3 POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

Página 66

PARA EMPEZAR, REFLEXIONA Y RESUELVE

Múltiplos y divisores

1. Haz la división:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 20 \;\; \underline{|\, x^2 + 5 \;}$$

A la vista del resultado, di dos divisores del polinomio $x^3 - 4x^2 + 5x - 20$.

$(x^3 - 4x^2 + 5x - 20) : (x^2 + 5) = x - 4$

Los polinomios $x - 4$ y $x^2 + 5$ son dos divisores de $x^3 - 4x^2 + 5x - 20$.

2. Al multiplicar $x^2 - 5x + 4$ por x, obtenemos $x^3 - 5x^2 + 4x$.

Por tanto, podemos decir que el polinomio $x^3 - 5x^2 + 4x$ es múltiplo de $x^2 - 5x + 4$.

Procediendo análogamente, di otros dos múltiplos de $x^2 - 5x + 4$, uno de tercer grado y otro de cuarto grado.

- De tercer grado: Por ejemplo $(x^2 - 5x + 4) \cdot (x - 1) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
- De cuarto grado: Por ejemplo $(x^2 - 5x + 4) \cdot x^2 = x^4 - 5x^3 + 4x^2$

Página 67

Descomposición en factores

3. Comprueba, efectuando las divisiones, la validez de las siguientes descomposiciones:

a) $x^5 - x^3 = x^3(x + 1)(x - 1)$

b) $x^5 + x^3 = x^3(x^2 + 1)$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - x^3 & x \\ \hline
0 & x^4 - x^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^2 & x \\ \hline
0 & x^3 - x
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^3 - x & x \\ \hline
0 & x^2 - 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^2 \qquad - 1 & x + 1 \\ \hline
-x^2 - x & x - 1 \\ \hline
-x - 1 & \\
x + 1 & \\ \hline
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x - 1 & x - 1 \\ \hline
0 & 1
\end{array}$$

Por tanto: $x^5 - x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-1) = x^3(x+1)(x-1)$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 + x^3 & x \\
\hline
0 & x^4 + x^2
\end{array}
\quad
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^2 & x \\
\hline
0 & x^3 + x
\end{array}
\quad
\begin{array}{l|l}
x^3 + x & x \\
\hline
0 & x^2 + 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{l|l}
x^2 + 1 & x^2 + 1 \\
\hline
0 & 1
\end{array}$$

Por tanto: $x^5 + x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot (x^2+1) = x^3(x^2+1)$

Fracciones algebraicas

4. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{12a^2bc^3}{3ab^2c^2}$ **b)** $\dfrac{5xyz^2}{20x^2z}$ **c)** $\dfrac{14x^2 - 7x}{7x}$

d) $\dfrac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9}$ **e)** $\dfrac{2x^2 - 6x}{6x^2 - 54}$ **f)** $\dfrac{x^2 + 18x + 81}{x^2 - 81}$

a) $\dfrac{12a^2bc^3}{3ab^2c^2} = \dfrac{4ac}{b}$

b) $\dfrac{5xyz^2}{20x^2z} = \dfrac{yz}{4x}$

c) $\dfrac{14x^2 - 7x}{7x} = \dfrac{14x^2}{7x} - \dfrac{7x}{7x} = 2x - 1$

d) $\dfrac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9} = \dfrac{(2x+3)(2x-3)}{(2x-3)^2} = \dfrac{2x+3}{2x-3}$

e) $\dfrac{2x^2 - 6x}{6x^2 - 54} = \dfrac{2x(x-3)}{6(x-3)(x+3)} = \dfrac{x}{3(x+3)} = \dfrac{x}{3x+9}$

f) $\dfrac{x^2 + 18x + 81}{x^2 - 81} = \dfrac{(x+9)^2}{(x+9) \cdot (x-9)} = \dfrac{x+9}{(x-9)}$

Página 69

1. Calcula:

a) $\boldsymbol{(x^2 + x + 1) \cdot (x + 1)}$ **b)** $\boldsymbol{(3x^3 - 5x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x - 3)}$

c) $\boldsymbol{(x^3 - 3x + 1) \cdot (x^2 + 2x - 1)}$ **d)** $\boldsymbol{(x^4 - 3x^3 + x^2 + 1) \cdot (2x^3 + x - 2)}$

a)
$$\begin{array}{rrrr}
 & x^2 + & x & + 1 \\
 & & x & + 1 \\
\hline
 & x^2 + & x & + 1 \\
x^3 + & x^2 + & x & \\
\hline
x^3 + & 2x^2 + & 2x & + 1
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 - & 5x^2 + & 2x & - 3 \\
 & & & x^2 - & 2x & - 3 \\
\hline
 & & -9x^3 + & 15x^2 - & 6x & + 9 \\
 & -6x^4 + & 10x^3 - & 4x^2 & & + 6 \\
3x^5 - & 5x^4 + & 2x^3 - & 3x^2 & & \\
\hline
3x^5 - & 11x^4 + & 3x^3 + & 8x^2 & & + 9
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r}
x^3 \qquad - 3x + 1 \\
x^2 + 2x - 1 \\
\hline
-x^3 \qquad + 3x - 1 \\
2x^4 \qquad - 6x^2 + 2x \qquad \\
x^5 \qquad - 3x^3 + x^2 \qquad\qquad \\
\hline
x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r}
x^4 - 3x^3 + x^2 \qquad + 1 \\
2x^3 \qquad + x - 2 \\
\hline
-2x^4 + 6x^3 - 2x^2 \qquad - 2 \\
x^5 - 3x^4 + x^3 \qquad + x \qquad \\
2x^7 - 6x^6 + 2x^5 \qquad + 2x^3 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
2x^7 - 6x^6 + 3x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 2x^2 + x - 2
\end{array}$$

2. **Calcula:**

a) $(x^2 + x + 1)^2$

b) $(2x^2 - 3x + 5)^2$

c) $(x - 1)^2$

d) $(x + 1)^3$

e) $(3x^2 - x + 2)(-x - 2)\,x$

f) $(x^2 + 3x)(x^2 - 3x)$

a)
$$\begin{array}{r}
x^2 + x + 1 \\
x^2 + x + 1 \\
\hline
x^2 + x + 1 \\
x^3 + x^2 + x \qquad \\
x^4 + x^3 + x^2 \qquad\qquad \\
\hline
x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r}
2x^2 - 3x + 5 \\
2x^2 - 3x + 5 \\
\hline
10x^2 - 15x + 25 \\
-6x^3 + 9x^2 - 15x \qquad \\
4x^4 - 6x^3 + 10x^2 \qquad\qquad \\
\hline
4x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 30x + 25
\end{array}$$

c) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

d) $(x + 1)^3 = (x + 1)^2\,(x + 1) = (x^2 + 2x + 1)\,(x + 1)$

$$\begin{array}{r}
x^2 + 2x + 1 \\
x + 1 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 \\
x^3 + 2x^2 + x \qquad \\
\hline
x^3 + 3x^2 + 3x + 1
\end{array}$$

e) $(3x^2 - x + 2)(-x - 2)\,x = (3x^2 - x + 2)(-x^2 - 2x)$

$$\begin{array}{r}
3x^2 - x + 2 \\
-x^2 - 2x \qquad \\
\hline
-6x^3 + 2x^2 - 4x \\
-3x^4 + x^3 - 2x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-3x^4 - 5x^3 \qquad - 4x
\end{array}$$

f) $(x^2 + 3x)(x^2 - 3x) = x^4 - 9x^2$

3. **Un polinomio $A(x)$ es de tercer grado y un polinomio $B(x)$ es de segundo grado. ¿Cuál es el grado del polinomio $A(x) \cdot B(x)$?**

$A(x) \cdot B(x)$ es de quinto grado.

4. **Completa estas multiplicaciones:**

a)

$$
\begin{array}{r}
\square x^3 + \square x^2 + \square x + \square \\
x^2 - 2x - 1 \\
\hline
\square x^3 + \square x^2 + \square x + \square \\
\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 + \square x \quad\; \\
\square x^5 + \square x^4 + \square x^3 + \square x^2 \qquad\qquad \\
\hline
\square x^5 + \square x^4 + 5x^3 + 13x^2 - x - 2
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r}
\square x^2 + \square x + \square \\
\square x + \square \\
\hline
\square x^2 - 21x + \square \\
\square x^3 + 7x^2 + \square x \quad\; \\
\hline
x^3 + 4x^2 - 16x - 15
\end{array}
$$

a)

$$
\begin{array}{r}
2x^3 - 5x^2 - 3x + 2 \\
x^2 - 2x - 1 \\
\hline
-2x^3 + 5x^2 + 3x - 2 \\
-4x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 4x \quad\; \\
2x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 \qquad\qquad \\
\hline
2x^5 - 9x^4 + 5x^3 + 13x^2 - x - 2
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r}
x^2 + 7x + 5 \\
x - 3 \\
\hline
-3x^2 - 21x - 15 \\
x^3 + 7x^2 + 5x \quad\; \\
\hline
x^3 + 4x^2 - 16x - 15
\end{array}
$$

Página 70

1. **Efectúa la división:**

$$P(x) = x^5 - 6x^3 - 25x$$

entre

$$Q(x) = x^2 + 3x$$

$$
\begin{array}{llllll|l}
x^5 & & -6x^3 & & -25x & & x^2 + 3x \\
\cline{7-7}
-x^5 & -3x^4 & & & & & x^3 - 3x^2 + 3x - 9 \\
\cline{1-2}
 & -3x^4 & & & & & \\
 & 3x^4 & +9x^3 & & & & \\
\cline{2-3}
 & & 3x^3 & & & & \\
 & & -3x^3 & -9x^2 & & & \\
\cline{3-4}
 & & & -9x^2 & & & \\
 & & & 9x^2 & +27x & & \\
\cline{4-5}
 & & & & 2x & &
\end{array}
$$

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

Resto: $2x$

2. **Calcula el cociente y el resto:**

$$(6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5) : (3x^2 - 3x - 1)$$

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & +9x^4 & -7x^3 & +7x^2 & -8x & +5 & 3x^2 - 3x - 1 \\ \cline{7-7}
-6x^5 & +6x^4 & +2x^3 & & & & 2x^3 + 5x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{22}{3} \\ \cline{1-3}
 & 15x^4 & -5x^3 & & & & \\
 & -15x^4 & +15x^3 & +5x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 10x^3 & +12x^2 & & & \\
 & & -10x^3 & +10x^2 & +\frac{10}{3}x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 22x^2 & -\frac{14}{3}x & & \\
 & & & -22x^2 & +22x & +\frac{22}{3} & \\ \cline{4-6}
 & & & & \frac{52}{3}x & +\frac{37}{3} &
\end{array}$$

3. **Completa:**

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\square\, x^4 & +\square\, x^3 & +\square\, x^2 & -3x & +\square & x^3 - 2x^2 + \square\, x + \square \\ \cline{6-6}
\square\, x^4 & +\square\, x^3 & -2x^2 & +6x & & 2x + \square \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & -x^2 & +\square\, x & +\square & \\
 & \square\, x^3 & +\square\, x^2 & +\square\, x & +\square & \\ \cline{2-5}
 & & \square\, x^2 & +\square\, x & +2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & +x^2 & -3x & -7 & x^3 - 2x^2 + x - 3 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & +6x & & 2x + 3 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & -x^2 & +3x & -7 & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & -3x & +9 & \\ \cline{2-5}
 & & 5x^2 & & +2 &
\end{array}$$

Página 71

4. **En una división de polinomios, el dividendo es de grado cinco y el divisor de grado dos.**

¿Cuál es el grado del cociente? ¿Qué puedes decir del grado del resto

El cociente es de grado tres. El resto es de grado inferior a dos.

5. **a) ¿Cuánto han de valer a y b para que la siguiente división sea exacta?**

$$(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 1)$$

b) ¿Cuánto han de valer a y b para que el resto de la división sea $3x - 7$?

a)

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 5x^3 + 3x^2 \qquad + ax \qquad + b & x^2 - 5x + 1 \\ \hline -x^4 + 5x^3 - x^2 & x^2 + 2 \\ \hline \qquad 2x^2 \qquad + ax \qquad + b & \\ \qquad -2x^2 \qquad + 10x \qquad - 2 & \\ \hline \qquad (10 + a)x + (b - 2) & \end{array}$$

Para que la división sea exacta, debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} 10 + a = 0 \\ b - 2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -10 \\ b = 2 \end{array}$$

b) Para que el resto sea $3x - 7$, debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} 10 + a = 3 \\ b - 2 = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -7 \\ b = -5 \end{array}$$

6. Expresa el resultado de las siguientes divisiones en la forma $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$:

a) $\frac{x + 9}{x + 6}$

b) $\frac{x + 6}{x + 9}$

c) $\frac{2x + 3}{2x}$

d) $\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x + 2}$

e) $\frac{3x^2 - 4}{x + 1}$

f) $\frac{x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x - 2}$

g) $\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4x - 1}$

h) $\frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 2}{x + 2}$

a)

$$\begin{array}{r|l} x + 9 & x + 6 \\ \hline -x - 6 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \frac{x + 9}{x + 6} = 1 + \frac{3}{x + 6}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} x + 6 & x + 9 \\ \hline -x - 9 & 1 \\ \hline -3 & \end{array} \qquad \frac{x + 6}{x + 9} = 1 + \frac{-3}{x + 9}$$

c) $\frac{2x + 3}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{3}{2x} = 1 + \frac{3}{2x}$

d)

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x + 5 & x^2 + 2x + 2 \\ \hline -x^2 - 2x - 2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 2x + 2} = 1 + \frac{3}{x^2 + 2x + 2}$$

e)

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & & -4 & x+1 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -3x & & 3x-3 \\ \cline{1-3}
 & -3x & -4 & \\
 & 3x & +3 & \\ \cline{2-3}
 & & -1 &
\end{array}
\qquad
\frac{3x^2-4}{x+1} = 3x - 3 + \frac{-1}{x+1}
$$

f)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & +2x & +1 & x^2+5x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -5x^2 & +2x & & x-6 \\ \cline{1-4}
 & -6x^2 & +4x & +1 & \\
 & 6x^2 & +30x & -12 & \\ \cline{2-4}
 & & 34x & -11 &
\end{array}
\qquad
\frac{x^3-x^2+2x+1}{x^2+5x-2} = x - 6 + \frac{34x-11}{x^2+5x-2}
$$

g)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & +3x^2 & +2x & +3 & x^2+4x-1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & -4x^3 & +x^2 & & & x^2-4x+20 \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +4x^2 & +2x & +3 & \\
 & 4x^3 & +16x^2 & -4x & & \\ \cline{2-5}
 & & 20x^2 & -2x & +3 & \\
 & & -20x^2 & -80x & +20 & \\ \cline{3-5}
 & & & -82x & +23 &
\end{array}
$$

$$\frac{x^4+3x^2+2x+3}{x^2+4x-1} = x^2 - 4x + 20 + \frac{-82x+23}{x^2+4x+20}$$

h)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & +4x^2 & -5x & +2 & x+2 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2-2x-1 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & -5x & +2 & \\
 & 2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & -x & +2 & \\
 & & x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 4 &
\end{array}
\qquad
\frac{3x^3+4x^2-5x+2}{x+2} = 3x^2 - 2x - 1 + \frac{4}{x+2}
$$

Página 72

1. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

d) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

a)

	1	–3	2	4
–1		–1	4	–6
	1	–4	6	–2

Cociente: $x^2 - 4x + 6$

Resto: -2

b)

	5	14	–5	–4	5	–2
–3		–15	3	6	–6	3
	5	–1	–2	2	–1	1

Cociente: $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

Resto: 1

c)

	2	0	–15	–8
3		6	18	9
	2	6	3	1

Cociente: $2x^2 + 6x + 3$

Resto: 1

d)

	1	0	1	0	1
–1		–1	1	–2	2
	1	–1	2	–2	3

Cociente: $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Resto: 3

2. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a) $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) : (x - 2)$

b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

c) $(4x^3 + 4x^2 - 5x + 3) : (x + 1)$

d) $(2{,}5x^3 + 1{,}5x^2 - 3{,}5x - 4{,}5) : (x - 1)$

a)

	2	1	0	–5	–3
2		4	10	20	30
	2	5	10	15	27

Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 10x + 15$

Resto: 27

b)

	1	0	0	0	0	–32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

Cociente: $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$

Resto: 0

c)

	4	4	–5	3
–1		–4	0	5
	4	0	–5	8

Cociente: $4x^2 - 5$

Resto: 8

d)

	2,5	1,5	–3,5	–4,5
1		2,5	4	0,5
	2,5	4	0,5	–4

Cociente: $2{,}5x^2 + 4x + 0{,}5$

Resto: -4

Página 74

1. Para el mismo polinomio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$, calcula $P(6)$, $P(-42)$, $P(5{,}8969)$ y describe el proceso seguido con la calculadora.

[2] [×] [6] [−] [3] [=] [×] [6] [+] [5] [=] [×] [6] [−] [7] [=] {347}

$P(6) = 347$

[2] [×] [4] [2] [+/−] [−] [3] [=] [×] [4] [2] [+/−] [+] [5] [=] [×] [4] [2] [+/−] [−] [7] [=] {-153685}

$P(-42) = -153\,685$

[2] [×] [5] [·] [8] [9] [6] [9] [−] [3] [=] [×] [5] [·] [8] [9] [6] [9] [+] [5] [=] [×] [5] [·] [8] [9] [6] [9] [−]

[7] [=] {328.2750853}

$P(5{,}8969) \simeq 328{,}2751$

2. Vuelve a calcular $P(a)$ para $a = 6$, $a = -42$ y $a = 5{,}8969$ empezando por introducir a en la memoria. Comprobarás que es mucho más cómodo.

Introducimos el número a en la memoria: a [Min] (para $a = 6$, después para $a = -42$; y, po último, para $a = 5{,}8969$) y procedemos así:

[2] [×] [MR] [−] [3] [=] [×] [MR] [+] [5] [=] [×] [MR] [−] [+] [=] { }

Así, obtenemos:

$P(6) = 347$; $P(-42) = -153\,685$; $P(5{,}8969) \simeq 328{,}2751$

3. Si $Q(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 11x + 3$, calcula $Q(3)$, $Q(-2)$ y $Q(-3{,}81)$. Describe el proceso seguido con la calculadora.

[3] [Min] [MR] [+] [3] [=] [×] [MR] [−] [2] [=] [×] [MR] [+] [7] [=] [×] [MR] [−] [1] [1] [=] [×] [MR] [+] [3] [=]
{465}

$Q(3) = 465$

Para calcular $Q(-2)$, introducimos -2 en la memoria; y el resto igual que en el caso anterior. Así, obtenemos: $Q(-2) = 85$

Si introducimos $-3{,}81$ en la memoria; podemos calcular $Q(-3{,}81)$ como en los casos anteriores: $Q(-3{,}81) \simeq 86{,}454$

4. Utiliza tu calculadora para averiguar los valores de x con los que se anula cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x^3 - x^2 - 19x + 4$ **b)** $x^4 + 4x^3 - x - 4$

a) Llamamos $P(x) = x^3 - x^2 - 19x + 4$.

Como $P(-4) = 0$; $x = -4$ anula $P(x)$.

Los otros dos valores no son exactos: $x_2 \simeq 4{,}79$; $x_3 \simeq 0{,}21$.

b) Llamamos $Q(x) = x^4 + 4x^3 - x - 4$.

Solo hay dos valores de x que anulen $Q(x)$: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$

Página 75

1. Descompón en factores este polinomio: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

	1	–4	7	–12	12
2		2	–4	6	–12
	1	–2	3	–6	0
2		2	0	6	
	1	0	3	0	

$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 = (x - 2)^2\,(x^2 + 3)$

2. Factoriza el siguiente polinomio: $x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50$

	1	1	–27	–25	50
1		1	2	–25	–50
	1	2	–25	–50	0
–2		–2	0	50	
	1	0	–25	0	

$x^2 - 25 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 25 \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases}$

$x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50 = (x - 1)(x + 2)(x - 5)(x + 5)$

Página 76

3. Observa y descompón en factores el polinomio $x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$**:**

	1	**–8**	**11**	**32**	**–60**
2		**2**	**–12**	**–2**	**60**
	1	**–6**	**–1**	**30**	**0**
–2		**–2**	**16**	**–30**	
	1	**–8**	**15**	**0**	
3		**3**	**–15**		
	1	**–5**	**0**		

$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x - 5)$

4. Razona por qué $x - 1$, $x + 1$, $x + 5$, $x - 5$ **son, en principio, posibles divisores del polinomio** $x^3 - x^2 - 25x + 25$.

a) Razona por qué $x - 3$ **no puede serlo.**

b) Descompón en factores dicho polinomio.

Los disvisores del término independiente (25) son: 1 –1, 5, –5, 25, –25

Por tanto, los polinomios $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x - 5)$, $(x + 5)$ son posibles divisores del polinomio dado.

a) 3 no es divisor de 25.

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -25 & 25 \\ 1 & & 1 & 0 & -25 \\ \hline & 1 & 0 & -25 & 0 \\ 5 & & 5 & 25 & \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \end{array}$$

$x^3 - x^2 - 25x + 25 = (x - 1)(x - 5)(x + 5)$

5. Factoriza estos polinomios:

a) $x^3 + x^2 - 32x - 60$ **b)** $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$ **c)** $x^4 - 10x^2 + 9$

d) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ **e)** $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$ **f)** $x^4 + 5x^2 - 36$

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -32 & -60 \\ 6 & & 6 & 42 & 60 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & 0 \\ -2 & & -2 & -10 & \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \end{array}$$

$x^3 + x^2 - 32x - 60 = (x - 6)(x + 2)(x + 5)$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 21 & 18 \\ -2 & & -2 & -12 & -18 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0 \\ -3 & & -3 & -9 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = (x + 2)(x + 3)^2$

c)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\ 1 & & 1 & 1 & -9 & -9 \\ \hline & 1 & 1 & -9 & -9 & 0 \\ -1 & & -1 & 0 & 9 & \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 & \\ 3 & & 3 & 9 & & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & & \end{array}$$

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1)(x - 1)(x - 3)(x + 3)$

d)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 2 & 8 \\ -1 & & -1 & 6 & -8 \\ \hline & 1 & -6 & 8 & 0 \\ 2 & & 2 & -8 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

e) Utilizamos el resultado obtenido en el apartado anterior:

$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = x(x + 1)(x - 2)(x - 4)$

f)

	1	0	5	0	–36
2		2	4	18	36
	1	2	9	18	0
–2		–2	0	–18	
	1	0	9	0	

El polinomio $x^2 + 9$ no tiene raíces reales.

Por tanto, $x^4 + 5x^2 - 36 = (x^2 + 9) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$

6. Calcula las raíces en cada caso:

a) $x^2 - 6x + 9$ **b)** $x^2 + 3x$

c) $2x^2 - 3x$ **d)** $x^3 - 4x$

a) $x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

b) $x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

c) $2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(2x - 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

d) $x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4) = x \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

Las raíces de este polinomio son 0, 2 y –2.

7. ¿Cuánto debe valer k en cada caso para que la división sea exacta?

a) $(x^3 + 5x^2 - 20x + k) : (x - 3)$

b) $(2x^2 + kx + 1) : (x - 1)$

Para que la división sea exacta, el resto ha de ser igual a cero.

a)

	1	5	–20	k
3		3	24	12
	1	8	4	$k + 12$

Resto $= k + 12 = 0 \rightarrow k = -12$

b)

	2	k	1
1		2	$k + 2$
	2	$k + 2$	$k + 3$

Resto $= k + 3 = 0 \rightarrow k = -3$

Página 78

1. Razona si existe alguna relación de divisibilidad entre los siguientes pares de polinomios:

a) $\boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$ **b)** $\boldsymbol{x^4 - 5x^2 + 3x - 1}$ **c)** $\boldsymbol{2x^3 + 13x^2 + 17x + 3}$

$\boldsymbol{x^2 - 4x + 4}$ $\boldsymbol{x + 2}$ $\boldsymbol{2x + 3}$

a) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$

$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Por tanto, $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ es múltiplo de $x^2 - 4x + 4$ (también podemos decir que $x^2 - 4x + 4$ es un divisor de $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$).

b) Dividimos $x^4 - 5x^2 + 3x - 1$ entre $x + 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -5 & 3 & -1 \\ -2 & & -2 & -4 & 2 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 5 & -11 \end{array}$$

La división no es exacta, luego no existe ninguna relación de divisibilidad entre estos dos polinomios.

c) Dividimos $2x^3 + 13x^2 + 17x + 3$ entre $2x + 3$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & +\ 13x^2 & +\ 17x & +\ 3 & 2x + 3 \\ \cline{5-5} -2x^3 & -\ 3x^2 & & & x^2 + 5x + 1 \\ \cline{1-4} & 10x^2 & +\ 17x & +\ 3 & \\ & -10x^2 & -\ 15x & & \\ \cline{2-4} & & 2x & +\ 3 & \\ & & -2x & -\ 3 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

El polinomio $2x^3 + 13x^2 + 17x + 3$ es múltiplo de $2x + 3$. (También podemos decir que $2x + 3$ es un divisor de $2x^3 + 13x^2 + 17x + 3$).

2. Busca un polinomio que sea divisible por $\boldsymbol{x - 1}$**, por** $\boldsymbol{x - 3}$ **y por** $\boldsymbol{x + 3}$**.**

Por ejemplo:

$(x - 1)(x - 3)(x + 3) = (x - 1)(x^2 - 9) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

3. Encuentra los divisores de estos polinomios:

a) $\boldsymbol{2x^2 - 18}$ **b)** $\boldsymbol{x^2 - 7x + 10}$ **c)** $\boldsymbol{x^3 - 2x^2 + x}$ **d)** $\boldsymbol{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}$

a) $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3)$

Divisores: $x - 3$; $x + 3$; $x^2 - 9$

b) $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$

Divisores: $x - 2$; $x - 5$; $x^2 - 7x + 10$

c) $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$

Divisores: x; $x - 1$; $(x - 1)^2$; $x^3 - 2x^2 + x$

d) $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$

Divisores: $x - 2$; $x - 3$; $x - 4$; $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$;

$(x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8$; $(x + 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$;

$x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

4. ¿Cuáles de estos polinomios son irreducibles?

a) $x^2 - 1$ **b)** $x^2 - 9$ **c)** $x^2 - 5$ **d)** $x^2 + 1$

e) $x^2 + 5$ **f)** $x^2 + 4x + 4$ **g)** $x^2 - 4x + 4$ **h)** $x^2 - 4x + 3$

a) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ $\rightarrow$ No es irreducible.

b) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ $\rightarrow$ No es irreducible.

c) $x^2 - 5 = 0$ $\rightarrow$ $x^2 = 5$ $\rightarrow$ $x = \pm\sqrt{5}$

$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ $\rightarrow$ No es irreducible.

d) $x^2 + 1 = 0$ $\rightarrow$ $x^2 = -1$ $\rightarrow$ $x = \pm\sqrt{-1}$ $\rightarrow$ No tiene solución.

Sí es irreducible.

e) $x^2 + 5 = 0$ $\rightarrow$ $x^2 = -5$ $\rightarrow$ $x = \pm\sqrt{-5}$ $\rightarrow$ No tiene solución.

Sí es irreducible.

f) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ $\rightarrow$ No es irreducible.

g) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ $\rightarrow$ No es irreducible.

h) $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ $\rightarrow$ No es irreducible.

5. Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de cada pareja de polinomios:

a) $x^2 - 4$ **b)** $x^4 - 7x^3 + 12x^2$ **c)** $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$x^2 - 4x + 4$ $x^5 - 3x^4 - 4x^3$ $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

a) $\begin{cases} x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \\ x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \end{cases}$

M.C.D. $= x - 2$

m.c.m. $= (x - 2)^2(x + 2)$

b) $\begin{cases} x^4 - 7x^3 + 12x^2 = x^2(x^2 - 7x + 12) = x^2(x - 3)(x - 4) \\ x^5 - 3x^4 - 4x^3 = x^3(x^2 - 3x - 4) = x^3(x + 1)(x - 4) \end{cases}$

M.C.D. $= x^2(x - 4)$

m.c.m. $= x^3(x + 1)(x - 3)(x - 4)$

c) $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3 \\ x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) = (x-1)^4 \end{cases}$

M.C.D. $= (x-1)^3$

m.c.m. $= (x-1)^4$

Página 80

1. Reduce previamente a común denominador las fracciones algebraicas siguientes y súmalas:

$$\frac{x+7}{x} \qquad \frac{x-2}{x^2+x} \qquad -\frac{2x+1}{x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ x^2 + x = x(x+1) \\ x+1 = x+1 \end{array}\right\} \text{m.c.m.} = x(x+1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\frac{x+7}{x} = \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{(2x+1)x}{x(x+1)} = -\frac{2x^2+x}{x(x+1)} = \frac{-2x^2-x}{x(x+1)}$$

Los sumamos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2+x} - \frac{2x+1}{x+1} = \frac{x^2+8x+7}{x(x+1)} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{-2x^2-x}{x(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2-2x^2-x}{x^2+x} = \frac{-x^2+8x+5}{x^2+x}$$

2. Efectúa:

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{1+2x(x-1)-x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1+2x^2-2x-x^2-x}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x^2-3x+1}{x^2-1}$$

Página 81

3. Efectúa estas operaciones:

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}$ **b)** $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}$

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)}=$

$$=\frac{2x^3+3x^2-4x^2-6x+6x+9}{x^2+5x-2x-10}=\frac{2x^3-x^2+9}{x^2+3x-10}$$

b) $\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}:\dfrac{2x+3}{x+5}=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\dfrac{x+5}{2x+3}=\dfrac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(x-2)(2x+3)}=$

$$=\frac{x^3-2x^2+3x+5x^2-10x+15}{2x^2+3x-4x-6}=\frac{x^3+3x^2-7x+15}{2x^2-x-6}$$

4. Calcula: $\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)$

$\dfrac{x+2}{x}:\left(\dfrac{x-1}{3}\cdot\dfrac{x}{2x+1}\right)=\dfrac{x+2}{x}:\dfrac{(x-1)x}{3(2x+1)}=\dfrac{x+2}{x}\cdot\dfrac{3(2x+1)}{x(x-1)}=$

$$=\frac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)}=\frac{3(2x^2+4x+x+2)}{x^3-x^2}=\frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2}$$

Página 85

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 Opera y simplifica:

a) $(2x^2-3)(x+1)-(x+2)(3x-1)$

b) $\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)^2$

c) $(2x+3)^2-3x(x+1)$

a) $(2x^2-3)(x+1)-(x+2)(3x-1)=2x^3+2x^2-3x-3-(3x^2-x+6x-2)=$

$$=2x^3+2x^2-3x-3-3x^2+x-6x+2=$$

$$=2x^3-x^2-8x-1$$

b) $\left(\dfrac{3x-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)^2=\dfrac{9x^2-6x+1}{4}+\dfrac{4x^2+4x+1}{9}=$

$$=\frac{81x^2-54x+9+16x^2+16x+4}{36}=\frac{97x^2-38x+13}{36}$$

c) $(2x+3)^2-3x(x+1)=4x^2+12x+9-3x^2-3x=x^2+9x+9$

2 **Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:**

a) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(3x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(3x^4 - x^2 - 1) : (3x^2 - 3x - 4)$

a)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & -4x^2 & +12x & -9 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +2x^3 & -3x^2 & & & x^2 + 2x - 3 \\ \cline{1-5}
 & 2x^3 & -7x^2 & +12x & -9 & \\
 & -2x^3 & +4x^2 & -6x & & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2 & +6x & -9 & \\
 & & 3x^2 & -6x & +9 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Cociente $= x^2 + 2x - 3$

Resto $= 0$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -5x^2 & +7x & -3 & x^2 - 1 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & & +3x & & 3x - 5 \\ \cline{1-4}
 & -5x^2 & +10x & -3 & \\
 & 5x^2 & & -5 & \\ \cline{2-4}
 & & 10x & -8 &
\end{array}$$

Cociente $= 3x - 5$

Resto $= 10x - 8$

c)
$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & & -x^2 & & -1 & 3x^2 - 3x - 4 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +3x^3 & +4x^2 & & & x^2 + x + 2 \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & +3x^2 & & -1 & \\
 & -3x^3 & +3x^2 & +4x & & \\ \cline{2-5}
 & & 6x^2 & +4x & -1 & \\
 & & -6x^2 & +6x & +8 & \\ \cline{3-5}
 & & & 10x & +7 &
\end{array}$$

Cociente $= x^2 + x + 2$

Resto $= 10x + 7$

3 **Halla el cociente y el resto en cada caso:**

a) $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$

b) $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$

c) $(x^4 - 81) : (x + 3)$

a)
$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 0 & 5 & -1 \\
2 & & 2 & 0 & 0 & 10 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 5 & 9
\end{array}$$

Cociente: $x^3 + 5$

Resto: 9

b)

	1	0	1	–20	0
–2		–2	4	–10	60
	1	–2	5	–30	60

Cociente: $x^3 - 2x^2 + 5x - 30$

Resto: 60

c)

	1	0	0	0	–81
–3		–3	9	–27	81
	1	–3	9	–27	0

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$

Resto: 0

4 **Aplica la regla de Ruffini para calcular $P(-2)$ y $P(5)$, siendo $P(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7$.**

	1	0	–3	5	–7
–2		–2	4	–2	–6
	1	–2	1	3	–13

$P(-2) = -13$

	1	0	–3	5	–7
5		5	25	110	575
	1	5	22	115	568

$P(5) = 568$

5 **Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:**

a) $x^3 - x^2 + 9x - 9$ **b)** $x^4 + x^2 - 20$

c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$ **d)** $x^4 - 81$

a)

	1	–1	9	–9
1		1	0	9
	1	0	9	0

$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9) \rightarrow$ Raíces: $x = 1$

b)

	1	0	1	0	–20
2		2	4	10	20
	1	2	5	10	0
–2		–2	0	–10	
	1	0	5	0	

$x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5) \rightarrow$ Raíces: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

c)

	1	1	–5	–5
–1		–1	0	5
	1	0	–5	0

$x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

$$x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = -1;\ x_2 = \sqrt{5}$$
$$x_3 = -\sqrt{5}$$

d)

	1	0	0	0	–81
3		3	9	27	81
	1	3	9	27	0
–3		–3	0	–27	
	1	0	9	0	

$$x^4 - 81 = (x-3)(x+3)(x^2+9) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = 3;\ x_2 = -3$$

6 **Saca factor común y utiliza los productos notables para factorizar los polinomios siguientes:**

a) $x^3 - x$ **b)** $4x^4 - 16x^2$ **c)** $x^3 + 2x^2 + x$

d) $3x^2 + 30x + 75$ **e)** $5x^3 - 45x$ **f)** $2x^3 - 8x^2 + 8x$

a) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

b) $4x^4 - 16x^2 = 4x^2(x^2 - 4) = 4x^2(x-2)(x+2)$

c) $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$

d) $3x^2 + 30x + 75 = 3(x^2 + 10x + 25) = 3(x+5)^2$

e) $5x^3 - 45x = 5x(x^2 - 9) = 5x(x-3)(x+3)$

f) $2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x(x^2 - 4x + 4) = 2x(x-2)^2$

7 **Efectúa las siguientes operaciones reduciendo al mínimo común denominador:**

a) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{2x} + \dfrac{1}{3x}$ **b)** $\dfrac{2x-1}{x^2} - \dfrac{x-3}{2x}$

c) $\dfrac{x+2}{x} - \dfrac{1}{x-1}$ **d)** $\dfrac{1}{2x+4} - \dfrac{2}{3x+6}$

a) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{2x} + \dfrac{1}{3x} = \dfrac{6(x-1)}{6x} - \dfrac{3(x+1)}{6x} + \dfrac{2}{6x} =$

$$= \frac{6x - 6 - 3x - 3 + 2}{6x} = \frac{3x - 7}{6x}$$

b) $\dfrac{2x-1}{x^2} - \dfrac{x-3}{2x} = \dfrac{2(2x-1)}{2x^2} - \dfrac{x(x-3)}{2x^2} =$

$$= \frac{4x - 2 - x^2 + 3x}{2x^2} = \frac{-x^2 + 7x - 2}{2x^2}$$

c) $\dfrac{x+2}{x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} - \dfrac{x}{x(x-1)} = \dfrac{x^2 + x - 2 - x}{x(x-1)} = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - x}$

d) $\dfrac{1}{2x+4} - \dfrac{2}{3x+6} = \dfrac{1}{2(x+2)} - \dfrac{2}{3(x+2)} =$

$= \dfrac{3}{6(x+2)} - \dfrac{4}{6(x+2)} = \dfrac{-1}{6(x+2)} = \dfrac{-1}{6x+12}$

8 **Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:**

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ **b)** $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

c) $\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ **d)** $\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

a) $\dfrac{x+1}{x^2-1} = \dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x-1}$ b) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

c) $\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \dfrac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x}{x+1}$ d) $\dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x+3$

9 **Cada una de las fracciones A, B, C es equivalente a una de las fracciones I, II, III.**

Asocia cada una con su equivalente:

$A = \dfrac{(x^2-1)(x-2)}{(x^2-4)(x+1)}$ $\mathrm{I} = \dfrac{x-1}{x+1}$

$B = \dfrac{x-2}{2-x}$ $\mathrm{II} = \dfrac{x-1}{x+2}$

$C = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ $\mathrm{III} = -1$

$A = \dfrac{(x^2-1)(x-2)}{(x^2-4)(x+1)} = \dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+2} = \mathrm{II}$

$B = \dfrac{x-2}{2-x} = \dfrac{-(2-x)}{2-x} = -1 = \mathrm{III}$

$C = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1} = \mathrm{I}$

10 **Opera y simplifica:**

a) $\dfrac{3}{x} : \dfrac{x-3}{x}$ **b)** $\dfrac{x+1}{3} \cdot \dfrac{15}{x^2-1}$

c) $\left(\dfrac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^3$ **d)** $\dfrac{x-2}{x} : \left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\dfrac{3}{x} : \dfrac{x-3}{x} = \dfrac{3x}{x(x-3)} = \dfrac{3}{x-3}$

b) $\dfrac{x+1}{3} \cdot \dfrac{15}{x^2-1} = \dfrac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \dfrac{5}{3(x-1)}$

c) $\left(\frac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 = \frac{x^6}{36} \cdot \frac{27}{x^3} = \frac{27x^6}{36x^3} = \frac{3x^3}{4}$

d) $\frac{x-2}{x} : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = \left(\frac{x-2}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{x-2}$

11 Reduce al mínimo común denominador y opera:

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1}$

b) $\frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$

c) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3$

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2 - 3(x-1) + (x-2)}{x^2-1} =$

$= \frac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1} = \frac{x^2+2}{x^2-1}$

b) $\frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6} = \frac{(1-x)(x-2) + 2x(x+3) - (x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)} =$

$= \frac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)} = \frac{4x+8}{x^2+x-6}$

c) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3 = \frac{x^2(x-1) - (2x-3)(x+1)^2 + 3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$

$= \frac{x^3 - x^2 - (2x-3)(x^2+2x+1) + 3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} =$

$= \frac{x^3 - x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3x^2 + 6x + 3 + 3x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 6x + 3x - 3}{(x+1)^2(x-1)} =$

$= \frac{2x^3 + x^2 + x}{(x+1)^2(x-1)}$

12 Expresa las siguientes fracciones en la forma $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$:

a) $\frac{4x^2-4x+1}{2x+1}$

b) $\frac{6x^3+5x^2-9x}{3x-2}$

c) $\frac{15x-2x^3-4+x^4}{x-2}$

d) $\frac{18+2x^3-5x^2}{2x+3}$

a)
$$\begin{array}{rl|l} & 4x^2 - 4x + 1 & 2x+1 \\ \hline & -4x^2 - 2x & 2x - 3 \\ \hline & -6x + 1 & \\ & 6x + 3 & \\ \hline & 4 & \end{array}$$

$\frac{4x^2-4x+1}{2x+1} = 2x - 3 + \frac{4}{2x+1}$

b)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
6x^3 & +5x^2 & -9x & & 3x-2 \\ \cline{5-5}
-6x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+3x-1 \\ \cline{1-3}
 & 9x^2 & -9x & & \\
 & -9x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & -3x & & \\
 & & 3x & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & -2 &
\end{array}
$$

$$\frac{6x^3 + 5x^2 - 9x}{3x - 2} = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{-2}{3x - 2}$$

c) $15x - 2x^3 - 4 + x^4 = x^4 - 2x^3 + 15x - 4$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 0 & 15 & -4 \\
2 & & 2 & 0 & 0 & 30 \\ \hline
 & 1 & 0 & 0 & 15 & 26
\end{array}
$$

$$\frac{15x - 2x^3 - 4 + x^4}{x - 2} = x^3 + 15 + \frac{26}{x - 2}$$

d)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & & +18 & 2x+3 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & -3x^2 & & & x^2-4x+6 \\ \cline{1-4}
 & -8x^2 & & +18 & \\
 & 8x^2 & +12x & & \\ \cline{2-4}
 & & 12x & +18 & \\
 & & -12x & -18 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$\frac{18 + 2x^3 - 5x^2}{2x + 3} = x^2 - 4x + 6$$

Página 86

PARA RESOLVER

13 **Calcula, en cada caso, el valor de *m* para que las siguientes divisiones sean exactas:**

a) $(2x^3 - 9x^2 + 2x + m) : (x - 4)$

b) $(x^4 + 3x^3 + mx - 3) : (x + 3)$

c) $(4x^3 + mx^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

a)
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -9 & 2 & m \\
4 & & 8 & -4 & -8 \\ \hline
 & 2 & -1 & -2 & m-8
\end{array}
$$

$m - 8 = 0 \rightarrow m = 8$

b)

	1	3	0	m	-3
-3		-3	0	0	$-3m$
	1	0	0	m	$-3m-3$

$-3m - 3 = 0 \;\rightarrow\; m = -1$

c) $P(x) = 4x^3 + mx^2 - 2x + 1$

$P(-1) = -4 + m + 2 + 1 = m - 1 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$

14 El resto de la división $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$ es igual a –7. ¿Cuánto vale k?

Si llamamos $P(x) = -x^3 + 3x^2 + kx + 7$, entonces:

$P(-2) = 8 + 12 - 2k + 7 = 27 - 2k = -7 \;\rightarrow\; k = 17$

15 Calcula el valor numérico del polinomio $5x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ para $x = -3{,}4$.

	5	2	-3	4
$-3{,}4$		-17	51	$-163{,}2$
	5	-15	48	$-159{,}2$

Si $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 4$, entonces $P(-3{,}4) = -159{,}2$

16 Halla el valor que ha de tener m para que el resto de la división $(3x^3 + mx^2 + x - 4) : (x - 3)$ sea igual a 5.

Si llamamos $P(x) = 3x^3 + mx^2 + x - 4$, entonces

$P(3) = 81 + 9m + 3 - 4 = 80 + 9m = 5 \;\rightarrow\; m = \frac{-75}{9} = \frac{-25}{3}$

17 Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3$

b) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$

c) $x^5 - 16x$

a) $2x^6 - 14x^4 + 12x^3 = 2x^3(x^3 - 7x + 6) = 2x^3(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

	1	0	-7	6
1		1	1	-6
	1	1	-6	0
2		2	6	
	1	3	0	

Raíces: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$

$x_3 = 2$; $x_4 = -3$

b)

	6	7	–1	–2
–1		–6	–1	2
	6	1	–2	0

$$6x^2 + x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (x - 1)(6x^2 + x - 2) = (x - 1)\, 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= (x - 1)(2x - 1)(3x + 2)$$

Raíces: $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$; $x_3 = \dfrac{-2}{3}$

c) $x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

	1	0	0	0	–16
2		2	4	8	16
	1	2	4	8	0
–2		–2	0	–8	
	1	0	4	0	

Raíces: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$

18 **Opera y simplifica:**

a) $\left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2x}{x^2 - 1}\right) : \dfrac{x}{x + 1}$

b) $\left[\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) : \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right] : (x^2 - 1)$

c) $\left(\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right) : \left(\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}\right)$

d) $\left[\left(x + \dfrac{1}{x}\right) : \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right](x - 1)$

a) $$\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{2x}{x^2 - 1}\right) : \frac{x}{x + 1} = \frac{x + 1 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1} =$$

$$= \frac{-x + 1}{x^2 - 1} : \frac{x}{x + 1} = \frac{-(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} : \frac{x}{x + 1} =$$

$$= \frac{-1}{x + 1} : \frac{x}{x + 1} = \frac{-(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{-1}{x}$$

b) $\left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] : (x^2 - 1) = \left[\frac{x-1}{x} : \frac{x+1}{x}\right] : (x^2 - 1) = \frac{x(x-1)}{x(x+1)} : (x^2 - 1) =$

$= \frac{x-1}{x+1} : (x^2 - 1) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2-1)} =$

$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$

c) $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x-1-x-1}{x^2-1} : \frac{x+1+x-1}{x^2-1} =$

$= \frac{-2}{x^2-1} : \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)} = \frac{-1}{x}$

d) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right](x - 1) = \left[\frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x}\right](x - 1) = \frac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)} \cdot (x - 1) =$

$= \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x - 1) = \frac{x^2+1}{x+1}$

19 **Completa las siguientes igualdades de modo que obtengas fracciones equivalentes:**

a) $\frac{3x}{2x-5} = \frac{?}{6x-15}$ **b)** $\frac{x^2-4}{?} = \frac{x-2}{2}$

c) $\frac{2x}{x+1} = \frac{?}{x^2+x}$ **d)** $\frac{1}{5-x} = \frac{x}{?}$

a) $\frac{3x}{2x-5} = \frac{3 \cdot 3x}{3(2x-5)} = \frac{9x}{6x-15}$

b) $\frac{x-2}{2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2(x+2)} = \frac{x^2-4}{2x+4}$

c) $\frac{2x}{x+1} = \frac{2x^2}{x^2+x}$

d) $\frac{1}{5-x} = \frac{x}{5x-x^2}$

20 **Simplifica:**

a) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2}$ **b)** $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7}$

a) $\frac{x^2-3x-4}{x^3+x^2} = \frac{(x-4)(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{x-4}{x^2}$

b) $\frac{x^2-x-42}{x^2-8x+7} = \frac{(x-7)(x+6)}{(x-7)(x-1)} = \frac{x+6}{x-1}$

21 **Justifica, en cada caso, si las fracciones dadas son equivalentes:**

a) $\dfrac{x}{x-1}$ y $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ **b)** $\dfrac{x-2}{x+1}$ y $\dfrac{x}{x+3}$

c) $\dfrac{3x}{2x-1}$ y $\dfrac{-6x}{2-4x}$ **d)** $\dfrac{x^3-x^2}{x^3-x}$ y $\dfrac{x}{x+1}$

a) $\left.\begin{array}{l} x(x-1)^2 = x(x^2-2x+1) = x^3-2x^2+x \\ x^2(x-1) = x^3-x^2 \end{array}\right\}$ No son equivalentes.

b) $\left.\begin{array}{l} (x-2)(x+3) = x^2+x-6 \\ x(x+1) = x^2+x \end{array}\right\}$ No son equivalentes.

c) $\left.\begin{array}{l} 3x(2-4x) = 6x-12x^2 \\ (2x-1)(-6x) = -12x^2+6x \end{array}\right\}$ Sí son equivalentes.

d) $\left.\begin{array}{l} (x^3-x^2)(x+1) = x^4+x^3-x^3-x^2 = x^4-x^2 \\ (x^3-x)x = x^4-x^2 \end{array}\right\}$ Sí son equivalentes.

22 **Opera y simplifica:**

a) $\dfrac{3a+3}{12a-12} : \dfrac{(a+1)^2}{a^2-1}$

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2-3x+2}$

a) $\dfrac{3a+3}{12a-12} : \dfrac{(a+1)^2}{a^2-1} = \dfrac{(3a+3)(a^2-1)}{(12a-12)(a+1)^2} = \dfrac{3(a+1)^2(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x-2)^3} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x^2-1} = \dfrac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{x+3}{x^2-x-2}$

c) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x^2-3x+2} = \dfrac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)} =$

$= \dfrac{x^2-x-x^2+2x-x}{(x-2)(x-1)} = 0$

23 **Indica cuáles son las raíces de los siguientes polinomios:**

a) $2x(x^2+4)$ **b)** $(x-2)^2(2x-7)$

c) $x^2(x^2-3)$ **d)** $(x^2-4)(x^4+1)$

a) $x = 0$

b) $x_1 = 2;\ x_2 = \dfrac{7}{2}$

c) $x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{3};\ x_3 = \sqrt{3}$

d) $x_1 = 2;\ x_1 = -2$

24 **Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo en cada caso:**

a) $x^4 - 4x^2;\ \ x^3 - 4x^2 + 4x$ **b)** $x^2 - 3x;\ \ x^2 - 9;\ \ x^2 - 6x + 9$

c) $9x^4 + 9x^3;\ \ 3x^2;\ \ 6x^5 + 6x^4$

a) $x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$

$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$

M.C.D. $= x(x - 2)$

m.c.m. $= x^2(x - 2)^2(x + 2)$

b) $x^2 - 3x = x(x - 3)$

$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

M.C.D. $= x - 3$

m.c.m. $= x(x - 3)^2(x + 3)$

c) $9x^4 + 9x^3 = 9x^3(x + 1)$

$3x^2$

$6x^5 + 6x^4 = 6x^4(x + 1)$

M.C.D. $= 3x^2$

m.c.m. $= 18x^4(x + 1)$

25 **En una división de polinomios el divisor es $3x^2 - 1$, el cociente $2x - 3$ y el resto $-x + 1$. Halla el dividendo.**

$(3x^2 - 1)(2x - 3) + (-x + 1) = 6x^3 - 6x^2 - 2x + 3 - x + 1 = 6x^3 - 6x^2 - 3x + 4$

26 **Si en una división de polinomios el dividendo es $x^3 - 3x^2 - 4$, el cociente $x^2 - x - 2$ y el resto -8, ¿cuál es el divisor?**

Dividendo = divisor · cociente + resto

$$\frac{\text{Dividendo} - \text{resto}}{\text{Cociente}} = \text{divisor}$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 4 - (-8)}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3 - 3x^2 - 4 + 8}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - x - 2} = x - 2$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & & +4 & x^2 - x - 2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & +2x & & x - 2 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & +2x & +4 & \\
 & 2x^2 & -2x & -4 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

divisor $= x - 2$

27 **Opera y simplifica:**

a) $\left(1 - \dfrac{x+1}{x+2} \cdot \dfrac{x+3}{x+2}\right) : \dfrac{1}{x+2}$ **b)** $\left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x+2}\right)$

a) $\left(1 - \dfrac{x+1}{x+2} \cdot \dfrac{x+3}{x+2}\right) : \dfrac{1}{x+2} = \left(1 - \dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\right) : \dfrac{1}{x+2} =$

$= \dfrac{x^2+4x+4-x^2-4x-3}{(x+2)^2} : \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} : \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x+2}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{x+2}$

b) $\left(\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x+2}\right) = \dfrac{(x+1)(x+2)-x^2}{x(x+2)} : \dfrac{x+2+x}{x+2} =$

$= \dfrac{x^2+3x+2-x^2}{x(x+2)} : \dfrac{2x+2}{x+2} =$

$= \dfrac{3x+2}{x(x+2)} : \dfrac{2x+2}{x+2} = \dfrac{(3x+2)(x+2)}{x(x+2)(2x+2)} =$

$= \dfrac{3x+2}{x(2x+2)} = \dfrac{3x+2}{2x^2+2x}$

CUESTIONES TEÓRICAS

28 **Un polinomio $A(x)$ es de grado 4 y otro $B(x)$ es de grado 3.**

a) ¿Cuál será el grado de $A(x) \cdot B(x)$?

b) ¿Y el de $A(x) : B(x)$?

c) ¿Cuál puede ser el grado del resto de la división $A(x) : B(x)$?

a) Grado $4 + 3 = 7$

b) Grado $4 - 3 = 1$

c) Grado menor que 3

Página 87

29 **Si la división $P(x) : (x - 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor de $P(2)$?**

Por el teorema del resto, sabemos que $P(2) = 0$.

30 **Si $P(-5) = 3$, ¿cuál será el resto de la división $P(x) : (x + 5)$?**

Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división es 3.

31 **Escribe tres polinomios de tercer grado, $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, tales que:**

a) $P(x)$ tenga por raíces 2, 3, –1. **b) $Q(x)$ tenga por raíces 2 y 3.**

c) $R(x)$ solo tenga como raíz –1.

Por ejemplo:

a) $P(x) = (x-2)(x-3)(x+1) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

b) $Q(x) = (x - 2)^2(x - 3) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

c) $R(x) = (x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

32 Escribe un polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que: $P(3) = 0$ y $P(5) = 6$

$P(x) = (x - 3)(x - a)$

$P(3) = 0;\ P(5) = 2(5 - a) = 6 \ \rightarrow\ a = 2$

Por ejemplo: $P(x) = (x - 3)(x- 2) = x^2 - 5x + 6$

33 Sabemos que el polinomio $P(x)$ solo es divisible por $(x - 2)$ y $(x + 3)$. ¿Puede ser el grado de $P(x)$ mayor que 2? Pon ejemplos.

Si solo es divisible por $(x - 2)$ y $(x + 3)$, el polinomio será $P(x) = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ (o bien, una constante multiplicada por $P(x)$); es decir, $P(x)$ es de grado dos.

Si buscáramos que tuviera solamente como raíces $x = 2$ y $x = -3$, sí que podría ser $P(x)$ de grado mayor que 2; por ejemplo: $P(x) = (x - 2)^2(x + 3)$

34 Si en el numerador y denominador de una fracción algebraica eliminamos sumandos iguales, ¿se obtiene una fracción equivalente a la primera?

No. Por ejemplo, $\dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ no es equivalente a $\dfrac{x}{x^2}$

35 Escribe un polinomio de grado 4 que no tenga raíces.

Por ejemplo: $x^4 + 1$ no tiene raíces.

PARA PROFUNDIZAR

36 Calcula el cociente de cada una de estas divisiones exactas:

a) $(x^3 + 3x^2 - 16x - 48) : [(x + 4)(x - 4)]$

b) $(2x^3 - 6 - 4x^2 + x^4 - 5x) : [(x - 2)(x + 3)]$

a)

	1	3	–16	–48
4		4	28	48
	1	7	12	0
–4		–4	–12	
	1	3	0	

Cociente $= x + 3$

b)

	1	2	–4	–5	–6
2		2	8	8	6
	1	4	4	3	0
–3		–3	–3	–3	
	1	1	1	0	

Cociente $= x^2 + x + 1$

37 **Haz las operaciones indicadas y simplifica. Comprueba que en cada caso obtienes como resultado un número.**

a) $\left(\frac{2a-b}{2a+b} - \frac{2a+b}{2a-b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{4a}\right)$ **b)** $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3a-2b}{ab}\right) \cdot \frac{3ab}{3b-2a}$

c) $\left(\frac{a+2}{a-2} - \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot \left(a - \frac{4}{a}\right)$

a) $\left(\frac{2a-b}{2a+b} - \frac{2a+b}{2a-b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{4a}\right) = \frac{(2a-b)^2 - (2a+b)^2}{(2a+b)(2a-b)} \cdot \frac{(4a^2-b^2)}{4ab} =$

$$= \frac{4a^2 - 4ab + b^2 - (4a^2 + 4ab + b^2)}{4a^2 - b^2} \cdot \frac{4a^2 - b^2}{4ab} =$$

$$= \frac{-8ab}{(4a^2-b^2)} \cdot \frac{(4a^2-b^2)}{4ab} = \frac{-8}{4} = -2$$

b) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{3a-2b}{ab}\right) \cdot \frac{3ab}{3b-2a} = \frac{b + a - 3a + 2b}{ab} \cdot \frac{3ab}{3b-2a} =$

$$= \frac{3b-2a}{ab} \cdot \frac{3ab}{3b-2a} = 3$$

c) $\left(\frac{a+2}{a-2} - \frac{a-2}{a+2}\right) \cdot \left(a - \frac{4}{a}\right) = \frac{(a+2)^2 - (a-2)^2}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{(a^2-4)}{a} =$

$$= \frac{a^2 + 4a + 4 - (a^2 - 4a + 4)}{a^2-4} \cdot \frac{a^2-4}{a} =$$

$$= \frac{8a}{a^2-4} \cdot \frac{a^2-4}{a} = 8$$

38 **Determina a y b en el polinomio $ax^2 + bx + 4$ sabiendo que es divisible por $(x + 1)$ y que los restos que se obtienen al dividirlo por $(x - 2)$ y $(x - 1)$ son iguales.**

Llamamos $P(x) = ax^2 + bx + 4$. Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(-1) = 0 \;\rightarrow\; a - b + 4 = 0 \;\rightarrow\; a = b - 4 \\ P(2) = P(1) \;\rightarrow\; 4a + 2b + 4 = a + b + 4 \;\rightarrow\; 3a + b = 0 \end{array}\right\}$$

$3(b - 4) + b = 0 \;\rightarrow\; 3b - 12 + b = 0 \;\rightarrow\; 4b = 12 \;\rightarrow\; b = 3 \;\rightarrow\; a = -1$

Por tanto, $P(x) = -x^2 + 3x + 4$

39 **Demuestra las siguientes igualdades:**

a) $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1}{x}$ **b)** $\frac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = 1$

c) $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = 2x - 5$

a) $\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{1-x+2x}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{(1+x)}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{(1-x)}{x} = \frac{1}{x}$

b) $\frac{a^2-1}{a^2-3a+2} : \frac{a^2+2a+1}{a^2-a-2} = \frac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a-2)} : \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-2)} =$

$= \frac{a+1}{a-2} : \frac{a+1}{a-2} = 1$

c) $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) = \frac{(x-2)^2-(x-3)^2}{(x-3)(x-2)} : \frac{x-2-(x-3)}{(x-3)(x-2)} =$

$= \frac{x^2-4x+4-x^2+6x-9}{(x-3)(x-2)} : \frac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)} =$

$= \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} : \frac{1}{(x-3)(x-2)} = 2x-5$

40 **Saca factor común y simplifica las siguientes fracciones algebraicas:**

a) $\frac{x^2y+xy^2}{x^2y-xy^2}$

b) $\frac{2x^2y-xy^2}{10x-5y}$

c) $\frac{3x^2+3xy}{x^2-y^2}$

d) $\frac{3x^2y^2-6xy^3}{3x^3y-6x^2y^2}$

a) $\frac{x^2y+xy^2}{x^2y-xy^2} = \frac{xy(x+y)}{xy(x-y)} = \frac{x+y}{x-y}$

b) $\frac{2x^2y-xy^2}{10x-5y} = \frac{xy(2x-y)}{5(2x-y)} = \frac{xy}{5}$

c) $\frac{3x^2+3xy}{x^2-y^2} = \frac{3x(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{3x}{x-y}$

d) $\frac{3x^2y^2-6xy^3}{3x^3y-6x^2y^2} = \frac{3xy^2(x-2y)}{3x^2y(x-2y)} = \frac{y}{x}$

PARA PENSAR UN POCO MÁS

41 **a) Si n es un número entero no nulo, prueba que:** $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b) Calcula, utilizando la igualdad anterior:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10}$$

c) Prueba que:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

b) Utilizando la igualdad anterior, tenemos que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

c) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Demostración por inducción:

Para $n = 1$, queda:

$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, que es cierto.

Supongamos que la igualdad es cierta para $n-1$; es decir, que:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}$ Lo probamos para n:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)}=\frac{n^2-1+1}{n(n+1)}=\frac{n^2}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

42 **Con las siete piezas del trangram chino se puede formar un cuadrado. Si x es la mitad del lado de ese cuadrado, expresa en función de x el área de cada una de las siete piezas y prueba que su suma coincide con el área del cuadrado.**

Área de cada una de las piezas:

① $A_1=\frac{b\cdot \text{h}}{2}=\frac{x\cdot x}{2}=\frac{x^2}{2}$

② $A_2=b\cdot \text{h}=x\cdot\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}$

③ $A_3=\frac{b\cdot \text{h}}{2}=\frac{x\cdot x/2}{2}=\frac{x^2}{4}$

④ $A_4=\frac{D\cdot d}{2}=\frac{x\cdot x}{2}=\frac{x^2}{2}$

⑤ $A_5=\frac{b\cdot \text{h}}{2}=\frac{x\cdot x/2}{2}=\frac{x^2}{4}$

⑥ $A_6=\frac{b\cdot \text{h}}{2}=\frac{2x\cdot x}{2}=x^2$

⑦ $A_7=A_6=x^2$

Suma de las áreas $= A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6+A_7=$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+x^2+x^2=4x^2$$

Área del cuadrado $=(2x)\cdot(2x)=4x^2$

Por tanto: Suma de las áreas = Área del cuadrado.