3 Expresiones algebraicas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Para cada polinomio, indica su grado y sus coeficientes, calcula su valor numérico para $x = 3$ y $x = -5$.

a) $P(x) = -2x^4 + 32$

b) $Q(x) = 2x^3 + x + 30$

c) $R(x) = \frac{1}{3}x^2 - 5x + \frac{1}{6}$

d) $S(x) = -2x^3 - x^2 + 3x$

a) Cuarto grado. Coeficientes: –2, 0, 0, 0, 32 ; término independiente: 32. $P(3) = -130$ y $P(-5) = -1218$.

b) Tercer grado. Coeficientes: 2, 0, 1, 30; término independiente: 30. $Q(3) = 87$ y $Q(-5) = -225$.

c) Segundo grado. Coeficientes: $\frac{1}{3}$, –5, $\frac{1}{6}$; término independiente $\frac{1}{6}$. $R(3) = -\frac{71}{6}$ y $R(-5) = \frac{67}{2}$.

d) Tercer grado. Coeficientes: –2, –1, 3, 0; no tiene término independiente. $S(3) = -54$ y $S(-5) = 210$.

5. Dados los polinomios $P(x) = -x^3 + x^2 - 3x - 1$, $Q(x) = -3x^3 - 6x + 3$ y $R(x) = x^3 + 2x^2$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + 2R(x)$

b) $2\left[P(x) - 3Q(x)\right] + \frac{1}{2}R(x)$

a) $4x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

b) $\frac{33}{2}x^3 + 3x^2 + 30x - 20$

6. Halla las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

$P(-3) = 0 = P\left(\frac{1}{2}\right)$. Luego las raíces son $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$.

7. Los ingresos y costes de una determinada operación comercial vienen dados por los siguientes polinomios, en los que *x* es el número de unidades producidas.

$$I(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 \qquad C(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20$$

a) Calcula la expresión que determina los beneficios.

b) Calcula los beneficios en el caso de que los costes se reduzcan a la mitad.

a) $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20\right) = -\frac{3}{20}x^2 + 4x + 30$

b) $B(x) = I(x) - \frac{C(x)}{2} = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{20}x^2 + x + 10\right) = -\frac{1}{5}x^2 + 5x + 40$

8 a 11. Ejercicios resueltos.

12. Realiza los siguientes productos de polinomios.

a) $(2x^2-3x+5)(-3x+2)$ **b)** $(-x^3+x^2-2)(-3x^2-4)$ **c)** $(6x^3-x^2-3x)(2x^2+3x-7)$

a) $-6x^3+4x^2+9x^2-6x-15x+10=-6x^3+13x^2-21x+10$

b) $3x^5+4x^3-3x^4-4x^2+6x^2+8=3x^5-3x^4+4x^3+2x^2+8$

c) $12x^5+18x^4-42x^3-2x^4-3x^3+7x^2-6x^3-9x^2+21x=12x^5+16x^4-51x^3-2x^2+21x$

13. Escribe el desarrollo del cubo de una resta: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3$.

$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$

14. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $2x-3x(x^2-5)+(2-x)(-3x^2+6)$

b) $2(3x-1)^2+5(3x-1)(3x+1)-4x(3x+2)^2$

c) $3(2x^2-3)^2-2x(x^2+3x)-(1-2x)(-x^2+2)$

a) $2x-3x^3+15x-6x^2+12+3x^3-6x=-6x^2+11x+12$

b) $18x^2+2-12x+45x^2-5-36x^3-16x-48x^2=-36x^3+15x^2-28x-3$

c) $12x^4-36x^2+27-2x^3-6x^2-2x^3+x^2+4x-2=12x^4-4x^3-41x^2+4x+25$

15. Simplifica la expresión $\boldsymbol{2xa-4xb-3ya+6yb}$.

$2x(a-2b)-3y(a-2b)=(a-2b)(2x-3y)$

16. Ejercicio resuelto.

17. Realiza las siguientes divisiones de monomios e indica si el resultado es un monomio.

a) $\dfrac{12x^4}{-3x^2}$ o **b)** $\dfrac{18x^5y^2z^4}{6x^2y^2z^3}$ **c)** $\dfrac{-54x^2y^4z^3}{18x^2y^2z^3}$ **d)** $\dfrac{8a^3d^2}{2b^3c^2d^3}$

a) $-4x^2$. Es un monomio.

b) $3x^3z$. Es un monomio.

c) $-3y^2$. Es un monomio

d) $\dfrac{4a^3}{b^3c^2d}$. No es un monomio.

18. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^4-2x^2-x+4):(x+2)$ **b)** $\left(x^6+\dfrac{1}{2}x^4+x^2+4\right):(2x^3+x-4)$

a) Cociente: $3x^3-6x^2+10x-21$ Resto: 46

b) Cociente: $\dfrac{x^3}{2}+1$ Resto: x^2-x+8

19 y 20. Ejercicios resueltos.

21. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3):(x+1)$

b) $(2x^5 - x^3 + 2x - 1):(x-3)$

c) $(2x^4 - 3x^2 + 8x + 12):(x+2)$

d) $(5x^5 - 5x^3 + 5x - 5):(x+3)s$

e) $(a^2 + ab + b^2):(a-b)$

a) Cociente: $2x^3 - 5x^2 + 7x - 12$. Resto: 15

b) Cociente: $2x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 51x + 155$. Resto: 464

c) Cociente: $2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Resto: 16

d) Cociente: $5x^4 - 15x^3 + 40x^2 - 120x + 365$. Resto: –1100

e) Cociente: $a + 2b$. Resto: $3b^2$

22. Divide los polinomios:

a) $(x^5 - x + 2):\left(x + \frac{1}{4}\right)$

b) $\left(4x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}\right):\left(x - \frac{3}{2}\right)$

a) Cociente: $x^4 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{64} - \frac{255}{256}$. Resto: $\frac{2303}{1024}$

b) Cociente: $4x^2 + \frac{16}{3}x + 8$. Resto: $\frac{49}{4}$

23. Ejercicio interactivo.

24 y 25. Ejercicios resueltos.

26. Con ayuda de la regla de Ruffini, calcula el valor numérico del polinomio $P(x) = 1{,}25x^3 - 0{,}75x^2 + 0{,}5x - 1$, para $x = 2{,}05$.

$P(2{,}05) = 7{,}642$

27. Halla el valor de *m* para que sea exacta la siguiente división.

$$(2x^4 + 8x^3 - 20x^2 - 24x + 16m):(x-2)$$

Aplicando la regla de Ruffini se obtiene de resto $R = 16m - 32$. Como este resto debe ser nulo, $m = 2$.

28. Calcula el valor de *k* para que al dividir $x^5 + kx - 2$ entre $x + 3$ se obtenga de resto –272.

	1	0	0	0	k	–2
–3		–3	9	– 27	81	$-3k - 243$
	1	–3	9	– 27	$k + 81$	$-3k - 245$

Entonces, $-3k - 245 = -272$

Por lo tanto, $k = 9$

29. Calcula el valor que debe tomar *k* para que el polinomio $c(x) = 0{,}5x^3 + 0{,}125x^2 + kx - 1$ sea divisible por $(x + 0{,}25)$.

$c(-0{,}25) = 0{,}5(-0{,}25)^3 + 0{,}125(-0{,}25)^2 + k(-0{,}25) - 1 = 0 \Rightarrow k = -4$

30 y 31. Ejercicios resueltos.

32. Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces.

a) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

b) $9x^3 + 12x^2 + 4x$

c) $x^6 - 16x^2$

d) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

e) $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

f) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

g) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

h) $x^6 - 9x^4$

a) $(x-1)^2(x+1)(x-3)$; $x = 1$ (doble), $x = -1$, $x = 3$

b) $x(3x+2)^2$ $x = 0$, $x = -\dfrac{2}{3}$

c) $x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$; $x = 0$ (doble), $x = -2$, $x = 2$

d) $(x-2)(x+1)(x-3)$; $x = 2$, $x = -1$, $x = 3$

e) $(x+1)(2x+1)(3x+1)$; $x = -1$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{3}$

f) $(x-1)(x+2)(2x+3)$; $x = -2$, $x = -\dfrac{3}{2}$, $x = 1$

g) $(x-1)(x-2)(x^2+1)$; $x = 1$, $x = 2$

h) $x^4(x-3)(x+3)$; $x = 0$ (cuarta), $x = 3, x = -3$

33. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$ $\qquad Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

b) $P(x) = x$ $\qquad Q(x) = x^2 - x$ $\qquad R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

a) $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x-3)$, $Q(x) = (x+1)(x-1)(x+3)$

m.c.d.$\{P(x),Q(x)\} = (x-1)(x+1)$ m.c.m.$\{P(x),Q(x)\} = (x-1)^2(x+1)^2(x+3)(x-3)$

b) $P(x) = x$, $Q(x) = x(x-1)$, $R(x) = x(x-1)^2$

m.c.d.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = x$ m.c.m.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = x(x-1)^2$

34. Ejercicio interactivo.

35 y 36. Ejercicios resueltos.

37. Comprueba si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes.

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{x^3+2}{x^2+5x-3}} \qquad \boldsymbol{B(x) = \frac{x^4+x^3+2x+2}{x^3+x^2+5x^2+5x-3x-3}}$$

Factorizando $B(x) = \dfrac{(x+1)(x^3+2)}{(x+1)(x^2+5x-3)}$ y multiplicando en cruz se ve que son equivalentes.

38. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas y halla su valor numérico para $x = 2$.

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$ **b)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

a) $\dfrac{(x+3)(x-1)^2(2x-1)}{(x-1)(x+3)(2x-1)} = x - 1$. Para $x = 2$ el valor numérico es 1.

b) $\dfrac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)^2} = \dfrac{x+3}{x-2}$. Para $x = 2$ no tiene valor numérico.

39. Calcula y simplifica el resultado.

a) $\frac{a^2}{ab}+\frac{ab^2}{b^4}-a$

b) $\frac{6}{2+x}-\frac{4}{2-x}+\frac{16}{x^2-4}$

c) $(x^2-y^2):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

d) $\frac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\frac{x-a}{x+a}$

a) $\frac{a^2b^3+a^2b^2-a^2b^4}{ab^4}=\frac{a^2b^2\left(b+1-b^2\right)}{ab^4}=\frac{ab+a-ab^2}{b^2}$

b) $\frac{6x-12+4x+8+16}{(x+2)(x-2)}=\frac{10x+12}{x^2-4}$

c) $\frac{(x-y)(x+y)}{\frac{x+y}{xy}}=\frac{xy(x-y)(x+y)}{x+y}=x^2y-xy^2$

d) $\frac{(a+x)(x-a)}{(x-a)(x+a)^2}=\frac{1}{x+a}$

40. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $A(x)=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$

b) $B(x)=1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{1}{x}}}$

a) $A(x)=\frac{3x+2}{2x+1}$

b) $B(x)=\frac{2x^2+1+2x}{x^2+x+1}$

41. Si las expresiones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ expresan el coste, en euros, de fabricar, para un modelo de bicicleta, *x* cámaras y *x* válvulas, respectivamente, calcula la suma de costes.

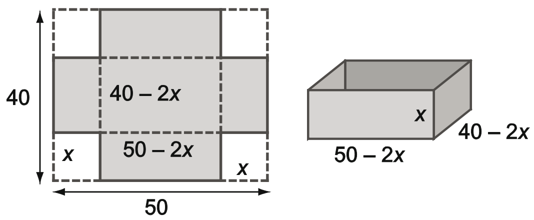
$$\boldsymbol{C_1(x)=500-\cfrac{x}{\cfrac{x^2}{10\,000}-1}} \qquad \boldsymbol{C_2(x)=1000-\cfrac{x}{\cfrac{x}{100}-1}}$$

$$C_1(x)+C_2(x)=500-\cfrac{x}{\cfrac{x^2}{10\,000}-1}+1000-\cfrac{x}{\cfrac{x}{100}-1}=\frac{1400x^2-15\,000\,000-2000x}{x^2-10\,000}$$

42. Ejercicio interactivo.

43. Ejercicio resuelto.

44. Con una cartulina rectangular de 50 cm x 40 cm se quiere construir una caja sin tapa recortando cuatro cuadros iguales en cada una de las esquinas. Escribe las expresiones algebraicas de la superficie y el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.



$V(x)=x(50-2x)(40-2x)=4x^3-180x^2+2000x$

$S(x)=40\cdot 50-4x^2$

45. Se considera como indicador del bienestar de un país la media ponderada de tres porcentajes: el de afiliación a la seguridad social (*x*), el de población con renta superior a la línea de pobreza (*y*) y el de población activa con trabajo (*z*). Los pesos asignados a dichos porcentajes son 1 : 2 : 2. Escribe la expresión algebraica del indicador y calcula su valor para $x = 65$ %, $y = 80$ % y $z = 92$ %.

$I(x,y,z) = \dfrac{x+2y+2z}{5}$, $I(65,80,92) = 81{,}8\,\%$

46. El negocio de una empresa que fabrica memorias para ordenador tiene las siguientes características:

- **Costes fijos: 2200 €**
- **Costes por unidad: 7 €**
- **Precio de venta por unidad: 12 €**

Escribe las expresiones algebraicas que permiten calcular los beneficios en función del número de unidades producidas, y aplícalas para el caso concreto de que se fabriquen 650 memorias en cada uno de los siguientes casos.

a) Se vende toda la producción.

b) Queda sin vender el 12 % de la producción.

	Costes $C(x)$	Ingresos $I(x)$	Beneficios $B(x)$	$B(650)$
a)	$2200+7x$	$12x$	$5x-2200$	1050
b)	$2200+7x$	$10{,}56x$	$3{,}56x-2200$	114

47 a 60. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Polinomios

61. Identifica el número de variables, el grado, los coeficientes y el término independiente de los siguientes polinomios.

a) $2x^3+3x^2-4x+5$ **b)** $3xy^2z^3-2x^2y^3z^2$ **c)** $2y^2+3y+4$ **d)** $4ab-3cd^2+2d+7$

a) Una variable, *x*. Grado 3. Coeficientes: 2, 3, -4 y término independiente 5.

b) Tres variables, *x*, *y*, *z*. Grado 7. Coeficiente de mayor grado -2, el coeficiente de sexto grado 3.

c) Una variable, *y*. Grado 2. Coeficientes: 2, 3 y término independiente 4.

d) Cuatro variables, *a*, *b*, *c* y *d*. Grado 3. Coeficientes: –3, 4, 2, y término independiente 7.

62. Calcula el valor numérico en $x = 2$ y $x = 0{,}15$ de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^4+2x^2-3$ **b)** $Q(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{4}x-2$ **c)** $R(x) = -\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2$ **d)** $S(x) = \frac{1}{6}x^5+\frac{2}{3}$

a) $P(2) = 21$, $P(0{,}15) = -2{,}95$

c) $R(2) = -\dfrac{4}{3}$, $R(0{,}15) = 0{,}0149$

b) $Q(2) = \dfrac{23}{30}$, $Q(0{,}15) = -2{,}10$

d) $S(2) = 6$, $S(0{,}15) = 0{,}666\,679$

63. ¿Son los valores de $x = -2$, $x = 2$, $x = -1$ y $x = 1$ raíces del polinomio $P(x) = x^3+2x^2-x-2$?

$P(-2) = 0, P(2) \neq 0, P(-1) = 0, P(1) = 0$. Luego, las raíces son $x = -2, x = -1$ y $x = 1$.

64. Determina el valor de *a* para que $x = -2$ sea raíz del polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - (a+1)x^3 + 5ax - 4$$

Para que $x = -2$ sea raíz de $P(x)$ se tiene que cumplir que $P(-2) = 32 + 8(a+1) - 10a - 4 = 0$. Luego, $a = 18$.

Operaciones con polinomios

65. Simplifica los siguientes polinomios.

a) $8 - 2(2-3x)^2$ **b)** $(x-2)(x+3)(x-1)$ **c)** $4(2-5x)^2 - 16(1-5x)$ **d)** $-2(x+1)(x+2)^2$

a) $-18x^2 + 24x$ **b)** $x^3 - 7x + 6$ **c)** $100x^2$ **d)** $-2x^3 - 10x^2 - 16x - 8$

66. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$, $Q(x) = -x^3 - x^2 + 2$ y $R(x) = -3x^2 + 2x - 5$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$ **b)** $-2P(x) - 3Q(x) - 3R(x)$

a) $x^3 - 7x^2 + x$ **b)** $-x^3 + 18x^2 - 4x + 3$

67. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(3x-2)^2 - 3(3x+2)^2 - 2(3x-2)(3x+2)$

b) $(3x+2)^2 + 2(2x-3)^2 - (2x-5)(x-5)$

c) $(2x^2 - 2x - 1)(3x^2 - 2x) - 3x$

d) $(2x^2 - 3x + 2)(-3x^2 + x + 1) + (6x + 10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}\right) + \frac{6}{25}$

a) $-27x^2 - 60x + 4$ **b)** $15x^2 + 3x - 3$ **c)** $6x^4 - 10x^3 + x^2 - x$ **d)** $x^3 - 7x^2 - x + 2$ **e)** $x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{4}{15}x$

68. Desarrolla empleando las identidades notables.

a) $(2x+3)^2$ **b)** $(xyz^3 - x^2y)^2$ **c)** $(2z + 3xy)(3xy - 2z)$ **d)** $(3x + 2xy)^4$

a) $4x^2 + 12x + 9$ **b)** $x^2y^2z^6 - 2x^3y^2z^3 + x^4y^2$ **c)** $9x^2y^2 - 4z^2$ **d)** $16x^4y^4 + 96x^4y^3 + 216x^4y^2 + 216x^4y + 81x^4$

69. Emplea las identidades notables para escribir estas expresiones en forma de producto.

a) $x^2 + 4x + 4$ **b)** $4x^2 - 25$ **c)** $9x^2 - 12xy + 4y^2$ **d)** $x^2 - 5$

a) $(x+2)^2$ **b)** $(2x-5)(2x+5)$ **c)** $(3x-2y)^2$ **d)** $\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$

70. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^3 - 4x^2 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(6x^4 + 11x^3 - 17x^2 + 11x - 3) : (2x^2 + 5x - 3)$

c) $(6x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 6x - 6) : (3x^2 + 2x + 1)$

d) $\left(2x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{19}{4}x + \frac{3}{4}\right) : (x^2 + 3x - 1)$

a) Cociente: $3x + 2$. Resto: $-7x - 3$

b) Cociente: $3x^2 - 2x + 1$. Resto: 0

c) Cociente: $2x^2 + x - 3$. Resto: $-x - 3$

d) Cociente: $2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$. Resto: $2x + \frac{3}{2}$

71. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(2x^4 - x^3 - x + 4):(x-3)$

b) $(-2x^4 - 3x^2 + 5x + 3):(x+2)$

c) $(-3x^3 + 2x^2 + x - 3):\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $(2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2):(-x+3)$

a) Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 15x + 44$. Resto: 136

b) Cociente: $-2x^3 + 4x^2 - 11x + 27$. Resto: -51

c) Cociente: $-3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}$. Resto: $-\frac{21}{8}$

d) Cociente: $-2x^3 - 8x^2 - 26x - 78$. Resto: 232

72. Aplicando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la siguiente división $(x^8 - a^8):(x-a)$.

Cociente: $x^7 + ax^6 + a^2x^5 + a^3x^4 + a^4x^3 + a^5x^2 + a^6x + a^7$ Resto: 0

Teorema del resto y del factor

73. Sin realizar las divisiones, calcula su resto.

a) $(x^7 + x^3 - 2x + 1):(x-3)$

b) $(x^{12} - x^5 - x + 12):(x+1)$

a) $R = 3^7 + 3^3 - 6 + 1 = 2209$

b) $R = (-1)^{12} - (-1)^5 - (-1) + 12 = 15$

74. Sin realizar la división, comprueba que el binomio $x-3$ es un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x - 6$.

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = 3$ es 0, por lo que se deduce que $x - 3$ es un factor del polinomio.

75. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 6x^5 - 44x^3 - 88x - k$ sea divisible por $x - 3$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x-3$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$ sea igual a 0.

$P(3) = 1458 - 1188 - 264 - k = 0 \Rightarrow k = 6$

76. Halla el valor de k para el que el polinomio $P(x) = 3x^3 - kx^2 + 6k - 2$ sea divisible por $x + 2$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x+2$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = -2$ sea igual a 0.

$P(-2) = -24 - 4k + 6k - 2 = 0 \Rightarrow k = 13$

77. La división de $x^3 + mx + 2$ entre $x - 2$ da 6 como resto. ¿Cuánto vale m? ¿Cuál es el cociente?

$2^3 + 2m + 2 = 6$, por lo que $m = 2$, y el cociente es $x^2 + 2x + 2$.

78. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x = 1$ y que $P(3) = 10$.

Para que $x = 1$ sea una raíz, debe ser $P(x) = (ax + b)(x - 1)$, y como $P(3) = 10$, entonces $(3a + b)(3 - 1) = 10$, luego $3a + b = 5$. Por ejemplo, $a = 1$, $b = 2$.

$P(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

79. Halla la expresión de todos los polinomios de segundo grado que tienen por raíces –1 y 3. Determina aquel cuyo valor numérico para x = 5 es 24.

$P(x) = a(x+1)(x-3)$ $P(5) = a \cdot 6 \cdot 2 = 24$, por lo que $a = 2$ $P(x) = 2(x+1)(x-3) = 2x^2 - 4x - 6$

80. Halla el número que hay que sumar al polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x$ para que sea divisible por $(x - 3)$.

Se trata de hallar a para que $3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + a = 0$. Resolviendo, se tiene que $a = 6$.

81. Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^5 + ax^3 + b$ sea divisible por $(x^2 - 1)$.

Como $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, el polinomio debe ser divisible por $(x - 1)$ y por $(x + 1)$, es decir: $1^5 + a \cdot 1^3 + b = 0$ y $(-1)^5 + a(-1)^3 + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} a+b=-1 \\ -a+b=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-1,\ b=0$$

Factorización de polinomios

82. Encuentra las raíces del siguiente polinomio, teniendo en cuenta que todas ellas son números enteros.

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

$x = 2$, $x = -3$, $x = 4$

83. Escribe un polinomio $P(x)$ cuyas raíces sean únicamente $x = -2$, $x = 5$, $x = 3$ y $x = -1$. ¿Hay más de uno?

Por ejemplo: $P(x) = (x+2)(x-5)(x-3)(x+1)$

Sí hay más de uno, pues se puede multiplicar por constantes, cambiar las multiplicidades de los factores o polinomio sin raíces reales sin que varíen las raíces.

84. Factoriza, utilizando la regla de Ruffini.

a) $x^3 - 5x^2 - x + 5$
b) $x^3 - 3x + 2$
c) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 32x + 12$
d) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
f) $x^3 + x^2 - 5x + 3$
g) $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$

a) $(x-1)(x+1)(x-5)$
b) $(x-1)^2(x+2)$
c) $(x-1)^2(x+3)(x-2)^2$
d) $(x+1)^4$
e) $(x-3)(x+2)(x-1)$
f) $(x-1)^2(x+3)$
g) $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x^2+1)$

85. Descompón en factores primos los siguientes polinomios.

a) $x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2$
b) $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 3$
c) $10x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 19x - 3$
d) $3x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 11x^2 - 4x - 4$
e) $-2x^3 + 10x^2 - 14x + 6$

a) $x^2(x-2)(x-1)(x^2+x+1)$
b) $(x-1)(x+1)^2(2x-3)$
c) $(x-1)^2(2x+3)(5x-1)$
d) $(x-2)(x+1)(x+2)(3x^2+1)$
e) $-2(x-3)(x-1)^2$

86. Factoriza los siguientes polinomios utilizando las identidades notables.

a) $4x^2-12x+9$ **d)** $25x^2-20x+4$ **g)** $25x^2+20xy+4y^2$ **j)** $4x^4-16x^2y+16y^2$

b) $18-2x^2$ **e)** $12-3x^2$ **h)** $-4y^2+25x^6$ **k)** $4x^3-9y^4x$

c) x^4-4x^2 **f)** $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}$ **i)** $4x^2+12xy+9y^2s$ **l)** $a^2-(b+c)^2$

a) $(2x-3)^2$ **d)** $(5x-2)^2$ **g)** $(5x+2y)^2$ **j)** $(2x^2-4y)^2$

b) $2(3-x)(3+x)$ **e)** $3(2-x)(2+x)$ **h)** $(5x^3-2y)(5x^3+2y)$ **k)** $(2x-3y^2)(2x+3y^2)x$

c) $x^2(x-2)(x+2)$ **f)** $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$ **i)** $(2x+3y)^2$ **l)** $(a-b-c)(a+b+c)$

87. Descompón en factores los siguientes polinomios.

a) $x^2+y^2+2xy-z^2$ **b)** $4-9x^2-25y^2+30xy$

a) $(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$ **b)** $2^2-(3x-5y)^2=(2-3x+5y)(2+3x-5y)$

88. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.

a) $P(x)=x^2+x-2$, $Q(x)=x^2+2x-3$

b) $P(x)=2x^2-2$, $Q(x)=4x-4$

c) $P(x)=x-1$, $Q(x)=2x+2$ y $R(x)=3x^2-3$

d) $P(x)=x^2(x-2)$, $Q(x)=x(x^2-4)$ y $R(x)=x^3-2x^2$

e) $P(x)=x^2+5x+6$, $Q(x)=x^2-4$ y $R(x)=x+2$

a) m.c.d. $=x-1$; m.c.m. $=(x-1)(x+2)(x+3)$

b) m.c.d. $=2x-2$; m.c.m. $=4(x-1)(x+1)$

c) m.c.d. $=1$; m.c.m. $=6(x-1)(x+1)$

d) m.c.d. $=x(x-2)$; m.c.m. $=x^2(x-2)(x+2)$

e) m.c.d. $=x+2$; m.c.m. $=(x+3)(x+2)(x-2)$

Fracciones algebraicas

89. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{7x^2}{14x^2-21x}$ **d)** $\frac{3x^2-x}{x^3+2x}$ **g)** $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2+x-6}$ **j)** $\frac{x^4+10x^3+21x^2-40x-100}{x^4+3x-10}$

b) $\frac{12-3x}{x-4}$ **e)** $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ **h)** $\frac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

c) $\frac{3x^2-12}{x+2}$ **f)** $\frac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}$ **i)** $\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}$

a) $\frac{7x^2}{7x(2x-3)}=\frac{x}{2x-3}$

b) $\frac{-3(x-4)}{x-4}=-3$

c) $\frac{3(x-2)(x+2)}{x+2}=3(x-2)$

d) $\frac{x(3x-1)}{x(x^2+2)}=\frac{3x-1}{x^2+2}$

e) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$

f) $\frac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)}=-\frac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)}$

g) $\frac{(x+3)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)}=x-2$

h) $\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{x+1}{x-1}$

i) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}=\frac{x-1}{x+3}$

j) $\frac{(x+2)(x-2)(x+5)^2}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-5)}=\frac{(x-2)(x+5)^2}{(x^3-2x^2+4x-5)}$

90. Halla, simplificando el resultado.

a) $x+1+\dfrac{1}{x-1}$ **b)** $2x-\dfrac{2x^2-1}{2+x}$

a) $\dfrac{x^2}{x-1}$ **b)** $\dfrac{4x+1}{2+x}$

91. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}$ **c)** $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}$ **d)** $t-\dfrac{t^2}{t-1}+\dfrac{1}{t+1}$

a) $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1+x^3+x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{x(x+5)-(2x-1)(x-5)-50}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{x^2+5x-2x^2+10x+x-5-50}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{-x^2+16x-55}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{(11-x)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{11-x}{x+5}$

c) $\dfrac{(2x^2-x)(x-3)+2x(x+3)-12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^3-6x^2-x^2+3x+2x^2+6x-12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^3-5x^2-3x}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x^2+x}{x+3}$

d) $\dfrac{t^3-t-t^3-t^2+t-1}{(t-1)(t+1)}=\dfrac{-t^2-1}{t^2-1}=-\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

92. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+2}$ **b)** $\dfrac{x^3-x}{2x-4}:\dfrac{4x+4}{3x-6}$ **c)** $\left(1+\dfrac{1}{x}\right):\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ **d)** $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right):\left(\dfrac{1+x}{1-x}:\dfrac{x+1}{x}\right)$

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$

b) $\dfrac{x(x-1)(x+1)\cdot 3(x-2)}{2(x-2)\cdot 4(x+1)}=\dfrac{3x(x-1)}{8}=\dfrac{3x^2-3x}{8}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right):\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=\dfrac{(x+1)x^2}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{x-1}$

d) $\dfrac{(x-1)^3(x+1)}{x(x+1)^3}=\dfrac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}$

93. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ **b)** $\dfrac{x^4-y^4}{(x-y)^2}$ **c)** $\dfrac{x^4-16}{(x+2)^2}$ **d)** $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$

a) $\dfrac{(x-y)(x+y)}{x+y}=x-y$ **c)** $\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x+2)^2}=\dfrac{(x-2)(x^2+4)}{x+2}=\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x+2}$

b) $\dfrac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)^2}=\dfrac{(x+y)(x^2+y^2)}{x-y}=\dfrac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x-y}$ **d)** $\dfrac{\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{\dfrac{y-x}{xy}}=\dfrac{xy(y-x)(y+x)}{x^2y^2(y-x)}=\dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

94. Calcula el valor de k para que, al simplificar la fracción algebraica $\dfrac{3+\dfrac{x-9}{x-1}}{k-\dfrac{x+1}{x-1}}$, resulte un polinomio de primer grado. Escribe la expresión de dicho polinomio.

$$\frac{3+\dfrac{x-9}{x-1}}{k-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{3x-3+x-9}{x-1}}{\dfrac{kx-k-x-1}{x-1}}=\frac{(4x-12)(x-1)}{\big((k-1)x-(k+1)\big)(x-1)}=\frac{4x-12}{(k-1)x-(k+1)}$$

El denominador debe ser constante, por tanto: $k = 1$, y el polinomio será: $\dfrac{4\mathbf{x}-12}{-2}=-2x+6$.

Síntesis

95. Halla un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- **El coeficiente del término cuadrático es la unidad.**
- **Es divisible por x – 1.**
- **Toma el valor 24 para x = –3.**

Ya que el coeficiente de x^2 es 1 y que el polinomio es de segundo grado y divisible por $x - 1$, tendrá la forma: $P(x) = (x - 1)(x + a)$. Para que quede totalmente determinado, sólo es necesario calcular a.

Dado que $P(-3) = 24$, se obtiene que $a = -3$, luego $P(x) = (x - 1)(x - 3)$.

96. Escribe un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- **Es divisible por $x - 3$.**
- **Es divisible por $x + 4$.**
- **El valor numérico en el punto $x = -1$ vale 12.**

Según el teorema del factor, el polinomio debe tener como factores $x - 3$ y $x + 4$. Por tanto, la expresión del polinomio será de la forma $P(x) = k(x + 4)(x - 3)$, y como $P(-1) = 12$, tenemos que $k = -1$, luego $P(x) = -x^2 - x + 12$

97. Escribe un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces:

a) 1, –2, 3 y –4 **b)** 1, 2 y –2 (doble) **c)** –1 y 1, las dos dobles

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = x^4 + 2x^3 -13x^2 -14x + 24$

b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)^2 = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

c) $(x - 1)^2(x + 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

98. Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 + bx^2 - 3x$, sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces.

Como $x = 1$ es una raíz, entonces $1^3 + b \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 0$, de donde $b = 2$ y $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$, cuya factorización es $P(x) = x(x - 1)(x + 3)$.

99. Dado el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 -8x + a$:

a) Calcula el valor de a para que $P(-1) = -2$.

b) Para el valor de a hallado, descompón el polinomio como producto de factores de primer grado.

c) Calcula las raíces enteras de $P(x)$

a) $P(-1) = 2 - 9 + 9 + 8 + a = -2$, luego $a = -12$

b) $P = (x - 1)(x + 2)^2(2x + 3)$

c) $x = 1$, $x = -2$ y $x = -\dfrac{3}{2}$ (que no es entera)

100. Halla en cada caso el polinomio *P*(*x*) para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\dfrac{x+2}{2x-5}=\dfrac{x+3}{P(x)}$ **b)** $\dfrac{P(x)}{x^2+2x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}$

a) $P(x)=\dfrac{(x+3)(2x-5)}{x+2}$, que no se puede simplificar, $P(x)$ no puede ser un polinomio.

b) $P(x)=\dfrac{x^2(x^2+2x+1)}{(x+1)}=\dfrac{x^2(x+1)^2}{x+1}=x^2(x+1)=x^3+x^2$

101. Calcula los valores de *a* y de *b* para que el polinomio $4x^3+4x^2+ax+b$ sea divisible por $2x^2-x-1$. Escribe el cociente de la división.

$$\frac{4x^3+4x^2+ax+b}{2x^2-x-1}=2x+3+\frac{(a+5)x+(b+3)}{2x^2-x-1}\Rightarrow\begin{cases}a+5=0\\b+3=0\end{cases}\Rightarrow a=-5\quad b=-3$$

102. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(2x-1)(x+3)^2-3(x^2-x)(x+3)}{(x+3)^3}$ **b)** $\dfrac{(4x^2-2x^3)\cdot 6x}{x^2(x-2)}$

a) $\dfrac{-x^3+5x^2+21x-9}{(x+3)^2}=\dfrac{-(x+3)(x^2-8x+3)}{(x+3)^3}=-\dfrac{x^2-8x+3}{(x+3)^2}$ **b)** $\dfrac{-2x^2(x-2)6x}{x^2(x-2)}=-12x$

103. Calcula y simplifica la siguiente expresión.

$$\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x-1}{x-1}}{\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{x+1}{x-1}}$$

$$\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x-1}{x-1}}{\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+1}{1-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{2}{1+x}}{-\dfrac{2}{x-1}}=\frac{1-x}{1+x}$$

104. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas con dos variables.

b) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{a}{xz}+\dfrac{a^2}{yz}$ **c)** $\left(x+\dfrac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}$ **e)** $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{1}{x-y}:\dfrac{1}{x^2+y^2-2xy}$ **d)** $\dfrac{3x^2y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}$ **f)** $(a-b)^2:\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

a) $\dfrac{z+ay+a^2x}{xyz}$

b) $\dfrac{x^2+y^2-2xy}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2}{x-y}=x-y$

c) $\left(\dfrac{2x-x^2+x^2+1-2x}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2-x}\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{3x^2y(x-y)(x+y)}{(x-y)6xy^2(x+y)}=\dfrac{x}{2y}$

e) $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2+a^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab+a^2}{(a-b)(a+b)}$

f) $(a-b)^2:\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)=\dfrac{(a-b)^2ab}{(b-a)}=(b-a)ab=ab^2-a^2b$

105. Dadas las expresiones: $\boldsymbol{A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + x}}}}$ $\boldsymbol{B = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + x}}}}}$

a) Simplifícalas, expresando el resultado como cociente de polinomios.

b) Súmalas.

c) Multiplícalas.

a) $A = \dfrac{3x+5}{2x+3}$, $B = \dfrac{5x+8}{3x+5}$ **b)** $A + B = \dfrac{3x+5}{2x+3} + \dfrac{5x+8}{3x+5} = \dfrac{19x^2+61x+49}{6x^2+19x+15}$ **c)** $AB = \dfrac{3x+5}{2x+3} \cdot \dfrac{5x+8}{3x+5} = \dfrac{5x+8}{2x+3}$

CUESTIONES

106. Escribe dos polinomios diferentes que tengan las mismas raíces:

a) Si son del mismo grado.

b) Si tienen diferente grado

a) $P(x) = 2x + 3 \quad Q(x) = 4x + 6$

b) $P(x) = 2x + 3 \quad Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$

107. Di si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

a) Un polinomio de tercer grado puede tener seis raíces reales distintas.

b) Un polinomio de tercer grado puede tener una única raíz real.

c) La suma de dos polinomios de cuarto grado puede dar como resultado un polinomio de tercer grado.

d) El producto de dos polinomios de cuarto grado puede dar como resultado un polinomio de tercer grado.

e) Las fracciones algebraicas $A(x) = \dfrac{x+1}{x}$ y $B(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ son equivalentes.

f) Las fracciones algebraicas $A(x) = \dfrac{x+1}{x}$ y $B(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ son exactamente iguales.

a) Falso. Como máximo puede tener tres raíces reales distintas

b) Verdadero: $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$

c) Verdadero: $P(x) = x^4 + x^3 \quad Q(x) = -x^4 + 1 \qquad P(x) + Q(x) = x^3 + 1$

d) Falso. El producto es siempre de octavo grado.

e) Verdadero: $(x + 1)(x^2 - x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$

f) Falso. Para x = 1 A(x) = 2 y B(x) no está definida.

108. Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios. En caso afirmativo, indica el grado del mismo.

a) $A(x) = -2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - 3$ **b)** $B(x) = -3x^2 - 2x + \dfrac{1}{x}$ **c)** $C(x) = 2x^5 - \dfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x$ **d)** $C(x) = 2x^5 - \dfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{2x}$

a) Polinomio de grado 2. **b)** No es un polinomio. **c)** Polinomio de grado 5. **d)** No es un polinomio.

109. Demuestra que el polinomio $\boldsymbol{P(x) = ax^3 + ax^2 + a}$ con $\boldsymbol{a > 0}$ no tiene ninguna raíz real positiva.

Si $x = r > 0$ es una raíz real positiva, entonces $P(r) = a(r^3 + r^2 + 1) = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + 1 = 0$.

Pero si $r > 0$, entonces $r^3 + r^2 + 1 > 1$. Por lo tanto, no puede ser nulo.

110. Demuestra esta igualdad algebraica. $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$$((x+y)+z)^2 = (x+y)^2 + z^2 + 2(x+y)z = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

PROBLEMAS

111. Escribe expresiones algebraicas para las siguientes situaciones.

a) El perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide x.

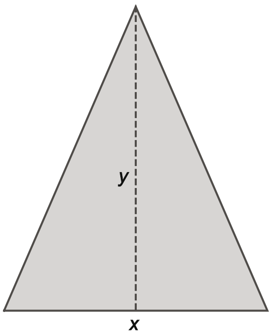
b) La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos, siendo n el primero de ellos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles donde el lado desigual mide x y la altura y.

a) Sea a la medida del lado del cuadrado: $x^2 = a^2 + a^2$, y despejando a, $a = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, luego $P = 4a = 2\sqrt{2}\,x$.

b) Sean n, $n+2$ y $n+4$ los números consecutivos. Entonces: $S = n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 = 3n^2 + 12n + 20$

c)



Cada uno de los lados iguales es:

$$l = \sqrt{y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4y^2+x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2+x^2}.$$

Por tanto: $P = 2l + x = 2\,P = 2l + x = 2\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{4y^2+x^2} + x = \sqrt{4y^2+x^2} + x$

112. Se consideran todos los triángulos rectángulos tales que las medidas de sus catetos son dos números que se diferencian en dos unidades. Escribe una expresión que permita calcular el perímetro de dichos triángulos si *b* es el cateto mayor.

Sean b y $b-2$ las medidas de los catetos. Utilizando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{b^2+(b-2)^2}$. Luego:

$$P = b + b - 2 + \sqrt{b^2+(b-2)^2} = 2b - 2 + \sqrt{2b^2 - 4b + 4}$$

113. Si *x* e *y* son dos números, expresa algebraicamente:

a) El primero más el cuadrado del segundo.

b) El primero por el cuadrado del segundo.

c) El producto del primero por el inverso del segundo.

d) Sabiendo que $x + y = 5$, expresa las relaciones anteriores dependiendo solo del número x.

e) Si $xy = 10$, halla el valor de $\dfrac{x^2+y^2-(x+y)^2}{5}$.

a) $x + y^2$ **b)** xy^2 **c)** $x\dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$

d) $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$: $x + y^2 = x + (5-x)^2 = x^2 - 9x + 25$ $xy^2 = x(5-x)^2 = x^3 - 10x^2 + 25x$ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{5-x}$

e) $xy = 10 \rightarrow \dfrac{x^2+y^2-(x+y)^2}{5} = \dfrac{x^2+y^2-x^2-y^2-2xy}{5} = \dfrac{-2xy}{5} = \dfrac{-2\cdot 10}{5} = -4$

114. Halla las expresiones algebraicas que dan el producto de:

a) Tres números naturales consecutivos.

b) Tres números pares consecutivos.

c) Tres múltiplos de cinco consecutivos.

a) $n(n+1)(n+2)$ **b)** $2n(2n+2)(2n+4)$ **c)** $5n(5n+5)(5n+10)$

115. La altura en metros de un cohete viene dada por la expresión $h(t) = 60t - 5t^2$, en la que t mide el tiempo en segundos.

a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 3, 6 y 8 segundos? ¿Y al cabo de 12?

b) Interpreta los resultados.

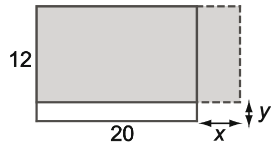
a) $h(1) = 60 - 5 = 55$ m; $h(3) = 180 - 45 = 135$ m; $h(6) = 360 - 180 = 180$ m; $h(8) = 160$ m, $h(12) = 0$ m

b) El cohete asciende durante los primeros 6 s, momento en el que comienza a caer, llegando al suelo a los 12 s.

116. Se considera un rectángulo de 20 metros de base y 12 de altura.

a) Escribe la expresión algebraica que determina el área de un nuevo rectángulo que se obtiene al incrementar la medida de la base en x metros y disminuir su altura en y metros.

b) Calcula el área del rectángulo obtenido al aumentar la base en 2 m y disminuir la altura en 4 m.



a) Las medidas del nuevo rectángulo son $20 + x$ y $12 - y$.

Por tanto, su área se puede escribir como: $S = (20 + x)(12 - y)$.

b) Para los valores indicados: $S = (20 + 2)(12 - 4) = 176$ m^2.

117. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 4 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 16 €, y el de tramo vertical, 25 €. Expresa el coste del marco en función de la longitud, x, del tramo horizontal.

Como el área es 4, la longitud del tramo horizontal es x y la longitud del tramo vertical es $\frac{4}{x}$.

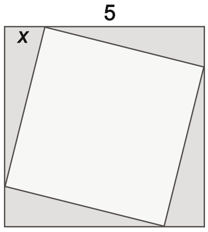
El coste es $C(x) = 16 \cdot 2x + 25 \cdot 2 \cdot \frac{4}{x} = 32x + \frac{200}{x} = \frac{32x^2 + 200}{x}$.

118. Halla la expresión algebraica que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base, x. ¿Cuánto vale su área si $x = 2$ cm?

Como el perímetro es 8 y la base es x, los lados iguales miden $4 - \frac{x}{2}$, y aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que la altura es $\sqrt{\left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 4x}$, por lo que la superficie es $S(x) = \frac{x}{2}\sqrt{16 - 4x}$ cm^2.

Sustituyendo en $x = 2$ se tiene que $S(2) = \frac{2}{2}\sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$ cm^2.

119. En un cuadrado de lado 5 unidades de longitud se marcan cuatro puntos, uno en cada lado, de forma que su distancia al vértice más próximo es de *x* unidades. Estos cuatro puntos forman un nuevo cuadrado tal y como muestra la figura.



a) Escribe una expresión algebraica que determine el perímetro del nuevo cuadrado.

b) Escribe una expresión algebraica que determine el área del nuevo cuadrado.

Lado del nuevo cuadrado: $L=\sqrt{x^2+(5-x)^2}=\sqrt{x^2+25+x^2-10x}=\sqrt{2x^2-10x+25}$

a) $P(x)=4\sqrt{2x^2-10x+25}$ **b)** $A(x)=L^2=2x^2-10x+25$

120. En la siguiente tabla aparece el número de CD que está dispuesto a comprar un cliente en función del precio de cada uno.

Precio en céntimos	Número de unidades
24	50
22	60
20	70
18	80

a) Establece una expresión algebraica que determine el precio de cada CD si se adquieren *x* unidades.

b) Establece una expresión algebraica que determine el precio total a pagar al comprar *n* CD (*n* comprendido entre 50 y 80).

a) El precio que se paga por cada CD es: $p(x)=24-2\cdot\frac{x-50}{10}=24-\frac{x-50}{5}=24-\frac{x}{5}+10=34-\frac{x}{5}$

b) $P(n)=n\left(34-\frac{n}{5}\right)=34n-\frac{n^2}{5}$

121. El coste de producir *x* chips de memoria para ordenador (*x* entre 0 y 5) viene dado por el polinomio $C(x)=-\frac{4}{5}x^2+8x$ €. El precio por unidad al que se pueden vender las *x* unidades producidas es de $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+20$ €.

a) Indica los ingresos que se obtienen al producir y vender 2 unidades.

b) Escribe el polinomio que determina el beneficio según las *x* unidades producidas y vendidas.

c) Indica el beneficio si se han producido y vendido 3 unidades.

d) Indica el beneficio si se han producido y vendido 5 unidades.

e) Interpreta los resultados.

a) $2P(2)-C(2)=2\left(-\frac{1}{2}\cdot 2^2+20\right)-\left(-\frac{4}{5}\cdot 2^2+8\cdot 2\right)=23{,}2$ €

b) $B(x)=\text{Ingreso}-\text{Coste}=\left(-\frac{1}{2}x^2+20\right)x-\left(-\frac{4}{5}x^2+8x\right)=-\frac{1}{2}x^3+20x+\frac{4}{5}x^2-8x=-\frac{1}{2}x^3+\frac{4}{5}x^2+12x$

c) $B(3)=-\frac{1}{2}\cdot 27+\frac{4}{5}\cdot 9+12\cdot 3=29{,}7$ €

d) $B(5)=-\frac{1}{2}\cdot 125+\frac{4}{5}\cdot 25+12\cdot 5=17{,}5$ €

e) Se obtienen mayores beneficios si se producen 3 unidades de memoria que si se producen 5.

122. Se consideran tres barras homogéneas de metal compuestas de la siguiente forma:

- **Primera barra: 30 g de oro, 45 g de plata y 75 g de cobre**
- **Segunda barra: 60 g de oro, 30 g de plata y 135 g de cobre**
- **Tercera barra: 45 g de oro, 60 g de plata y 75 g de cobre**

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 64,5 g de oro, 69 g de plata y 136,5 de cobre?

Sean x, y, z los gramos de la primera, segunda y tercera barra respectivamente.

	Oro	Plata	Cobre
Primera barra	$\frac{30}{150}=\frac{2}{10}$	$\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$	$\frac{75}{150}=\frac{5}{10}$
Segunda barra	$\frac{60}{225}=\frac{4}{15}$	$\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$	$\frac{135}{225}=\frac{9}{15}$
Tercera barra	$\frac{45}{180}=\frac{3}{12}$	$\frac{60}{180}=\frac{4}{12}$	$\frac{75}{180}=\frac{5}{12}$

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=64,5 \\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=69 \\ \frac{1}{2}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=136,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+16y+15z=3870 \\ 18x+8y+20z=4140 \\ 30x+36y+25z=8190 \end{cases} \Rightarrow x=90, y=90, z=90$$

Se deberán tomar 90 g de la primera barra, 90 g de la segunda barra y 90 g de la tercera barra.

123. Un comerciante adquiere dos tipos de café para tostar, moler y, posteriormente, mezclar. El de mayor calidad tiene un precio de 10 €/kg, mientras que por el otro pagó 7,50 €/kg. El comerciante quiere obtener una mezcla que salga a 8,40 €/kg. ¿Cuál deberá ser la proporción de los tipos de cafés?

Sean x los kg de café de mayor calidad e K los kg de café de menor calidad. Entonces:

$10x+7,5y=8,4(x+y)$. Por tanto, $10x+7,5y=8,4x+8,4y \Rightarrow 1,6x-0,9y=0 \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{0,9}{1,6}=\frac{9}{16}$.

Deberá mezclar 9 partes del café de mayor calidad con 16 partes del café de inferior calidad.

124. Expresa algebraicamente el producto de un número por el cubo de otro si entre ambos suman 24.

Como entre los dos números suman 24, si uno es x, el otro es $24 - x$, por lo que su producto es $x(24 - x)^3$.

125. Los costes, en euros, de fabricar *x* pares de zapatillas deportivas vienen dados por la expresión:

$$C(x) = -\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600$$

a) Calcula el coste total que supone fabricar 50 pares de zapatillas.

b) Indica cuáles son los costes fijos.

c) Indica cuáles son los costes variables.

d) Indica cuáles son los costes totales para cada par de zapatillas cuando se fabrican *x* pares.

e) Indica cuáles son los costes variables para cada par de zapatillas cuando se fabrican *x* pares.

f) Indica cuáles son los costes totales por cada par de zapatillas cuando se fabrican 75 pares.

a) $C(50) = -\frac{4}{25}\cdot 2500 + 70\cdot 50 + 600 = 3700$ €

b) Los costes fijos no dependen de la producción, vienen dados por el término independiente: $C_f = 600$ €.

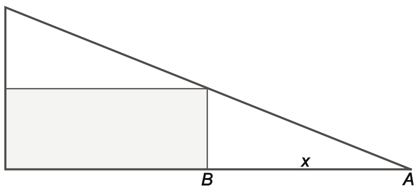
c) Los costes variables son el total de costes menos los costes fijos, por tanto: $C_v = -\frac{4}{25}x^2 + 70x$.

d) $\frac{C(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600}{x} = -\frac{4}{25}x + 70 + \frac{600}{x}$

e) $\frac{C_v(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x}{x} = -\frac{4}{25}x + 70$

f) $\frac{C(75)}{75} = \frac{-\frac{4}{25}\cdot 75^2 + 70\cdot 75 + 600}{75} = 66$ €

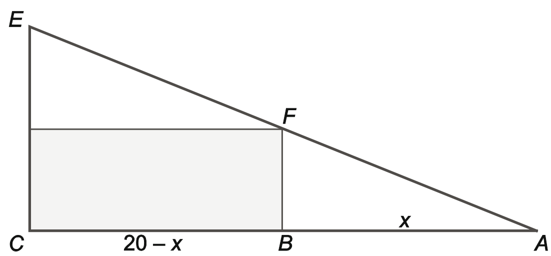
126. Un rectángulo se encuentra inscrito en un triángulo rectángulo de catetos 8 y 20 cm tal y como muestra la figura.



a) Escribe la expresión algebraica que determina el área del rectángulo suponiendo que la distancia entre los puntos *A* y *B* es de *x* metros.

b) Calcula los valores numéricos de la expresión anterior para $x = 2$, $x = 5$ y $x = 10$.

a) Los triángulos *ABF* y *ACE* son semejantes y, por tanto, verifican el teorema de Tales:



$$\frac{x}{FB} = \frac{20}{8} \Rightarrow FB = \frac{2x}{5}$$

El área del rectángulo será:

$$S = (20 - x)\cdot\frac{2x}{5} = \frac{40x - 2x^2}{5}\ \text{cm}^2$$

b)

$$S(2) = \frac{80 - 8}{5} = \frac{72}{5} = 14{,}4\ \text{cm}^2$$

$$S(5) = \frac{200 - 50}{5} = \frac{150}{5} = 30\ \text{cm}^2$$

$$S(10) = \frac{400 - 200}{5} = \frac{200}{5} = 40\ \text{cm}^2$$

ENTORNO MATEMÁTICO

Álgebra, zombis, alienígenas y lechugas

La empresa de animación digital FRIKACTION comercializa tres videojuegos: Frikaction 1 en la que unas cucarachas deben luchar contra una plaga de zombis, Frikaction 2 en la que se utilizan lechugas para acabar con los alienígenas que han invadido la Tierra, y Frikfashion en la que se utilizan tomates y otras hortalizas para adornar modernas ciudades.

La siguiente tabla muestra los datos del negocio:

Mantenimiento del local y otros costes fijos			1250 € por día
	Frikaction 1	Frikaction 2	Frikfashion
Precio de venta por unidad	45	39	30
Costes de fabricación por unidad	25	21	21

Un estudio de mercado ha demostrado que las preferencias de los jugadores se reparten de manera desigual; la segunda parte del juego Frikaction cumple con la premisa de que "segundas partes nunca fueron buenas" y no ha tenido tanta aceptación como la primera parte, mientras que el juego Frikfashion no ha sido bien acogido por los jugadores. De tal modo que, por cada tres unidades vendidas de Frikaction 1, se venden dos unidades de Frikaction 2 y una de Frikfashion.

Suponiendo que se producen y venden *x* unidades diarias del juego Frikaction 1 y que del resto de juegos se fabrican y venden en la proporción estimada por el estudio:

a) Calcula la expresión algebraica que proporciona los costes totales.

b) Calcula los ingresos totales.

c) Calcula el beneficio de la empresa y halla el beneficio para los casos específicos de $x = 25$ y $x = 100$ e interpreta los resultados.

a) $C(x) = 1250 + 25x + 21\cdot\frac{2}{3}x + 21\cdot\frac{x}{3} = 1250 + 25x + 14x + 7x = 1250 + 46x$

b) $I(x) = 45x + 39\cdot\frac{2}{3}x + 30\cdot\frac{x}{3} = 45x + 26x + 10x = 81x$

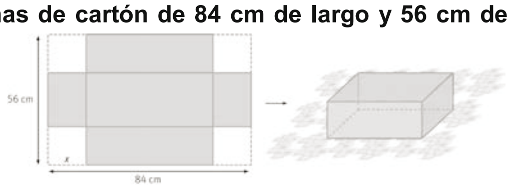
c) $B(x) = I(x) - C(x) = 35x - 1250$ $B(25) = -375$ € de pérdidas. $B(100) = 2250$ € de beneficios.

Para $x = 25$ hay pérdidas y para $x = 100$ hay beneficios.

Las cajas

La empresa FRIKACTION ha decidido asumir la fabricación de las cajas para guardar y enviar a las tiendas de venta los lotes de juegos que comercializa. Para ello utiliza planchas de cartón de 84 cm de largo y 56 cm de ancho.

Para construir la caja, el procedimiento que han implementado en la empaquetadora consiste en recortar cuatro cuadrados iguales en las cuatro esquinas y ajustarlos tal y como muestra la figura.



a) Calcula expresiones algebraicas que determinen la superficie y el volumen de la caja sin tapa que se obtiene en función del lado x de los cuadrados recortados.

b) Elabora una hoja de cálculo tal que muestre la superficie y el volumen de la caja para diferentes valores de *x*.

c) Con ayuda de la hoja de cálculo anterior, establece la longitud *x* que hace que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuánto vale la superficie en este caso?

a) $S(x) = 56\cdot 84 - 4x^2 = 4704 - 4x^2$ $V(x) = (84-2x)(56-2x)x = 4x^3 - 280x^2 + 4704x$

b)

x	7	8	9	10	10,97	10,98	10,99	11	12
Superficie	4508	4448	4380	4304	4222,6397	4221,7584	4220,8798	4220	4128
Volumen	20508	21760	22572	23040	23187,98669	23188,02077	23188,0252	23188	23040

c) El máximo volumen se obtiene al cortar cuadrados de lado 10,98 cm. La superficie aproximada, en este caso, es de 4221,76 cm^2

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula y simplifica.

a) $\left(2x^2-3x+1\right)\left(-x^2+2x-2\right)-2\left(2x-3\right)^2$

b) $2\left(3x-5\right)^2-3(3x-5)(3x+5)-2(3x+5)^2$

c) $2(2x+1)^3+3(2x+1)^2$

d) $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{5}\right)\left(3x^2+\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}x-1\right)^2$

a) $\left(2x^2-3x+1\right)\left(-x^2+2x-2\right)-2\left(2x-3\right)^2=-2x^4+7x^3-19x^2+32x-20$

b) $2\left(3x-5\right)^2-3(3x-5)(3x+5)-2(3x+5)^2=-27x^2-120x+75$

c) $2(2x+1)^3+3(2x+1)^2=16x^3+36x^2+24x+5$

d) $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{5}\right)\left(3x^2+\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}x-1\right)^2=\dfrac{9}{2}x^4+\dfrac{51}{160}x^2+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{33}{50}$

2. Divide los polinomios:

a) $\left(6x^4-11x^3+14x^2+x-10\right):\left(3x^2-x-2\right)$

b) $\left(3x^4-4x^3+17x^2-4x-12\right):\left(x^2-x+6\right)$

a) Cociente: $2x^2-3x+5$. Resto: 0

b) Cociente: $3x^2-x-2$. Resto: 0

3. Factoriza los polinomios:

a) $x^3-7x^2+16x-12$

b) $2x^4+5x^3-21x^2+19x-5$

c) $16x^4-16x^2+4$

d) $2x^3y-3x^2y^2$

a) $x^3-7x^2+16x-12=(x-3)(x-2)^2$

b) $2x^4+5x^3-21x^2+19x-5=(x-1)^2(x+5)(2x-1)$

c) $16x^4-16x^2+4=4\left(2x^2-1\right)^2=4\left(\sqrt{2}x-1\right)^2\left(\sqrt{2}x+1\right)^2$

d) $2x^3y-3x^2y^2=x^2y(2x-3y)$

4. Calcula el valor numérico para $x = 1$ y para $x = -2$ del polinomio: $P(x) = -3x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 15x + 122$.

$P(1)=115 \quad P(-2)=208$

5. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x)=-3x^3+12x^2+kx-21$ sea divisible por $x+3$.

$P(x)=-3\left(-3\right)^3+12\left(-3\right)^2-3k-21=-3k+168=0\Rightarrow k=56$

6. Utilizando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la división $\left(2x^3+3x-2\right):\left(2x-1\right)$.

Cociente: $C\left(x\right)=x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{4}$ Resto: $-\dfrac{1}{4}$

7. Calcula el valor de k para que el valor numérico del polinomio $P(x) = -3x^3 - 2x^2 + kx - 6$ en el punto $x = -3$ valga 48.

$P(-3)=-3\left(-3\right)^3-2\left(-3\right)^2-3k-6=-3k+57=48\Rightarrow k=3$

8. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 52x - 60 \qquad Q(x) = x^3 - 7x + 6$$

$P(x) = (x-2)^2(x+3)(x-5)$ $Q(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

Por tanto el m.c.d de los dos polinomios es $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$ y su m.c.m. es $(x-1)(x+3)(x-2)^2(x-5)$.

9. Calcula y simplifica.

a) $\dfrac{2x}{x-3} - 3\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) - \dfrac{7}{x^2-9}$

b) $1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{3}{x^2+2x+1}$

a) $\dfrac{2x}{x-3} - 3\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) - \dfrac{7}{x^2-9} = \dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{9x-3}{x+3} - \dfrac{7}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x(x+3)-(9x-3)(x-3)-7}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-7x^2+36x-16}{x^2-9}$

b) $1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{3}{x^2+2x+1} = 1 + \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2+2x(x+1)-3}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+4x-2}{x^2+2x+1}$

10. Determina, mediante una expresión algebraica, el área de un triángulo equilátero de perímetro 3*x*.

$S(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

11. Una empresa fabrica y vende un cierto producto. El coste en euros para producir *x* unidades viene dado por:

$$C(x) = \left(\frac{x}{250}\right)^2 + \frac{x}{500} + 20$$

Se sabe, además, que el precio al que puede vender cada unidad es $p(x) = \dfrac{x}{10\,000} - 0{,}25$ €. Calcula la expresión algebraica que determina los beneficios.

$B(x) = I(x) - C(x) = x\left(\dfrac{x}{10\,000} - 0{,}25\right) - \left(\dfrac{x}{250}\right)^2 - \dfrac{x}{500} - 20 = \dfrac{21x^2 - 63\,000x - 5\,000\,000}{250\,000}$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La factorización del polinomio $P(x,y) = 16x^4 - 81y^2$ es :

A. $(2x-3y)^4$

B. $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$

C. $(4x+9y)^2(4x-9y)^2$

D. $(8x^3-27y^3)(2x-3y)$

Solución: B

2. La suma de las fracciones algebraicas $\frac{1}{x}-\frac{1+x}{x^2}$ es:

A. $\frac{-1}{x^2}$

B. $\frac{1}{x^2}$

C. $\frac{(2x^2-x)}{x^3}$

D. Ninguna de las anteriores

Solución: A

3. La diferencia de los lados de dos cuadrados es 3 cm. Si el lado del pequeño mide *x* cm, el valor absoluto de la diferencia de las áreas es:

A. 15 cm^2 **B.** 27 cm^2 **C.** $6x+9$ cm^2 **D.** $6x-9$ cm^2

Solución: C

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Se consideran las fracciones algebraicas:

$$A(x)=\frac{x+2}{x+1} \qquad B(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$$

A. Son exactamente iguales.

B. Son equivalentes.

C. El valor numérico en $x=1$ es el mismo.

D. Los valores numéricos en todos los puntos distintos de –1 y –2 son iguales.

Solución: B, C y D

5. Se consideran las expresiones algebraicas:

$$A(x)=\sqrt{2}x^2 \quad B(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{x} \quad C(x)=\frac{2+x}{\sqrt{x}}$$

A. Ninguna es un polinomio.

B. Solo una de ellas es un monomio.

C. Dos son polinomios.

D. Todas son polinomios.

Solución: B

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se sabe que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ verifican la siguiente relación $P(x) = (x–1)Q(x) + R$ siendo R un número real

Se consideran las afirmaciones:

1. $P(1)=0$ **2. $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.**

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes entre sí.$\Rightarrow$ a pero a $\not\Rightarrow$ b.

Solución: A

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se quiere calcular el valor numérico en $x = a$, $y = b$ de la expresión algebraica:**

$$\frac{1}{\frac{y}{x} - \frac{1}{x}} : \frac{x^2 - 2x + 1}{xy - x - y + 1}$$

Para ello se aportan los siguientes datos:

1. $a = 3$

2. $b = -3$

A. Se puede eliminar 1.

B. Se puede eliminar 2.

C. No es necesario ningún dato.

D. No puede eliminarse ninguno.

Solución: B