7 Límites y continuidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Calcula, operando en las expresiones originales, y formando una tabla de valores los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+5x^2+x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+5x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(x^2+5x+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5x+1\right)=0^2+5\cdot 0+1=1$

x	$f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+x}{x}$
0,1	$\dfrac{0{,}1^3+5\cdot 0{,}1^2+0{,}1}{0{,}1}\simeq 1{,}5$
0,01	$\dfrac{0{,}01^3+5\cdot 0{,}01^2+0{,}01}{0{,}01}\simeq 1{,}05$
0,0001	$\dfrac{0{,}0001^3+5\cdot 0{,}0001^2+0{,}0001}{0{,}0001}\simeq 1{,}0005$
0,000 001	$\dfrac{0{,}000\,001^3+5\cdot 0{,}000\,001^2+0{,}000\,001}{0{,}000\,001}\simeq 1{,}000\,005$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{1}+1=2$

x	$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
0,9	$\dfrac{0{,}9-1}{\sqrt{0{,}9}-1}\simeq 1{,}95$
0,99	$\dfrac{0{,}99-1}{\sqrt{0{,}99}-1}\simeq 1{,}995$
0,9999	$\dfrac{0{,}9999-1}{\sqrt{0{,}9999}-1}\simeq 1{,}999\,95$
0,999 999	$\dfrac{0{,}999\,999-1}{\sqrt{0{,}999\,999}-1}\simeq 1{,}999\,999\,5$

c) $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^{x-2}=(2+1)^{2-2}=3^0=1$

x	$f(x)=(x+1)^{x-2}$
1,9	$(1{,}9+1)^{1{,}9-2}\simeq 0{,}9$
1,99	$(1{,}99+1)^{1{,}99-2}\simeq 0{,}99$
1,9999	$(1{,}9999+1)^{1{,}9999-2}\simeq 0{,}9999$
1,999999	$(1{,}999\,999+1)^{1{,}999\,999-2}\simeq 0{,}999\,999$

4. Calcula, para cada una de las siguientes funciones dadas, el límite pedido en cada caso.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ 3x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ no existe, pues los límites laterales existen pero no coinciden:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

b) En este caso existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y vale 5 pues los límites laterales coinciden:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+1\right)=2^2+1=5$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=3\cdot 2-1=5$

5. Ejercicio resuelto.

6. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, calcula los límites cuando $x\to a$ de las siguientes funciones.

a) $2f-3g$ **d)** $(f+g)$ **g)** $(f+g)^f$ **j)** $\dfrac{f}{g}$

b) $(3f)^2$ **e)** $\dfrac{g}{f}$ **h)** $(g)^{1-f}$

c) (fg) **f)** f^g **i)** $(f-4g)^{2f}$

En cada caso aplicamos las propiedades de los límites de funciones obtenidas mediante operaciones:

a) $\lim\limits_{x\to a}(2f-3g)(x)=2\lim\limits_{x\to a} f(x)-3\lim\limits_{x\to a} g(x)=2(-3)-0=-6$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[(3f)^2\right](x)=\left(3\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2=\left[3\cdot(-3)\right]^2=81$

c) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]=(-3)\cdot 0=0$

d) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=(-3)+0=-3$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\dfrac{0}{-3}=0$

f) $\lim\limits_{x\to a}\left(f^g\right)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=(-3)^0=1$. Hay que tener en cuenta que f^g no existe en un entorno $E(a,\delta)$.

g) $\lim\limits_{x\to a}\left[(f+g)^f\right](x)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\left[(-3)+0\right]^{-3}=-\dfrac{1}{27}$. Caso análogo al anterior para un entorno $E(a,\delta)$.

h) $\lim\limits_{x\to a}\left[(g)^{1-f}\right](x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)^{1-\lim\limits_{x\to a} f(x)}=0^{1-(-3)}=0^4=0$ si $g(x)>0\ \forall x\in E(a,\delta)$, en caso contrario no existe.

i) $\lim\limits_{x\to a}\left[(f-4g)^{2f}\right](x)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)-4\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]^{2\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\left[(-3)-4\cdot 0\right]^{2\cdot(-3)}=(-3)^{-6}=\dfrac{1}{(-3)^6}=\dfrac{1}{729}$. Caso análogo al anterior.

j) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{-3}{0}$. Con los datos que tenemos, no puede calcularse.

7. Se conoce que las funciones *f* y *g* tienen límite en el punto $x = a$. Además $\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x)) = -1$.

Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ **b)** Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a}(f(x))^{g(x)} = 4$ **c)** $\lim\limits_{x \to a}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ es un cuadrado perfecto.

a) Es falsa. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ valiese cero, entonces $\lim\limits_{x \to a}\left(f(x)g(x)\right)$ también valdría cero.

b) Es Cierta, pues podemos calcular, previamente, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$:

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)g(x)\right) = -1 \Rightarrow -2 \cdot \lim_{x \to a} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \frac{1}{2}\text{ , por lo que } \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

c) Cierta: $\lim\limits_{x \to a}\left(f(x)g(x)\right) = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \dfrac{-1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, por lo que:

$$\lim_{x \to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}\right| = \left|\frac{\left[\dfrac{-1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}\right]}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}\right| = \left|\frac{-1}{\left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right]^2}\right| = \frac{1}{\left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right]^2} = \left[\frac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}\right]^2.$$

8. A partir de una tabla de valores, estima el valor de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x+5}{1-2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-4x+4}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x+5}{1-2x} = -3$ pues:

x	$f(x) = \dfrac{6x+5}{1-2x}$
10	$\dfrac{6 \cdot 10+5}{1-2 \cdot 10} \simeq -3{,}421\,053$
100	$\dfrac{6 \cdot 100+5}{1-2 \cdot 100} \simeq -3{,}040\,201$
10000	$\dfrac{6 \cdot 10\,000+5}{1-2 \cdot 10\,000} \simeq -3{,}000\,400$
1 000 000	$\dfrac{6 \cdot 1\,000\,000+5}{1-2 \cdot 1\,000\,000} \simeq -3{,}000\,004$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-4x+4}{x-1} = -4$ pues:

x	$f(x) = \dfrac{-4x+4}{x-1}$
0,9	$\dfrac{-4 \cdot 0{,}9+4}{0{,}9-1} = -4$
0,99	$\dfrac{-4 \cdot 0{,}99+4}{0{,}99-1} = -4$
0,999	$\dfrac{-4 \cdot 0{,}9999+4}{0{,}9999-1} = -4$
0,999 999	$\dfrac{-4 \cdot 0{,}999\,999+4}{0{,}999\,999-1} = -4$

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1} = 0$ pues:

x	$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$
−0,9	$\dfrac{(-0{,}9)^2+2(-0{,}9)+1}{(-0{,}9)+1} = 0{,}1$
−0,99	$\dfrac{(-0{,}99)^2+2(-0{,}99)+1}{(-0{,}99)+1} = 0{,}01$
−0,9999	$\dfrac{(-0{,}9999)^2+2(-0{,}9999)+1}{(-0{,}9999)+1} = 0{,}0001$
−0,999 999	$\dfrac{(-0{,}999\,999)^2+2(-0{,}999\,999)+1}{(-0{,}999\,999)+1} = 0{,}000\,001$

9. Halla el valor de los siguientes límites, utilizando una tabla de valores.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+4x+3}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-x+1}{x+3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2+x-1}{2x^2+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+4x+3}{x-3}$ no existe porque los valores se hacen arbitrariamente grandes en valor absoluto, pero positivos o negativos según nos acercamos por la derecha o por la izquierda de $x=3$.

x	$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x-3}$
2,9	$\frac{(2,9)^2+4(2,9)+3}{(2,9)-1}=-230,1$
3,1	$\frac{(3,1)^2+4(3,1)+3}{(3,1)-1}=250,1$
2,9999	$\frac{(2,9999)^2+4(2,9999)+3}{(2,9999)-1}\simeq -239\ 990$
3,0001	$\frac{(3,0001)^2+4(3,0001)+3}{(3,0001)-1}\simeq 240\ 010$

b) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-x+1}{x+3}=+\infty$

x	$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x+3}$
10	$\frac{10^2-10+1}{10+3}=7$
100	$\frac{100^2-100+1}{100+3}\simeq 96$
10000	$\frac{10\ 000^2-10\ 000+1}{10\ 000+3}\simeq 9996$
1 000 000	$\frac{1\ 000\ 000^2-1\ 000\ 000+1}{1\ 000\ 000+3}\simeq 999\ 996$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2+x-1}{2x^2+1}=\frac{3}{2}$

x	$f(x)=\frac{3x^2+x-1}{2x^2+1}$
–10	$\frac{3(-10)^2+(-10)-1}{2(-10)^2+1}\simeq 1,437\ 811$
–100	$\frac{3(-100)^2+(-100)-1}{2(-100)^2+1}\simeq 1,494\ 875$
–10000	$\frac{3(-10\ 000)^2+(-10\ 000)-1}{2(-10\ 000)^2+1}\simeq 1,499\ 950$
–1 000 000	$\frac{3(-1\ 000\ 000)^2+(-1\ 000\ 000)-1}{2(-1\ 000\ 000)^2+1}\simeq 1,499\ 999$

10. Calcula, eliminado las indeterminaciones.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2+x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{x^2-3x+2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(2x-3)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2x-3)}{x+1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{1-0}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)}{(x-4)}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+4x-2}{(x-1)(x-2)}$

Este límite no existe, ya que sus límites laterales no coinciden: por la izquierda es $-\infty$ y por la derecha es $+\infty$.

11. Halla el valor de los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x-90}{x^3-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x-90}{x^3-3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{90}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{90}{x^3}}{1-\frac{3}{x^3}}=\dfrac{0+0-0}{1-0}=0$

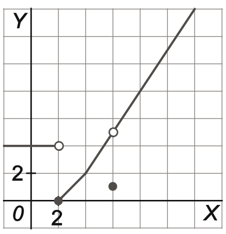
b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{0}$.Dicho límite no existe, pues sus límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}=\left(\dfrac{+}{+}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}=\left(\dfrac{+}{-}\right)=-\infty$

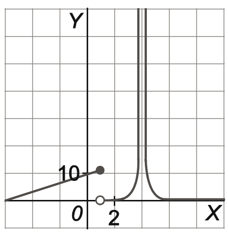
c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

12. Ejercicio interactivo.

13. Ejercicio resuelto.

14. Identifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos.





La primera función tiene una discontinuidad de salto finito en x= 2y una discontinuidad evitable en x= 6.

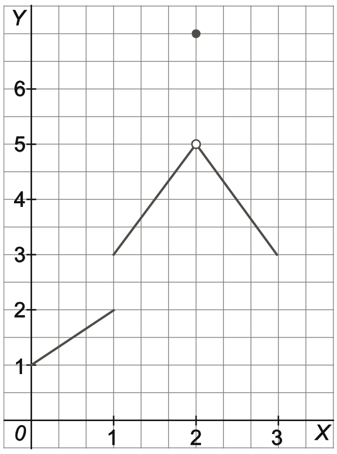
La segunda función tiene una discontinuidad de salto finito en x= 1 y una discontinuidad de salto infinito en x= 4.

15. Dibuja la gráfica de una función que verifique a la vez estas cuatro condiciones:

I. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ **II.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$ **III.** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$ **IV.** $f(2) = 7$

¿Es continua esta función en $x = 1$? ¿Y en $x = 2$?

La función no es continua en ninguno de esos valores pues tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$ y una discontinuidad evitable en $x = 2$.



16. a) ¿Hay algún valor de x para el que no esté definida la función $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 5x^2 + 6}$?

b) ¿Dónde es continua esta función?

a) $D(f) = \mathbb{R}$ ya que el denominador no se anula para ningún valor de x pues $x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$.

b) La función es continua en todo su dominio, es decir, en todo $\mathbb{R}$.

17. Escribe una función que no sea continua ni en $x = 1$ ni en $x = 7$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-7)}$.

18. ¿En qué puntos no son continuas estas funciones?

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^4+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2+x-12}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

a) Es continua en todo $\mathbb{R}$ porque el denominador no se anulapara ningún valor de$x$.

b) Es discontinua en $x = 1$, porque la imagen $f(1)$ no está definida (ya que $x = 1$ anula el denominador).

c) Como $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$, la función es discontinua en $x = -4$ y en $x = 3$.

d) Como el denominador se anula para $x = 1$ y para $x = 2$, en dichos valores la función es discontinua.

19. ¿Es continua $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-8x+7}$ en $x = 1$?

No, porque la imagen $f(1)$ no está definida ya que se anula $x^2 - 8x + 7$ para $x = 1$.

20. Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-7x+12}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x-1 & \text{si } 0<x\le 3 \\ 2x-4 & \text{si } 3<x \end{cases}$

a) Función racional cuyo denominador se anula para $x=3$ y para $x=4$, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{3,\ 4\}$. La discontinuidad en $x=3$ es evitable.

b) Las funciones $y=x+1$, $y=x-1$, $y=2x-4$ son continuas por ser polinómicas, por lo que hay que estudiar la función en los puntos intermedios: $x=0$, $x=3$.

Si nos acercamos al cero por la izquierda, el valor de la función $x+1$ se aproxima a 1 que es el valor de f en 0. Si nos aproximamos al cero por la derecha, los valores de la función $x-1$ se aproximan a –1, así pues la función no es continua en $x=0$.

Tanto si nos acercamos por la izquierda, con $x-1$, como por la derecha, con $2x-4$, a $x=3$, la función se aproxima a 2 que es el valor de $f(3)$, por tanto la función en continua en $x=3$.

Así pues, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

21. Determina cuánto debe valer *a* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^3+a & \text{si } x\le 1 \\ x^2-a & \text{si } 1<x \end{cases}}$$

Las funciones que definen la función son continuas por ser polinómicas. Solo queda asegurarnos de la continuidad en $x=1$, obligando a que los límites laterales coincidan ambos con $f(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^3+a)=1+a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-a)=1-a$ $\qquad$ $f(1)=1+a$

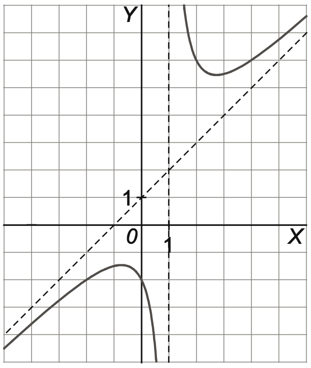
Igualando, se tiene que $1+a=1-a$, de donde se deduce que a debe valer 0 para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

22. Ejercicio resuelto.

23. Escribe todas las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}$ y esboza sus gráficas.

La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$ ya que:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+2}{x-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2}{x-1}=-\infty$



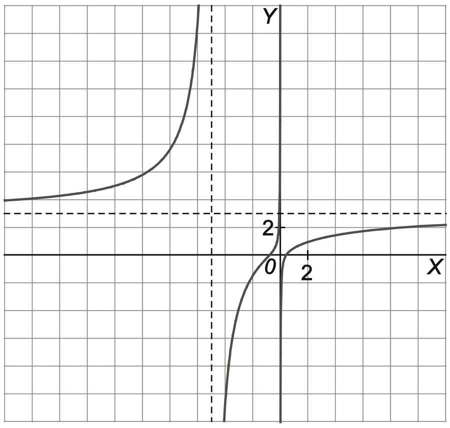
(Las posibles asíntotas verticales en las funciones racionales hay que buscarlas entre los valores que anulan el denominador, pero esto no quiere decir que en todos los valores que anulan el denominador haya asíntotas verticales, como se verá en el ejercicio 25).

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}=-\infty$.

Como $\dfrac{x^2+2}{x-1}=(x+1)+\dfrac{3}{x-1}$, la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de ecuación $y=x+1$.

La función $g(x)$ tiene dos asíntotas verticales, una es $x=0$ y otra es $x=-5$ (que son los valores que anulan el denominador) ya que: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=+\infty$.



Al calcular los límites en el infinito vemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=3$

y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=3$, por lo que se deduce que la recta $y=3$ es una asíntota horizontal tanto a derecha como a izquierda.

Al ser una función racional y tener asíntotas horizontales, no tiene asíntotas oblicuas.

24. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$.

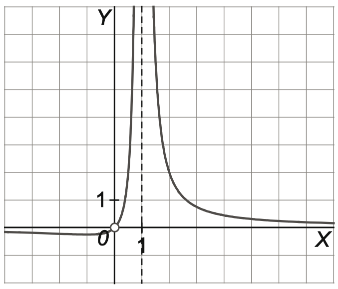
Como: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}=x+\dfrac{1-x}{x^2+x+1}$, la recta $y=x$ es asíntota oblicua de $f(x)$.

La función no tiene asíntotas verticales pues el denominador no se anula nunca.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, la función no tiene asíntotas horizontales.

25. Esboza la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}$.

Las posibles asíntotas verticales son $x=0$ y $x=1$.



Como $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{(x-1)^2}=0$, entonces $x=0$ no es asíntota.

Podemos decir que en $x=0$ hay una agujero. Este es un buen ejemplo de valor que anula el denominador, pero no indica que haya una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=+\infty$, $x=1$ es asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=0$, así pues la función tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=0$.

26. ¿Puede tener una función racional asíntotas horizontales y oblicuas a la vez?

No, ambas asíntotas, en una función racional, son incompatibles, pues:
–Tendrá asíntotas horizontales si grado(numerador) $\leq$ grado(denominador).
–Tendrá asíntotas oblicuas si grado(numerador) $=1+$ grado(denominador).

27. Ejercicio interactivo.

28. El número de individuos de una población en un instante *t* viene dado por la función:

$$N(t)=300te^{rt} \text{ si } t>0$$

donde *r* es una constante.

Estudia cómo se comporta a largo plazo la población si:

a) $r>0$ **b)** $r<0$ **c)** $r=0$

a) Al ser r positivo, $\lim\limits_{t\to+\infty} 300te^{rt}=+\infty$, la población crece indefinidamente, de forma exponencial, es decir, muy rápido.

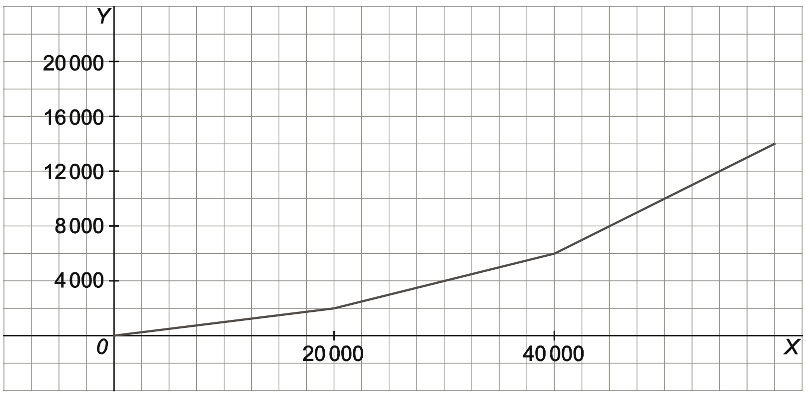
b) Al ser r negativo, $\lim\limits_{t\to+\infty} 300te^{rt}=0$, la población tiende a desaparecer.

c) Al ser r nulo, $\lim\limits_{t\to+\infty} 300te^{rt}=+\infty$, la población crece indefinidamente, de forma lineal, es decir, a un ritmo mucho más lento que en el apartado a.

29. En la tabla se indica cómo varía el tipo impositivo del impuesto sobre la renta de un país según la renta.

Renta anual (€)	Tipo (%)
Inferior a 20000	10
Entre 20000 y 40000	20
Superior a 40000	40

Representa gráficamente esta función y estudia su continuidad.



$$f(x)=\begin{cases} 0,1x & \text{si} \quad x\leq 20\,000 \\ 2000+0,2(x-20\,000) & \text{si} \quad 20\,000<x\leq 40\,000 \\ 6000+0,4(x-40\,000) & \text{si} \quad x>40\,000 \end{cases}$$

Es una función continua.

30 a 37. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Límites de funciones

38. Considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2<x<4 \\ -x+13 & \text{si } 4<x \end{cases}$$

Calcula, si existen, los siguientes números: $f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $f(4)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $f(5)$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

$f(2)=4$.

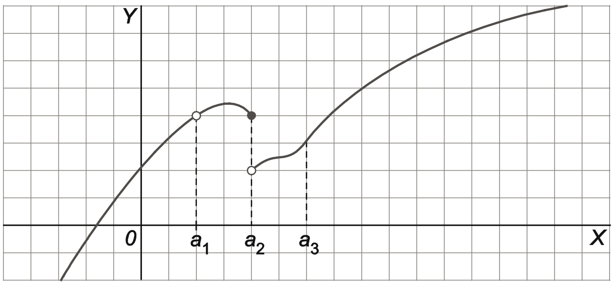
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe porque sus límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2\cdot 2+1=5$.

$f(4)$ no está definida.

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=9$ ya que sus límites laterales valen 9: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=2\cdot 4+1=9$, $\lim\limits_{x\to 2^{4+}} f(x)=-4+13=9$.

$f(5)=8$ y $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=8$.

39. La gráfica de $f(x)$ es la de la figura.



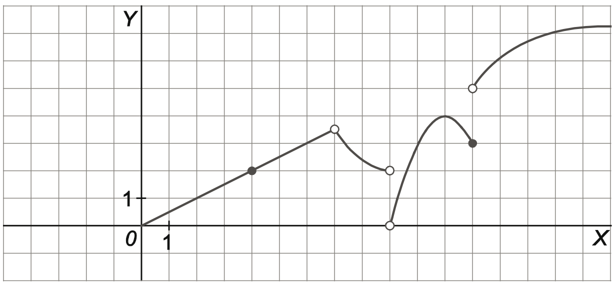
¿Existen $\lim\limits_{x\to a_1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a_2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a_3} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to a_1} f(x)$ sí existe aunque no exista $f(a_1)$.

$\lim\limits_{x\to a_2} f(x)$ no existe porque sus límites laterales no coinciden.

$\lim\limits_{x\to a_3} f(x)$ sí existe y, en este caso, vale lo mismo que $f(a_3)$.

40. A partir de la gráfica de f dada en la figura, calcula, si existen, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 12} f(x)$.



$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 7} f(x)=3{,}5$

Ni $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 12} f(x)$ existen debido a que sus respectivos límites laterales no coinciden.

41. Con ayuda de tu calculadora, obtén los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} (-\ln(x-2))^{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

a) Evaluando en la función $f(x)=(-\ln(x-2))^{x-2}$ valores cada vez más cercanos a 2 por la derecha: 2,1; 2,01, 2,001,… se obtiene que $\lim\limits_{x\to 2^+} (-\ln(x-2))^{x-2}=0$. Por ejemplo: $f(2{,}000\,001)\simeq 0{,}000\,013\,8$

b) Evaluando en la función $g(x)=x^x$ valores cada vez más cercanos a 0 por la derecha: 0,1; 0,01, 0,001,… se obtiene que: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=1$. Por ejemplo: $g(0{,}000\,001)=0{,}000\,001^{0{,}000\,001}\simeq 0{,}999\,99$

42. Razona por qué no existen los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x}{x^2-9}$

a) El numerador de $\dfrac{x^2}{x-2}$ es siempre positivo, en cambio el denominador será negativo o positivo según estemos a la izquierda o a la derecha de 2. Así pues, el límite lateral por la izquierda de 2 será menos infinito y por la derecha será más infinito. Por tanto, dicho límite no existe.

b) La situación es análoga a la anterior. En este caso, el numerador es siempre negativo y el denominador será positivo o negativo dependiendo de por dónde nos acerquemos a x=–3.

43. Calcula, si existen:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ para $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ -x & \text{si } x>0 \end{cases}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ para $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

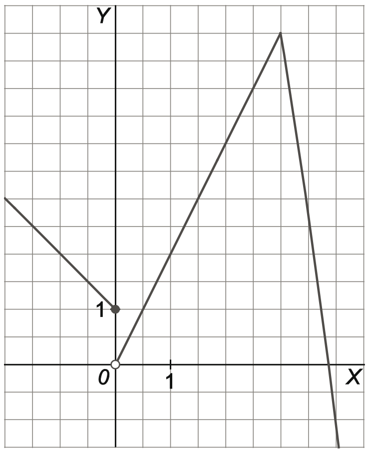
b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ para $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<1 \\ -x+2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

a) Sí existe: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

b) Sí existe: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1^2=1$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1+2=1$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

c) No existe porque sus límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2-2^2=-2$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2+2=4$

44. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{si } x\le 0 \\ 2x & \text{si } 0<x\le a \\ -x^2+15 & \text{si } a<x \end{cases}$ **y determina para qué valores de** a **existe** $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

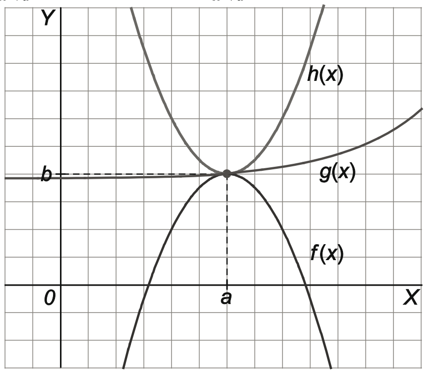


$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=2a$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-a^2+15$

Para que exista dicho límite los límites laterales han de coincidir, es decir, $2a=-a^2+15 \Rightarrow a^2+2a-15=0$, que tiene dos soluciones: $a=3$ y $a=-5$, pero la solución negativa tenemos que descartarla porque $a>0$.

Así pues, a= 3.

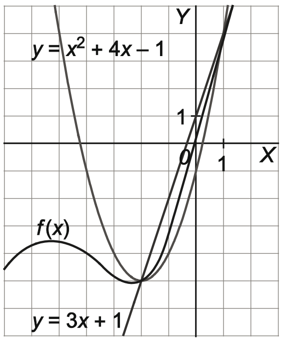
45. Haz un esquema para ilustrar que:“Si $f(x)\le g(x)\le h(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$”



Este resultado se conoce con el acertado nombre del teorema del sandwich.

Si una función está encajonada entre otras dos y los límites de los "panes" coinciden, entonces, el límite del "jamón" también coincidirá con el de aquellos.

46. Si la función $f(x)$ verifica que $3x+1 \le f(x) \le x^2+4x-1$ para todo número x, haz un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ en las cercanías de $x = 1$ y calcula $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.



Usando el teorema del sandwich, visto en el ejercicio precedente:

como $4 = \lim\limits_{x\to 1}(3x+1) \le \lim\limits_{x\to 1} f(x) \le \lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x-1) = 4$, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$.

Propiedades de los límites

47. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{3}+2g(x)\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\sqrt{g(x)}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^2$ **d)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)+1}$

a) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{3}+2g(x)\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{3} + 2\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dfrac{b}{3}+2c$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\sqrt{g(x)}\right) = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\sqrt{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = b\sqrt{c}$ solo si $c \ge 0$. Si c fuese negativo, dicho límite no existiría.

c) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^2 = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)^2 = (b+c)^2$

d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)+1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)+1} = \dfrac{b}{c+1}$ solamente si $c \ne -1$. Los restantes casos son:

Si $c = -1$ y $b \ne 0$, habría que estudiar los límites laterales (que serían $+\infty$ y/o $-\infty$) y ver si coinciden o no.

Si $c = -1$ y $b = 0$ tendríamos una indeterminación.

48. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, ¿para qué valores de b y c existen los siguientes límites?

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(g(x))^2+1}$ **g)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-\mathrm{b}}{g(x)-c}$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\sqrt{g(x)}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^{-f(x)}$ **f)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^2$ **h)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}$

El problema nos está pidiendo los valores de b y c para que los límites sean finitos.

a) Si $c \ne 1$. Aunque en caso de que $a = 1$ y $b = 0$ también podría haberlo.

b) Si $c \ge 0$.

c) Si $b < 0$, no estaría definida la función f^g en un entorno de a. Si $b > 0$ el límite existe siempre y es b^c. Si $b = 0$ y $f(x) \ge 0\ \forall x \in E(a, \delta)$ y $c \ne 0$ el límite es $0^c = 0$, pero si $c = 0$ tendríamos una indeterminación.

d) Si $b+c > 0$ el límite existe. Si $b+c < 0$ la función no estaría definida. Si $b+c = 0$ y $f(x)+g(x) \ge 0\ \forall x \in E(a, \delta)$ y $b \ne 0$, el límite existe y es $(b+c)^{-b} = \dfrac{1}{(b+c)^b}$, pero si $b = c = 0$ tendríamos una indeterminación.

e) Existe siempre porque el denominador jamás se anula.

f) Existe siempre.

g) Da lugar a una indeterminación que habría que estudiar.

h) Si b y c son ambos distintos de 0, el límite existe. Si $b = c = 0$ tendríamos una indeterminación que habría que estudiar para saber si existe el límite. Evidentemente, si solo b o solo c son cero, el límite no existe.

Cálculo de límites

49. Utiliza las propiedades de los límites para calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x+4}{x^2+1}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x}{x^2-5}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}}{2x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to -1}(x+3)^{2x+1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2}{x^2+4}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 3}(x+5)^{x-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{2+3}{2-1}=\dfrac{5}{1}=5$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x-1}=\dfrac{3-3}{2\cdot 3-1}=\dfrac{0}{5}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x+4}{x^2+1}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot 0+4}{0^2+1}}=\sqrt{\dfrac{4}{1}}=\sqrt{4}=2$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(x+3)^{2x+1}=(-1+3)^{2\cdot(-1)+1}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x}{x^2-5}=\dfrac{2\cdot 5^2-3\cdot 5}{5^2-5}=\dfrac{50-15}{25-5}=\dfrac{35}{20}=\dfrac{7}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2}{x^2+4}=\dfrac{2}{(-2)^2+4}=\dfrac{2}{4+4}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}}{2x-7}=\dfrac{\sqrt{5+4}}{2\cdot 5-7}=\dfrac{\sqrt{9}}{10-7}=\dfrac{3}{3}=1$

h) $\lim\limits_{x\to 3}(x+5)^{x-3}=(3+5)^{3-3}=8^0=1$

50. Halla los siguientes límites indeterminados:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{4-x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3x}$ **g)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-10x+9}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-2}{x+5}=\dfrac{5-2}{5+5}=\dfrac{3}{10}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)}{2x(4-x^2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{2x(2-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2x(2+x)}=\dfrac{1}{2\cdot 2(2+2)}=\dfrac{1}{16}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5-x)-5}{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{5-x}+\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{0+1}{3}=\dfrac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-10x+9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{(x-1)(x-9)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-1)(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)}{(x-1)(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{1}{48}$

g) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{9+6h+h^2-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(6+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)=(6+0)=6$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-x^2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left[1^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-x^4\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(1-x)\left(x^2+x+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\left(x^2+x+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\dfrac{1(1+1+1)(1+1)}{(1+1)}=\dfrac{6}{2}=3$

51. Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ con $f(x)=\begin{cases} 3x+7 & \text{si} \quad x<2 \\ 1 & \text{si} \quad x=2 \\ x^2+9 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

Debemos estudiar los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x+7)=13$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+9)=13$, luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=13$

52. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{x^2+x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^3+x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x-2}}{\sqrt{x}+5}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{x^2+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0}{1+0+0}=0$$

c) $$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

d) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3+x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{1+0+0}=2$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3x}-\frac{3}{2x+1}\right)=0-0=0$$

f) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-3}\right)^2-1^2}{(2x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-3)-1}{(2x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{2(x-2)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=0$$

g) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x-2}}{\sqrt{x}+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{4x}{x}-\frac{2}{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{2}{x}}}{1+\frac{5}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{4-0}}{1+0}=\frac{2}{1}=2$$

h) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

53. Halla $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$.

Se expresa la función a trozos: $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}=\begin{cases}\dfrac{-x+2}{x+1} & x\le 2\\ \dfrac{x-2}{x+1} & x>2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+2}{x+1}=-1$

54. Utiliza la calculadora para conjeturar el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$ y comprueba posteriormente si tu conjetura es correcta.

Con la calculadora se evalúa $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$ sustituyendo la x por números cada vez más próximos a cero (tanto por su izquierda como por sus derecha): $f(0,1)\simeq 1,048$; $f(0,01)\simeq 1,00498$; $f(0,001)\simeq 1,0005$; $f(-0,1)\simeq 0,95$; $f(-0,001)\simeq 0,9995$ … Se observa que lo valores de $f(x)$ se aproximan claramente a 1.

En efecto: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{1+2x}+1}{\sqrt{1+2x}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+2x}+1\right)=1$

55. Utiliza la calculadora para hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$.

Se evalúa la función $f(x)=\dfrac{x^3}{2^x}$ para valores de x positivos cada vez más grandes: 10, 100, 1000,…

Y se obtiene que: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=0$. Por ejemplo, para $x=100$, $f(100)=\dfrac{100^3}{2^{100}}\simeq 7,9\cdot 10^{-25}$.

56. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2-2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2}{(x+1)}=\dfrac{-2}{2}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3+2x(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-1}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-2x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2x^2-2x+2}{x^2-1}=-\infty$

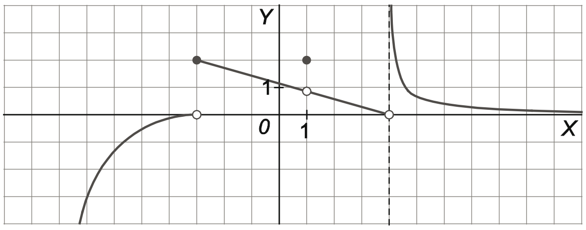
d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-(x+5)}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-5}{x^2-25}$.

Este último límite no existe pues los límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{-5}{x^2-25}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{-5}{x^2-25}=-\infty$.

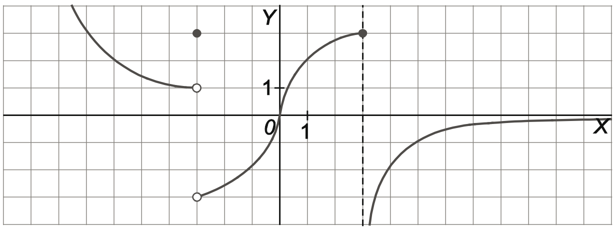
Continuidad

57. Señala los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y di de qué tipo son:

a)



b)



a) En $x = -3$ de salto finito, en $x = 1$ evitable y en $x = 4$ de salto infinito.

b) En $x = -3$ de salto finito y en $x = 3$ de salto infinito.

58. Si *f* y *g* son funciones continuas con $f(2) = 7$ y $\lim\limits_{x\to 2}(3f(x) - 2g(x)) = 1$, calcula $g(2)$.

Como *f* y *g* son continuas, entonces $\lim\limits_{x\to 2}(3f(x) - 2g(x)) = 3f(2) - 2g(2)$, por lo que

$3f(2) - 2g(2) = 1 \Rightarrow 3 \cdot 7 - 2g(2) = 1 \Rightarrow g(2) = 10$.

59. Calcula, si los hay, los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

a) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

b) Discontinuidad evitable en $x = 2$, pues $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ y $f(2) = 0$.

c) Es continua en todo $\mathbb{R}$ pues $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4 = f(2)$.

d) Discontinuidad evitable en $x = 2$, pues no existe $f(2)$, pero sí existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

60. Explica por qué las funciones dadas son discontinuas en el punto cuya abscisa se señala:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x = 2$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, $x = 1$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$, $x = 2$

a) Porque no existe $f(2)$.

b) Porque no coincide $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ con $f(1) = 0$.

c) Porque no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ya que $\left[\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1\right] \neq \left[\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1\right]$.

61. Halla el valor de *a* para que la función: $f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x\le -1 \\ ax^2-2 & \text{si } x>-1 \end{cases}$ sea continua en todos los puntos.

Solo preocupa qué ocurre en el punto de cambio, ya que las funciones que rigen en los dos trozos son continuas.

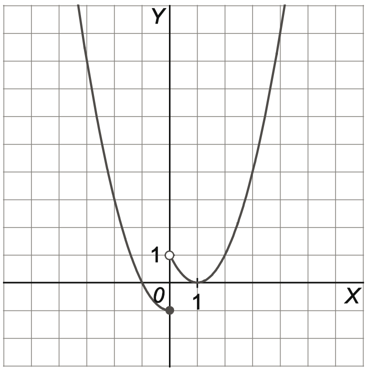
Los límites laterales en $x=-1$ deben coincidir: $\left[\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-a+2\right]=\left[\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=a-2\right]\Rightarrow -a+2=a-2\Rightarrow a=2$

62. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad en el punto $x=0$.

a)



b) No es continua en $x=0$. Hay discontinuidad de salto finito.

63. Para las siguientes funciones definidas a trozos, determina los valores de los parámetros *a* y *b* que las hacen continuas para todos los valores reales de *x*.

Una vez determinados *a* y *b*, esboza la gráfica de cada función.

a) $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x\le 1 \\ 2bx^2 & \text{si } 1<x\le 3 \\ 2x+3 & \text{si } x>3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -4x+a & \text{si } x\le -2 \\ x^2-5 & \text{si } -2<x<1 \\ bx+3 & \text{si } 1\le x \end{cases}$

Las funciones que definen cada tramo son continuas, solo falta estudiar qué ocurre en los puntos de cambio.

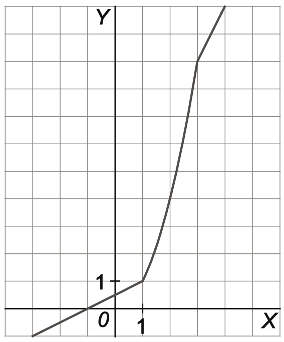
a) Para que *f* sea continua debe ser continua en $x=1$ y en $x=3$.

$[f(1)=a+b]=\left[\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a+b\right]=\left[\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2b\right]$

$[f(3)=18b]=\left[\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=18\right]=\left[\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=9\right]$.

Luego deben cumplirse simultáneamente las condiciones $\begin{cases} a+b=2b \\ 18b=9 \end{cases}$.

Así pues, $a=b=\dfrac{1}{2}$.



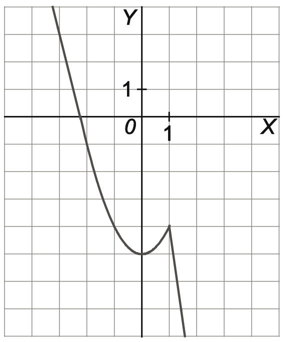
b) Para que *g* sea continua debe ser continua en $x=-2$ y en $x=1$.

$[f(-2)=8+a]=\left[\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=8+a\right]=\left[\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-1\right]$

$[f(1)=b+3]=\left[\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-4\right]=\left[\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=b+3\right]$.

Luego deben cumplirse simultáneamente las condiciones $\begin{cases} 8+a=-1 \\ b+3=-4 \end{cases}$.

Así pues, $a=-9$ y $b=-7$



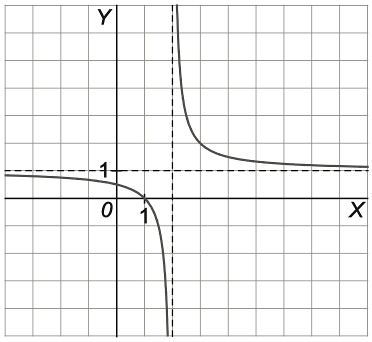
64. Dibuja una posible gráfica de una función continua *f* tal que $f(0)=1$ y $f(4)=8$, y comprueba si existe algún número *c* entre 0 y 4 tal que $f(c)=3,7$. Basándote en el resultado anterior, ¿crees que la ecuación $x^3+x-1=0$ tiene alguna solución comprendida entre 0 y 1?

Sí, porque si se considera la función $f(x)=x^3+x-1$ se puede ver que es una función continua y que $f(0)=-7$ y $f(1)=1$.

Luego su gráfica corta al eje de abscisas entre 0 y 1.

Asíntotas

65. Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ y esboza su gráfica.



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

La recta $x=2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal.

66. ¿Tiene asíntotas verticales la función $f(x)=\dfrac{3-x}{1+x^2}$?

No, pues su denominador no se anula nunca.

67. De una cierta función *f* sabemos que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$. Escribe una posible fórmula para $f(x)$.

Se considera una función racional. Como el denominador ha de anularse en $x=2$ y en $x=3$, la función puede ser de la forma $f(x)=\dfrac{?}{(x-2)(x-3)}$. El numerador se elige para que se cumplan los requisitos de los signos de $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$.

Por ejemplo, valdría $f(x)=\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$.

68. Encuentra, sin operar, la asíntota oblicua de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x+4+\dfrac{1}{x}$

b) $f(x)=x+2+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=3x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{x+2}$

d) $f(x)=-x+1-\dfrac{3}{x-2}$

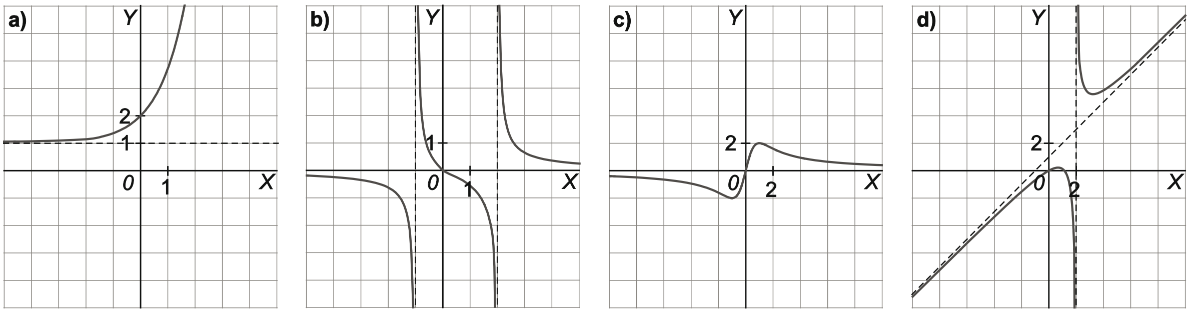
a) $y=x+4$

b) $y=x+2$

c) $y=3x-\dfrac{1}{2}$

d) $y=-x+1$

69. Di de qué tipo son las asíntotas de cada una de las funciones dadas por las siguientes gráficas, y da su ecuación si esta resulta evidente.



a) Asíntota horizontal: $y = 1$.

b) Asíntotas verticales: $x = –1$, $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = 0$.

c) Asíntota horizontal: $y = 0$.

d) Asíntota vertical: $x = 2$. Asíntota oblicua: $y = x + 1$.

70. Obtén las asíntotas oblicuas de:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2}$

d) $f(x) = x+3+\dfrac{1}{x}$

a) Como $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} = x+1+\dfrac{2}{x-1}$, la asíntota oblicua es $y = x+1$.

b) Como $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x} = x-2+\dfrac{1}{x}$, la asíntota oblicua es $y = x-2$.

c) Como $f(x) = \dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2} = 2x+\dfrac{-5x+1}{x^2+2}$, la asíntota oblicua es $y = 2x$.

d) $f(x) = x+3+\dfrac{1}{x}$, la asíntota oblicua es $y = x+3$.

71. Considera la función $f(x) = a+\dfrac{b}{x+c}$ siendo *a*, *b* y *c* números reales. Calcúlalos sabiendo que:

- **La gráfica de *f* presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación *y*= 2.**
- **La gráfica de *f* presenta en *x*= 1 una asíntota vertical.**
- **El punto (6,3) pertenece a la gráfica de *f*.**

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ e *y*= 2 es una asíntota horizontal en $-\infty$, debe ser $a = 2$.

Como la gráfica de *f* presenta en *x*= 1 una asíntota vertical, el denominador debe anularse para dicho valor, luego $1+c=0$ y entonces $c=-1$.

Como el punto (6, 3) pertenece a la gráfica de *f*, $f(6) = 2+\dfrac{b}{6-1} = 3$, luego $b = 5$.

Así pues, la función es $f(x) = 2+\dfrac{5}{x-1}$.

72. Obtén las asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x)=\dfrac{(x-5)^2}{(x-1)(x-3)}$ y esboza su gráfica.

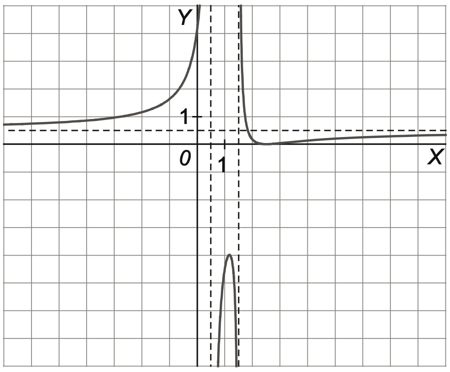
Asíntotas verticales:

$x=1$, pues $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

$x=3$, pues $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

Asíntota horizontal:

$y=1$, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$



73. Si $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x+2}$, demuestra que $f(x)$ se puede escribir como $f(x)=2x-5+\dfrac{9}{x+2}$. ¿Tiene alguna asíntota horizontal $f(x)$? ¿Y vertical? ¿Y oblicua?

$$2x-5+\frac{9}{x+2}=\frac{(2x-5)(x+2)+9}{x+2}=\frac{2x^2-x-1}{x+2}=f(x)$$

$f(x)$ no tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Tiene una asíntota vertical en $x=-2$, pues $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$

La recta $y=2x-5$ es asíntota oblicua, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)-(2x-5)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{9}{x+2}=0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-(2x-5)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9}{x+2}=0$

CUESTIONES

74. Si $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=b$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$, calcula $\lim\limits_{x\to a} 2g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=b=c+\lim\limits_{x\to a} g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=b-c$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to a} 2g(x)=2b-2c$.

75. Si f es una función continua definida en $\mathbb{R}$ y que admite como asíntota la recta $y=x-1$, ¿se puede asegurar que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$?

Nos dicen que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$, así que $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty} f(x-1)=+\infty$, por lo que sí podemos asegurar lo que nos piden.

76. ¿Es posible que dos funciones polinómicas distintas coincidan para todos los valores de un cierto intervalo $[a, b]$?

No, pues entonces el polinomio diferencia tendría infinitas raíces (todos los números del intervalo $[a, b]$), con lo que ambas funciones deberían ser la misma.

77. Si la función $f+g$ es continua en $x=2$, ¿puedes concluir que tanto f como g son continuas en ese punto?

No, por ejemplo $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 2 \\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\le 2 \\ x & \text{si } x>2\end{cases}$

Ninguna de ellas es continua en $x=2$, pero $(f+g)(x)=x+1$ que sí es continua en $x=2$.

78. **Supón que f es continua en el intervalo $[1,\ 4]$ y que f nunca se anula en dicho intervalo. ¿Qué puedes decidir sobre los signos de $f(1)$ y de $f(4)$?**

Los signos de $f(1)$ y de $f(4)$ deben ser iguales pues, en caso contrario, al ser f continua, debería cortar al eje de abscisas en algún punto de [1, 4].

79. **¿Hay algún valor de k para el que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ 2k+1 & \text{si } x=0 \\ 3x & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$?**

Para que f sea continua en $x=0$, se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, pero $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

Por lo tanto no hay ningún valor de k que haga a f continua en $x=0$.

80. **Si $f(x)=\dfrac{g(x)}{t(x)}$, con $g(x)$ y $t(x)$ polinomios y $t(x)\neq 0$ para cualquier x real, ¿cuál es el máximo número de asíntotas que puede tener la función $y=f(x)$?**

Si $t(x)\neq 0$, f no puede tener asíntotas verticales.

Puede tener una asíntota horizontal, si grado $g(x)\leq$ grado $t(x)$o tener una asíntota oblicua si grado $g(x)=1+$ grado $t(x)$.

Así pues, f podrá tener, como máximo, una asíntota.

81. **Si f es continua en $x=2$, ¿cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)-f(2)$?**

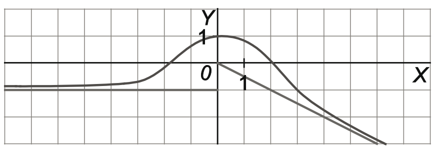
Si f es continua en $x=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ por lo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)-f(2)=0$.

82. **Si $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)-7\right)=0$ y f es continua en $x=3$, ¿puedes asegurar que la gráfica de f corta a la recta horizontal $y=7$?**

Si $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)-7\right)=0$ y f es continua en $x=3$, resulta que $f(3)=7$, por lo que la gráfica de f corta a la recta $y=7$ en el punto $A(3,\ 7)$.

83. **Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)+1\right]=0$, ¿puede tener la función $y=f(x)$ dos asíntotas no verticales?**

Se afirma que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ y que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1$, por lo que f sí puede tener dos asíntotas no verticales: una oblicua en $+\infty$ y otra horizontal en $-\infty$. En cualquier caso, f no puede ser un cociente de polinomios pues en estos, las asíntotas horizontales por la izquierda lo son también por la derecha.



84. **Si la función f, definida en $\mathbb{R}$ verifica que para todo $x>0$ es $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{1}{100}$, justifica que la curva $y=f(x)$ no tiene ninguna asíntota horizontal.**

Si f estuviera definida solo en los reales positivos, la afirmación sería verdadera, pues

$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{1}{100}\Rightarrow f(x)>\dfrac{1}{100}x$ y como $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{100}x=+\infty$, resultaría que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Pero, como la función f está definida en $\mathbb{R}$, podría tener asíntota horizontal por la izquierda, en $-\infty$.

85. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $g(x)$ coincide con $f(x)$ excepto en $x = $ a, ¿qué puedes decir sobre $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

Si $f(x) = g(x)$ excepto en $x=a$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, por lo que podemos asegurar que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

86. Si no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿no existe necesariamente $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$?

Puede existir el límite de la suma, por ejemplo en las funciones $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le a \\ 2 & \text{si } x > a \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \le a \\ 4 & \text{si } x > a \end{cases}$.

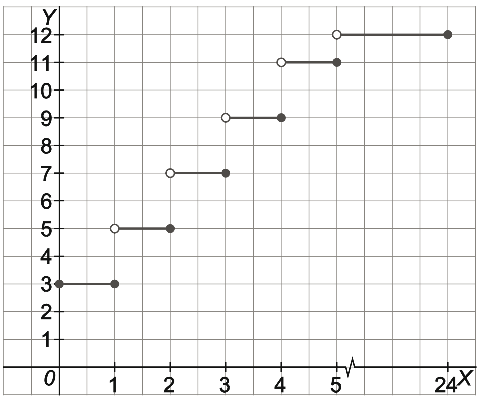
PROBLEMAS

87. En un aparcamiento se cobran 3 € por la primera hora o fracción y 2 por cada hora o fracción siguiente, hasta llegar a un máximo de 12 € por un día.

a) Dibuja una gráfica que refleje el precio de dejar el coche en ese aparcamiento, como función del tiempo que permanece allí.

b) Estudia los puntos de discontinuidad de esta función y su significado para alguien que deje su coche allí aparcado.

a)



b) La función es discontinua en $x = 1, 2, 3, 4, 5$. No es aconsejable dejar el coche aparcado un número no entero de horas, hasta $x = 5$, pues hay que pagar la hora completa.

88. Antes de comenzar la producción en serie, una empresa aeronáutica ha fabricado 3 aparatos para venderlos por un total de 9 millones de €, después de calcular los gastos de fabricación, realizar el estudio de mercado, etc. Una vez efectuado este trabajo, comienza la producción en serie, siendo entonces el coste de fabricación de cada avión de 0,3 millones de €.

Se representa por x el número de aviones fabricados en serie, y por $f(x)$ el precio de un avión para x aviones construidos.

a) Explica por qué $f(x) = \dfrac{0,3x+9}{x+3}$ para $x > 0$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y explica en términos económicos el valor obtenido.

a) Los tres primeros aparatos han costado 9 millones de € y cada uno de los siguientes 0,3 millones de €, así que los $x + 3$ primeros aviones costarán $(0,3x + 9)$ millones de €, por lo que el precio de un avión para x aviones fabricados será $f(x) = \dfrac{0,3x+9}{x+3}$ si $x > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0,3$, lo que significa que si fabrican muchísimos aviones, pueden obviar el alto precio de los tres primeros aparatos.

89. Las conclusiones de un estudio demográfico establecen que el número de habitantes de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, en los próximos años, por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$$

siendo *t* el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es el tamaño actual de la población?

b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población?

a) El valor de $f(0)$, es decir, 5000 habitantes.

b) Sí, se estabilizaría en torno a los 7500 habitantes pues $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 7500$.

90. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función

$$f(t) = \frac{18 + t^2}{(t+3)^2},$$

donde *t* es el tiempo medido en años desde *t*= 0.

Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo, cuando el tiempo tiende a infinito.

La población inicial nos la da el valor de $f(0) = 2$, es decir, dos millones.

A largo plazo la población tenderá a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{18 + t^2}{(t+3)^2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^2 + 18}{t^2 + 6t + 9} = 1$, es decir, un millón.

91. El rendimiento (medido de 0 a 100) de cierto producto en función del tiempo de uso (*x*, en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = 8{,}5 + \frac{3x}{1 + x^2}, \quad x \geq 0$$

Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al que el producto tenía cuando era nuevo?

El rendimiento cuando el producto es nuevo viene dado por $f(0) = 8{,}5$.

Si $x > 0$, $f(x) = 8{,}5 + \frac{3x}{1 + x^2} > 8{,}5$. Así pues, por mucho que pase el tiempo, el rendimiento nunca será inferior a cuando era nuevo.

92. Se ha investigado el tiempo *T,* en minutos, que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento *x*, en días, obteniéndose:

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & \text{si } 0\le x\le 30\\[2mm] \dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2 & \text{si } x>30\end{cases}$$

a) Justifica que la función *T* es continua en todo su dominio.

b) ¿Se puede afirmar que cuanto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

c) Aunque un deportista se entrene suficientemente, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 3 minutos? ¿Y en menos de 2 minutos?

a) *T* es continua en [0, 30) pues el denominador no se anula en ese intervalo. Por la misma razón, lo es si $x > 30$ (nótese que su denominador solo se anula si $x = 15$ o si $x = 5$).

Veamos si es continua en $x = 30$:

$\lim\limits_{x\to 30^-} T(x)=5$; $\lim\limits_{x\to 30^+} T(x)=\dfrac{1125}{15\cdot 25}+2=5$; $T(30)=5$, así que *T* es continua en todo su dominio.

b) Si $x < 30$, cuanto más tiempo entrene, mayor será el denominador y, por tanto, menor será el tiempo. Análogamente si $x > 30$. Finalmente, como *T* es continua en $x = 30$, podemos asegurar lo pedido.

Como la inecuación $\dfrac{300}{x+30}>10$, es decir, $300 > 300 + 10x$ no tiene solución en [0, 30] y la inecuación $\dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2>10$, es decir, $1125 > 8\,(x-15)\,(x-5)$, $x^2-20x+65{,}625<0$ tampoco tiene solución si $x > 30$ (el discriminante es negativo), resulta que ningún deportista tardaría más de 10 minutos en realizar dicha prueba.

c) En menos de 3 minutos sí. Basta con que $\dfrac{1125}{(x-15)(x-25)}<1$ y eso ocurre, por ejemplo, en $x = 60$ días.

En menos de 2 minutos no, pues *T* es estrictamente decreciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

93. La temperatura (en grados centígrados) de un trozo de metal sumergido en una solución durante 9 horas viene dada por $T(t)=10+\dfrac{20}{1+t}-5t$, $0\le t\le 9$. Halla:

a) La temperatura inicial del metal.

b) ¿A cuánto tiende la temperatura del metal al final del proceso?

a) $T(0)=30$ºC.

b) $\lim\limits_{t\to 9} T(t)=\lim\limits_{t\to 9}\left(10+\dfrac{20}{1+t}-5t\right)=-33\ ^\circ\text{C}$, que obviamente es el valor de $T(9)$.

94. Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de € cuando han transcurrido *t* años, vienen reflejadas por la función $f(t) = \dfrac{2t-4}{t+2}$.

a) ¿Gana dinero la empresa en los dos primeros años?

b) ¿Cuánto gana el 5.º año?

c) ¿Existe límite para las ganancias? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

a) No, pues si $t \le 2$, $f(t) \le 0$.

b) $f(5) - f(4) = \dfrac{10-4}{7} - \dfrac{8-4}{6} = \dfrac{6}{7} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{21} \approx 0{,}19$ x 100 000 €, es decir, 19000 €.

c) Sí, pues $\dfrac{2t-4}{t+2} = 2 - \dfrac{8}{t+2}$, luego dicha empresa nunca ganaría más de 200 000 €.

95. El precio en € de *x* litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ \sqrt{ax^2 + 2000} & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

a) Determina el valor de la constante *a* para que la función *P*(*x*) sea continua.

b) Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿a cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro?

a) *P* es continua en $\mathbb{R}$ salvo, si acaso, en $x = 20$. Estudiemos qué ocurre en $x = 20$.

$\lim\limits_{x \to 20^-} P(x) = 60$; $\lim\limits_{x \to 20^+} P(x) = \sqrt{400a + 2000}$; $P(20) = 60$.

Por tanto, para que sea continua en $x = 20$, debe ser $60 = \sqrt{400a + 2000} \Rightarrow 3600 = 400a + 2000 \Rightarrow a = 4$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 2000}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2 + 2000}{x^2}} = 2$ €.

ENTORNO MATEMÁTICO

Spyrador 007

Juan y Javier están jugando al tenis, pero, al poco de empezar, Juan se da cuenta de que Javier no está concentrado: "iEh! ¿Qué te pasa, Javi? Estás que no das una." En esto, Javier se sienta en el suelo y con la cara descompuesta le dice a Juan que está muy preocupado por el trabajo. Juan le anima y comenta "Venga, vamos a cambiarnos y a tomar un refresco y me cuentas el problema". En efecto, a la media hora, están sentados en una terraza y Javier le explica a Juan sus preocupaciones:

"El futuro de la empresa depende de un nuevo producto –el Spyrador 007–, un potente aspirador robótico de pequeño tamaño y silencioso como un espía. Mi jefa me ha pedido que evalúe cuántas unidades podemos fabricar para asegurar una ganancia suficiente sin asumir riesgos en el caso de que nos falle algún cliente. Llevo dándole vueltas al problema un par de semanas y no consigo encontrar la solución."

Juan se echa a reír diciendo: "No te preocupes, ¿paraqué tienes un amigo matemático como yo que se pasa el tiempo haciendo números, cuentas y ecuaciones? Dame todos los datos y en poco tiempo seguro que te doy una solución". Dicho y hecho, a los cuatro días, Juan le envía a Javier el siguiente correo:

"Con los datos que me diste, he concluido que las ganancias totales de tu empresa en función del número de aspiradores vendidos, *x*, se puede aproximar por la función:

$$G(x)=\begin{cases} 10x(x-50) & \text{si} \quad 0\le x\le 50 \\ 50\sqrt{x^2+36x-4300} & \text{si} \quad x>50 \end{cases}$$

Ayuda a Javier a analizar la propuesta de su amigo contestando a estas preguntas:

a) ¿Hay una diferencia esencial entre fabricar 49 unidades y fabricar 51 unidades?

b) Justifica que la función ganancia total es continua.

c) ¿Cuántos aspiradores hay que fabricar para obtener la menor ganancia?

d) Vendiendo muchas unidades, ¿se puede llegar a ganar 60 € por unidad?

e) ¿Cuál es la ganancia máxima por unidad que puede obtener?

a) $G(49)=10\cdot 49(49-50)=-490$; $G(51)=50\sqrt{51^2+36\cdot 51-4300}\simeq 585$.

Eso quiere decir que si se venden 49 unidades se pierde dinero pero si se venden 51 unidades se gana.

b) $G(x)$es continua en $x=50$, pues $\lim\limits_{x\to 50^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 50^-} 10x(x-50)=10\cdot 50(50-50)=0$

$$\lim_{x\to 50^+} G(x)=\lim_{x\to 50^+} 50\sqrt{x^2+36x-4300}=50\sqrt{50^2+36\cdot 50-4300}=0 \text{ y } G(50)=10\cdot 50(50-50)=0$$

Además, en el resto de los valores la función es continua.

c) La primera función, es negativa en el intervalo (0, 50) con un mínimo en $x=25$, $G(25)=-6250$.

La segunda función siempre positiva, para valores mayores de 50.

Por tanto, la menor ganancia se da cuando se fabrican 25 aspiradores, que es cuando más dinero se pierde.

d) En el intervalo (0, 50) la función G es negativa. A partir de $x=50$, la función es positiva y creciente pero:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{50\sqrt{x^2+36x-4300}}{x}=\lim_{x\to+\infty}50\sqrt{1+\frac{36}{x}-4300x^2}=50$$

Así pues, nunca se podrá ganar más de 50 € por unidad.

e) La ganancia máxima por unidad será de 50 € aproximadamente, pues, como comentamos en el apartado anterior nunca se alcanza.

Matecología

Susana tiene una empresa llamada "Soluciones Matecológicas". Su trabajo consiste en ofrecer planes de actuación a las empresas para reducir el impacto ambiental que produce su actividad. Ahora acaba de entregar un estudio a una central térmica de carbón para reducir la polución que esta genera. Está contenta porque cree que ha dado con una buena solución. La conclusión principal del informe es la siguiente:

"Reducir el vertido de una central térmica que quema carbón es una tarea costosa si nos proponemos reducir la polución en porcentajes altos y con precios desorbitados si nos proponemos reducirla casi totalmente. Naturalmente reducir la polución en pequeños porcentajes tiene un coste muchísimo menor. Por eso, si queremos construir una función que ligue el porcentaje de reducción con el coste que nos supone, dicha función debe contemplar las características anteriores y, por tanto, no será una función lineal, ni siquiera polinómica, sino algo más sofisticada. Analizando los datos referidos a sus instalaciones hemos estimado que el coste en €, de reducir un *x* % el vertido viene dado por la función:

$$\boldsymbol{C(x) = \frac{10\,000x}{100 - x}, \quad \text{con } 0 \le x < 100}$$

Analiza la propuesta de Susana, contestando estas preguntas

a) Calcula el coste de reducción de un 20 % del vertido.

b) Calcula que porcentaje de reducción se logrará si se invierten10 000 €.

c) Calcula el coste de reducir en un 80 % el vertido.

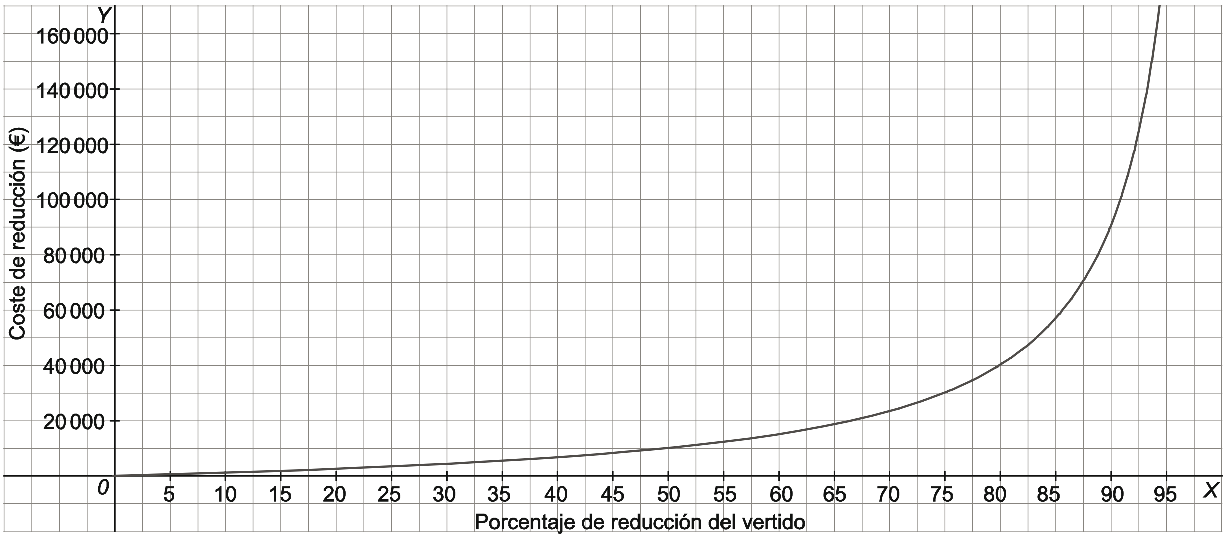
d) Esboza la gráfica de la función $C(x)$ en todo su dominio.

a) $C(20) = \frac{10\,000 \cdot 20}{100 - 20} = \frac{200\,000}{80} = 2500$ €.

b) Resolvemos la ecuación $\frac{10\,000x}{100 - x} = 10\,000$; $x = 50$. Es decir, se reduciría en un 50 %.

c) $C(80) = \frac{10\,000 \cdot 80}{100 - 80} = \frac{800\,000}{20} = 40\,000$ €.

d)



AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

Las cuatro primeras cuestiones están referidas a la función *f*, definida para todo $x > 4$, por $f(x) = -2x + 1 + \frac{8}{x-4}$.
Hay que responder justificadamente si son verdaderas o falsas las afirmaciones que se hacen:

1. **Otra expresión para *f* es $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4 - x}$.**

Manipulando la expresión dada para $f(x)$, se llega a que $f(x) = -2x + 1 + \frac{8}{x-4} = \frac{(-2x+1)(x-4)+8}{x-4} = \frac{2x^2 - 9x - 4}{4 - x}$
que no coincide con el enunciado anterior, por lo que 1 es falsa.

2. **La recta $x = 4$ es asíntota vertical de la gráfica de *f*.**

Verdadera, pues, por ejemplo, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Falsa, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x + 1 + \frac{8}{x-4}\right) = -\infty$

4. **La recta de ecuación $y = -2x + 1$ es una asíntota oblicua de la gráfica de *f*.**

Verdadera, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{x-4} = 0$

5. **Calcula el valor del límite: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2}$**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x+1)}{x-2} = -2$$

6. **Calcula . $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x - 2x^3}{6x^3 - 5x^2 + 2x - 1}$**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 2x^3}{6x^3 - 5x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - 2}{6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

7. **Determina el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right)$**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - |x-1|\right)$. Para valores grandes de x,
(en concreto, $x > 1$), $|x - 1| = x - 1$, así que el límite pedido es $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - (x-1)\right) = 1$.

8. **Halla el valor de k que hace que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} x^2-kx, & \text{si } x\le -2 \\ 6kx-3, & \text{si } x>-2 \end{cases}$.**

$$f(x)=\begin{cases} x^2-kx & \text{si} \quad x\le -2 \\ 6kx-3 & \text{si} \quad x>-2 \end{cases}$$

f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ sea cual fuere k.

Para que sea continua en x=–2, debe ocurrir que $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, es decir:

$4+2k=-12k-3$, $k=\dfrac{-1}{2}$. Así pues, si $k=\dfrac{-1}{2}$, la función será continua en todo $\mathbb{R}$ **.**

9. **Si la recta $y=2x+1$ es una asíntota oblicua por la derecha de la función racional $y=f(x)$, calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3}$.**

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-(2x+1)}{x}=0$, es decir, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ y al ser f un cociente de polinomios, el grado del numerador será una unidad mayor que el del denominador. Así pues, $\dfrac{f(x)}{x^2+3}$ es un cociente de polinomios con el grado del denominador mayor que el del numerador y, por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3}=0$.

10. **Escribe una función racional definida en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ y tal que su gráfica admita como asíntotas las rectas $x=1$ e $y=2$.**

Por ejemplo, $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Relaciona y Contesta

Elige la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes apartados

1. **Si $f(x)=x^2+x-4$, entonces:**

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-4)=+\infty$. La respuesta correcta es la B.

2. **La curva dada por $f(x)=\dfrac{3}{x}+4$ admite como asíntota la recta de ecuación:**

A. $y=\dfrac{3}{x}$ **B.** $y=4$ **C.** $y=0$ **D.** $y=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}+4\right)=4$, por lo que la recta $y=4$ es asíntota. La respuesta correcta es la B.

3. **En una de estas cuatro funciones, la recta x=1 no es asíntota vertical. ¿En cuál?**

A. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **B.** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x\le 1 \end{cases}$ **C.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **D.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=-1$.

Por tanto, $x=1$ no es asíntota vertical. La respuesta correcta es la C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si $f(x)=\frac{1}{x}-2x+1$, la gráfica de *f* verifica:

A. Tiene dos asíntotas.
B. Tiene como asíntota vertical la recta $x = 0$.
C. Tiene una asíntota oblicua.
D. Tiene como asíntota horizontal la recta $y=0$.

$f(x)=\frac{1}{x}-2x+1$ tiene dos asíntotas: La recta $x = 0$, pues, por ejemplo, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ y la recta $y = -2x + 1$, pues $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Por tanto, A es verdadero.

B es verdadero como se acaba de de ver y lo mismo C.

D es falso, pues $f(x)=\frac{1-2x^2+x}{x}$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

5. Si $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ entonces:

A. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **B.** $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ **C.** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **D.** $\lim_{x\to-1} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ luego A es verdadero.

$\lim_{x\to 0^+} x^2=0$ y $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. B es verdadero.

$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. C es falso.

$\lim_{x\to-1} x^2=1$ y $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x}=-1$. D es verdadero.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sea $f(x)=x\cdot g(x)$ y sean estas dos afirmaciones:

1. La gráfica de *g* corta a la recta $y = 1$.
2. La gráfica de *f* corta a la recta $y = x$.
Entonces:

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$ **B.** $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$ **C.** $1\Leftrightarrow 2$ **D.** 1 y 2 se excluyen entre sí.

$1 \Rightarrow 2$, pues si existe a tal que $g(a) = 1$, entonces $f(a) = ag(a) = a$, por lo que la gráfica de *f* corta a la recta $y = x$, al menos en el punto de abscisa a.

$2 \not\Rightarrow 1$, pues el hecho de que exista b tal que $f(b) =b$, es decir, $bg(b) = b$ puede ocurrir siendo $b = 0$ y $g(b) \neq 1$. Por ejemplo, si $g(x) = -x^2$ y $f(x) = x(-x^2) = -x^3$, la gráfica de *f* corta a la recta $y = x$ (en el punto (0, 0)), pero la gráfica de *g* nunca corta a la recta $y = 1$.

Así que la respuesta correcta es la A.

Razona cuál de los siguientes datos es innecesario

7. Para saber si la ecuación $f(x)= 1$ tiene o no solución en el intervalo $[-2, 2]$ se dan los siguientes datos:

1. $D(f)=\mathbb{R}$ **2.** ***f*** **es continua en $[-2, 2]$** **3.** **$f(-2)$ es negativo** **4.** **$2 < f(2)$**

Entonces, puede eliminarse, por innecesario:
A. El dato 1
B. El dato 2
C. El dato 3
D. El dato 4

Sobra el dato 1. $D(f)=\mathbb{R}$, pues, basta que el dominio de *f* contenga al intervalo [–2, 2] y eso está asegurado por el dato 2.