la elongación.

b) Determina la velocidad inicial.



De la gráfica extraemos los siguientes datos:

$$T = 0{,}2\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2\ \text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$

$$a_{\text{máx}} = 5\pi^2\ \text{m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad a_{\text{máx}} = A \cdot \omega^2 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_{\text{máx}}}{\omega^2} = \frac{5\pi^2\ \text{m/s}^2}{(10\pi\ \text{rad/s})^2} = 0{,}05\ \text{m}$$

Escribimos la ecuación de la aceleración en función del tiempo:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) = -(10\pi)^2 \cdot 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \phi_0\right)\ \text{m/s}^2$$

$$a(t) = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \phi_0\right)\ \text{m/s}^2$$

Para $t = 0$ s:

$$a(t = 0\ \text{s}) = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\left(10\pi \cdot 0 + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad -5\pi^2 = -5\pi^2 \cdot \text{sen}\ \phi_0 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la aceleración es:

$$a(t) = \mathbf{-5\pi^2 \cdot sen\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right) \frac{m}{s^2}}$$

a) La ecuación de la elongación será:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t + \phi_0\right) \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m}$$

Expresada en cm:

$$\boldsymbol{x(t) = 5 \cdot \text{sen}\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{cm}}$$

b) La ecuación de la velocidad será:

$$v(t) = \frac{\text{d}x}{\text{d}t} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(10\pi\ t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{m/s}$$

Para $t = 0$ s:

$$v(t) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(10\pi \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \mathbf{0\ \frac{m}{s}}$$

89. Un objeto está unido a un muelle horizontal y realiza un MAS sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 5 cm y una frecuencia de 3,3 Hz. Determina:

a) El periodo del movimiento.

b) La velocidad máxima y la aceleración máxima.

a) El dato de la frecuencia nos permite conocer el periodo, *T:*

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3{,}3\ \text{Hz}} = 0{,}30\ \text{s} = \mathbf{0{,}3\,s}$$

b) Calculamos ω a partir del dato del periodo, según:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}30\ \text{s}} = 20{,}73\ \text{rad/s}$$

La velocidad máxima en un MAS es:

$$v_{\text{máx}} = \omega \cdot A = 20{,}73\ \text{rad/s} \cdot 0{,}05\ \text{m} = \mathbf{1{,}04\ m/s}$$

La aceleración máxima en un MAS es:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 \cdot A = (20{,}73\ \text{rad/s})^2 \cdot 0{,}05\ \text{m} = \mathbf{21{,}5\ m/s}$$

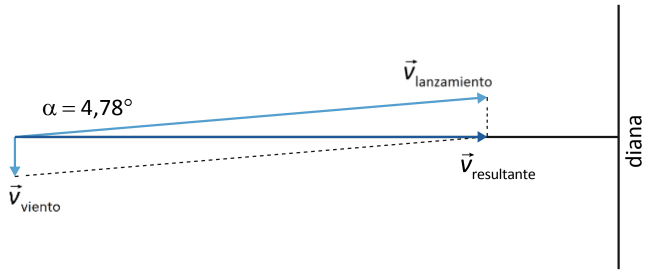
Ampliación (página 246)

90. **En un concurso de tiro con arco la velocidad del viento es de 30 km/h. Si el viento sopla perpendicularmente a la dirección en la que se van a hacer los tiros, halla el ángulo con el que hay que tirar para acertar en el blanco si la velocidad de la flecha es de 100 m/s. Toma como origen de la medida de ángulos la línea que une el blanco con el arquero.**

Pasamos la velocidad a unidades del SI:

$$v_{\text{viento}} = 30\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 8{,}\widehat{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad final de la flecha, $\vec{v}_{\text{resultante}}$, debe tener la dirección del blanco, y es la suma de la velocidad del lanzamiento, $\vec{v}_{\text{lanzamiento}}$, y la del viento, $\vec{v}_{\text{viento}}$. En este caso no vamos a tener en cuenta la ligera caída de la fecha en su recorrido al centro de la diana. En el siguiente esquema se representa la suma vectorial de las velocidades implicadas (visión cenital).



Por trigonometría, calculamos el ángulo α:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{|\vec{v}_{\text{viento}}|}{|\vec{v}_{\text{lanzamiento}}|} = \frac{8{,}\widehat{3}\ \cancel{\text{m/s}}}{100\ \cancel{\text{m/s}}} = 0{,}08\widehat{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \mathbf{4{,}78°}$$

Es decir, hay que orientar el arco de manera que apunte con una desviación de **4,78°** contra el lado del que viene el viento.

91. **Un avión, que vuela horizontalmente a 100 m de altura con una velocidad de 100 m/s, deja caer un paquete con ayuda humanitaria sobre la cubierta de un barco que se mueve con una velocidad de 25 km/h. Calcula la distancia del portaviones al avión, medida horizontalmente, a la que hay que soltar la carga si:**

a) El avión y el portaaviones se mueven en la misma dirección y sentido.

b) El avión y el portaaviones se mueven en la misma dirección y sentido contrario.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

Expresamos la velocidad inicial del portaaviones en unidades de

$$v_{0,\text{portaaviones}} = 25\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}} = 6{,}9\widehat{4}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) Escribimos las ecuaciones de movimiento del paquete:

$$\begin{cases} x_{\text{paquete}} = x_{0,\text{paquete}} + v_{0,x,\text{paquete}}\cdot t = v_{0,x,\text{paquete}}\cdot t \\ y_{\text{paquete}} = y_{0,\text{paquete}} + v_{0,y,\text{paquete}}\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = y_{0,\text{paquete}} - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{cases}$$

Y la del portaaviones:

$$x_{\text{portaaviones}} = x_{0,\text{portaaviones}} + v_{0,x,\text{portaaviones}}\cdot t$$

Calculamos el tiempo de vuelo del paquete haciendo $y_{\text{paquete}} = 0$ m (cuando llega al suelo):

$$0 = y_{0,\text{paquete}} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \quad\Rightarrow\quad y_{0,\text{paquete}} = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Para que el paquete caiga sobre el portaaviones, $x_{paquete}$ ha de ser igual a $x_{portaaviones}$:

$$x_{paquete} = x_{portaaviones} \Rightarrow v_{0,x,paquete} \cdot t = x_{0,portaaviones} + v_{0,x,portaaviones} \cdot t$$

$$x_{0,portaaviones} = \left(v_{0,x,paquete} - v_{0,x,portaaviones}\right) \cdot t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_{0,paquete}}{g}} \sqrt{\frac{2 \cdot 100\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 4{,}52\ \text{s}$$

Para $t = 4{,}52$ s:

$$x_{0,portaaviones} = \left(100\ \text{m/s} - 6{,}94\ \text{m/s}\right) \cdot 4{,}52\ \text{s} = \mathbf{420{,}38\ m}$$

b) Si el portaaviones se mueve en la misma dirección y sentido contrario que el avión, reescribimos la ecuación de movimiento:

$$x_{portaaviones} = x_{0,portaaviones} - v_{0,x,portaaviones} \cdot t$$

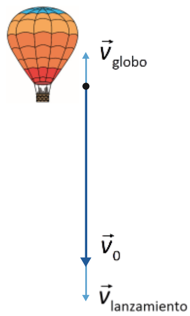
Como el tiempo de vuelo del paquete es el mismo, igualamos las posiciones y resolvemos como en el apartado anterior:

$$x_{paquete} = x_{portaaviones} \Rightarrow v_{0,x,paquete} \cdot t = x_{0,portaaviones} - v_{0,x,portaaviones} \cdot t$$
$$x_{0,portaaviones} = \left(v_{0,x,paquete} + v_{0,x,portaaviones}\right) \cdot t$$

Para $t = 4{,}52$ s:

$$x_{0,portaaviones} = \left(100\ \text{m/s} + 6{,}94\ \text{m/s}\right) \cdot 4{,}52\ \text{s} = \mathbf{483{,}13\ m}\ .$$

92. Desde un globo que asciende a una velocidad de 5 m/s, en el momento en que el globo está a 30 m de altura se lanza verticalmente hacia abajo un cuerpo con una velocidad inicial respecto al globo de 20 m/s. Calcula el tiempo que tarda el cuerpo en caer al suelo.



Como el globo asciende a una velocidad de 5 m/s en sentido contrario al lanzamiento, la velocidad relativa inicial del cuerpo es:

$$v_{lanz} - v_{globo} = 20\ \text{m/s} - 5\ \text{m/s} = 15\ \text{m/s} = v_0$$

Escribimos la ecuación de movimiento y hacemos $y = 0$ m para calcular el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo:

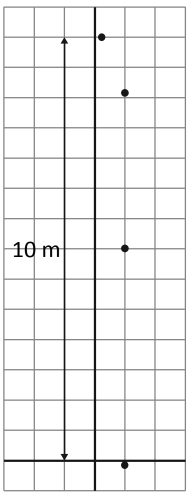
$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = 30\ \text{m} - 15\ \text{m/s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

$$4{,}9\ t^2 + 15\ t - 30 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos dos soluciones: $t_1 = -4{,}45$ s y $t_2 = 1{,}38$ s.

La primera de ellas no es una solución posible (no existen tiempos negativos), por tanto, el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo es: $t_c =$ **1,38 s**.

93. Un recipiente lleno de agua tiene un orificio por el que escapa una media de dos gotas de agua por segundo. Si se coloca el recipiente a una altura de 10 m sobre el suelo, indica la posición de las gotas que se encuentren en el aire cuando comienza a caer una gota cualquiera. Dato: $g = 9{,}8$ m/s².



En primer lugar veamos cuánto tiempo tarda una gota en llegar al suelo ($y = 0$ m):

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 1{,}43\ \text{s}$$

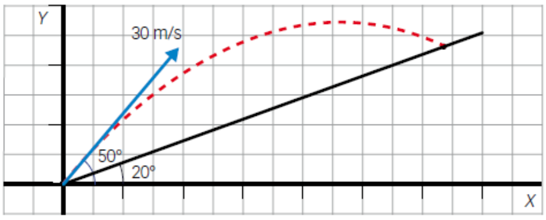
Como cada 0,5 s cae una gota, cuando comienza a caer una nueva gota ($t = 0$ s) tendremos solo dos gotas en el aire ($t = 0{,}5$ s y $t = 1$ s, respectivamente), ya que la anterior a estas ($t = 1{,}5$ s) ya habría alcanzado el suelo. La posición de cada gota viene dada por:

$$y(t = 0\ \text{s}) = y_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \mathbf{10\ m}$$

$$y(t=0,5\ \text{s}) = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = 10\ \text{m} - \frac{1}{2}\cdot 9,8\ \text{m/s}^2\cdot(0,5\ \text{s})^2 = \mathbf{8,77\ m}$$

$$y(t=1\ \text{s}) = y_0 - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = 10\ \text{m} - \frac{1}{2}\cdot 9,8\ \text{m/s}^2\cdot(1\ \text{s})^2 = \mathbf{5,1\ m}$$

94. Se lanza un cuerpo con una velocidad de 30 m/s y ángulo de 50° con la horizontal desde la base de un plano inclinado 20°. Halla la ecuación de la trayectoria del cuerpo y a qué distancia desde el origen el cuerpo impacta sobre el plano inclinado. Dato: g = 9,8 m/s².



Escribimos las componentes de la ecuación de movimiento:

$$\begin{cases} x = v_{0x}\cdot t = v_0\cdot\cos\alpha\cdot t \\ y = v_{0y}\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = v_0\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot t - \dfrac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \end{cases}$$

Para obtener la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo. Despejamos en la primera:

$$x = v_0\cdot\cos\alpha\cdot t \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{v_0\cdot\cos\alpha}$$

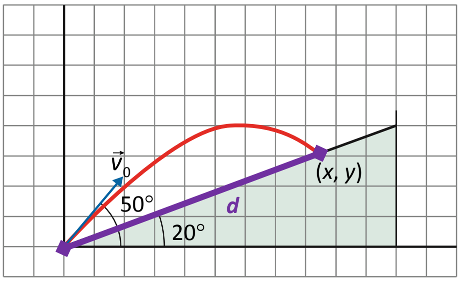
Y sustituimos en la segunda:

$$y = v_0\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = v_0\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\frac{x}{v_0\cdot\cos\alpha} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2$$

$$y = \text{tg}\,\alpha\cdot x - \frac{g}{2\cdot v_0^2\cdot\cos^2\alpha}\cdot x^2 = \text{tg}\,50°\cdot x - \frac{9,8\ \text{m/s}^2}{2\cdot(30\ \text{m/s})^2\cdot\cos^2 50°}\cdot x^2$$

La ecuación de la trayectoria del cuerpo es:

$$\mathbf{y = 1,19\cdot x - 0,013\cdot x^2}$$



Para calcular el punto del plano inclinado donde va impactar el cuerpo, en primer lugar necesitamos conocer la ecuación del plano inclinado (ecuación de una recta):

$$y = \text{m}\cdot x = \text{tg}\,\beta\cdot x = \text{tg}\,20°\cdot x = 0,36\cdot x$$

A continuación resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 1,19\cdot x - 0,013\cdot x^2 \Rightarrow \text{Ecuación de la trayectoria} \\ y = 0,36\cdot x \qquad\qquad\quad \Rightarrow \text{Ecuación del plano} \end{cases}$$

$$0,36\cdot x = 1,19\cdot x - 0,013\cdot x^2 \quad\Rightarrow\quad 0,013\cdot x^2 = 0,83\cdot x \quad\Rightarrow\quad x = 62,82\ \text{m}$$

$$y = 0,36\cdot x = 0,36\cdot 62,82 = 22,86 \quad\Rightarrow\quad y = 22,86\ \text{m}$$

Por tanto, la distancia sobre el plano es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(62,82\ \text{m})^2 + (22,86\ \text{m})^2} = \mathbf{66,85\ m}$$

95. Dos partículas tienen un MAS sobre la misma trayectoria con la misma frecuencia y amplitud. Si se cruzan en el centro de la trayectoria, la diferencia de fase entre ellas será: (Elige la opción correcta).

a) π**/2 rad** **b)** π**/2 rad** **c)** **3**π**/2 rad** **d)** π**/4 rad**

La respuesta correcta es la b), ya que en un movimiento gobernado por una función senoidal esto equivale a un desfase de 180° (invertir el signo) y, por tanto, se cruzarán en los mismos puntos con sentido de avance opuesto.

FÍSICA EN TU VIDA (página 248)

INTERPRETA

La tabla muestra las características de algunos saltos de longitud.

	Atleta	Velocidad (m/s)	Ángulo (°)	Marca (m)
HOMBRES	Mike Powell	9,8	23,2	8,95
	Carl Lewis	10,0	18,7	8,79
MUJERES	Heike Dresler	9,4	15,6	7,13
	Jackie Joyner	8,5	22,1	7,12

1. ¿Cuál fue la velocidad horizontal de Mike Powell en el momento de la batida?

Calculamos la componente horizontal del vector velocidad:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha = 9{,}8\ \text{m/s} \cdot \cos 23{,}2° = \mathbf{9{,}01\ m/s}$$

2. ¿Una mayor velocidad implica siempre un mayor alcance?

Escribimos la expresión del alcance:

$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \cdot \text{sen}\, 2\alpha}{g}$$

De ella podemos deducir que el alcance depende tanto de la velocidad inicial como del ángulo de salto. Por tanto, una mayor velocidad no implica siempre un salto más largo, hay que tener en cuenta también el ángulo con el que salta el atleta.

3. Calcula la velocidad vertical y horizontal de cada atleta. ¿Quién se impulsó más verticalmente durante la batida, Lewis o Powell, Dresler o Joyner?

Calculamos las velocidades aplicando las ecuaciones correspondientes a las componentes *x* e *y* de la velocidad:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

De este modo obtenemos:

	Atleta	v_{0x} (m/s)	v_{0y} (m/s)
HOMBRES	Mike Powell	9,01	3,86
	Carl Lewis	9,47	3,21
MUJERES	Heike Dresler	9,05	2,53
	Jackie Joyner	7,88	3,20

Verticalmente el atleta que más se impulsó fue Powell.

REFLEXIONA

4. Si calculas la distancia del salto de Powell con la fórmula para el alcance, se obtiene algo más de 7 m (referido al centro de gravedad del atleta). Identifica esta distancia en el esquema de arriba.

a) ¿El centro de gravedad del atleta se encuentra a la misma altura durante la batida que en la caída?

b) Explica entonces la marca de 8,95 m.

Los 7 m corresponden a la suma de $L_1 + L_2 + L_3 + L_4$.

a) No, el centro de gravedad del atleta se encuentra más bajo en la caída que en la batida.

b) El motivo por el que no coincide la marca de la tabla con el alcance calculado con la fórmula es que en la marca se tiene como referencia los pies del atleta y la fórmula considera el centro de gravedad.

OPINA

5. ¿Qué te parecen las fuertes medidas contra el dopaje que hacen que algunos récords del mundo de atletismo sobrevivan muchos años?

En la respuesta se debe tener en cuenta, por un lado, que las competiciones deportivas deben ser objetivas y, por otro, las graves consecuencias que provoca el consumo de sustancias que alteran la salud de las personas.

Por tanto, las medidas contra el dopaje son necesarias, y no tiene sentido batir un récord mundial gracias a haber consumido algún tipo de sustancia, debiéndose penalizar siempre esta clase de actuaciones.