8 Derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Para $f(x) = x^2 - 1$ y con ayuda de la calculadora, halla:

a) *TVM f* [1, 100] **c)** *TVM f* [1, 2] **e)** *TVM f* [1; 1,01]

b) *TVM f* [1, 10] **d)** *TVM f* [1; 1,1] **f)** *TVM f* [1;1,001]

¿A qué valor se acercará *TVM f* [1; 1,0001]? ¿Cuál será el valor de *TVI f* (1)?

a) $TVM\, f\left[1{,}100\right] = \dfrac{f(100) - f(1)}{100 - 1} = \dfrac{9999 - 0}{99} = 101$

b) $TVM\, f\left[1{,}10\right] = \dfrac{f(10) - f(1)}{10 - 1} = \dfrac{99 - 0}{9} = 11$

c) $TVM\, f\left[1{,}2\right] = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \dfrac{3 - 0}{1} = 3$

d) $TVM\, f\left[1;1{,}1\right] = \dfrac{f(1{,}1) - f(1)}{1{,}1 - 1} = \dfrac{0{,}21 - 0}{0{,}1} = 2{,}1$

e) $TVM\, f\left[1;1{,}01\right] = \dfrac{f(1{,}01) - f(1)}{1{,}01 - 1} = \dfrac{0{,}0201 - 0}{0{,}01} = 2{,}01$

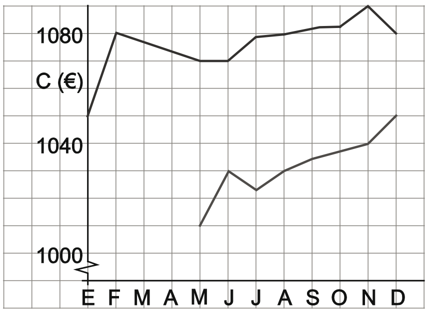
f) $TVM\, f\left[1;1{,}001\right] = \dfrac{f(1{,}001) - f(1)}{1{,}001 - 1} = \dfrac{0{,}020\,001 - 0}{0{,}001} = 2{,}001$

Es claro que $TVM\, f\left[1;\ 1{,}00001\right]$ se acerca a 2:

$$TVM\, f\left[1;1{,}00001\right] = \frac{f(1{,}00001) - f(1)}{1{,}00001 - 1} = \frac{0{,}000\,020\,0001 - 0}{0{,}00001} = 2{,}000\,01 \to 2$$

$$TVI\ f(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+2) = 2$$

4. La gráfica muestra la evolución de dos inversiones en dos fondos diferentes y en distintos momentos.



a) ¿Cuál es la *TVM* de cada uno de los capitales desde el inicio? ¿Y en los últimos 4 meses? ¿Y en el último mes?

b) ¿Puedes decidir qué fondo es más rentable?

Llamando *t* a los meses transcurridos desde el comienzo del estudio, *f* a la función superior y *g* a la función inferior:

a) Desde el inicio:

$$TVM\, f\left[0{,}11\right] = \frac{f(11) - f(0)}{11 - 0} = \frac{1080 - 1050}{11} = 2{,}73\ ;\ TVM\, g\left[4{,}11\right] = \frac{g(11) - g(4)}{11 - 4} = \frac{1050 - 1010}{7} = 5{,}71$$

En los últimos cuatro meses:

$$TVM\, f\left[7{,}11\right] = \frac{f(11) - f(7)}{11 - 7} = \frac{1080 - 1080}{4} = 0\ ;\ TVM\, g\left[7{,}11\right] = \frac{g(11) - g(7)}{11 - 7} = \frac{1050 - 1030}{4} = 5$$

En el último mes:

$$TVM\, f\left[10{,}11\right] = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \frac{1080 - 1090}{1} = -10\ ;\ TVM\, g\left[10{,}11\right] = \frac{g(11) - g(10)}{11 - 10} = \frac{1050 - 1040}{1} = 10$$

b) Es más rentable el fondo de la gráfica inferior.

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = x^2$, en $x = -2$

b) $f(x) = 3x^3 + 4$, en $x = 4$

c) $f(x) = x^3 + x^2$, en $x = 1$

d) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, en $x = -1$

a) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h-4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h-4) = -4$

b) $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(4+h)^3 + 4 - (3\cdot 4^3 + 4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(64 + 48h + 12h^2 + h^3) + 4 - 196}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h(48 + 12h + h^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3(48 + 12h + h^2) = 3\cdot 48 = 144$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3 + (1+h)^2 - (1^3 + 1^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + 3h + 3h^2 + h^3) + (1 + 2h + h^2) - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(5 + 4h + h^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (5 + 4h + h^2) = 5$

d) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-1+h)^2 + 5(-1+h) - 3 - (-7)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 - 2h + h^2) - 5 + 5h + 4}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (3+h) = 3$

8. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes curvas en los puntos indicados.

a) $f(x) = x^2 + x - 2$, en $x = 1$

b) $f(x) = 2x^2 - x$, en $x = 4$

c) $f(x) = x^3$, en $x = 2$

d) $f(x) = x^3 + 2x$, en $x = -1$

Como la ecuación de la recta tangente en el punto (a, $f(a)$) es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$, en cada caso se debe calcular $f(a)$ y $f'(a)$.

a) $f(1) = 0$ y $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 + (1+h) - 2 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + 2h + h^2) + (1+h) - 2}{h} = 3$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - 0 = 3(x - 1)$. Simplificando: $y = 3x - 3$.

b) $f(4) = 28$ y $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(4+h)^2 - (4+h) - 28}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(15+2h)}{h} = 15$

La ecuación de la recta tangente en $x = 4$ es $y - 28 = 15(x - 4)$. Simplificando: $y = 15x - 32$.

c) $f(2) = 8$ y $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(8 + 12h + 6h^2 + h^3) - 8}{h} = 12$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - 8 = 12(x - 2)$. Simplificando: $y = 12x - 16$.

d) $f(-1) = -3$ y $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-1+h)^3 + 2(-1+h) - (-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(5 - 3h + h^2)}{h} = 5$

La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y + 3 = 5(x + 1)$. Simplificando: $y = 5x + 2$.

9. Copia y completa la siguiente tabla para la función $f(x) = x^3$ en $a = 1$.

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$					

A partir de los resultados de la tabla, ¿cuál podría ser el valor de la derivada de la función *f* en el punto de abscisa $x = 1$?

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$	7	4,75	3,31	3,0301	3,003

Observando los datos de la tabla se podría deducir que $f'(-1) = 3$.

10. Ejercicio resuelto.

11. Aplicando la definición de derivada, obtén la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x-1)^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h-1)^2-(x-1)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2+h^2+1+2xh-2x-2h-x^2+2x-1}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2+2xh-2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h+2x-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h+2x-2) = 2x-2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h(x+h)x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(x+h)x} = -\dfrac{1}{x^2}$

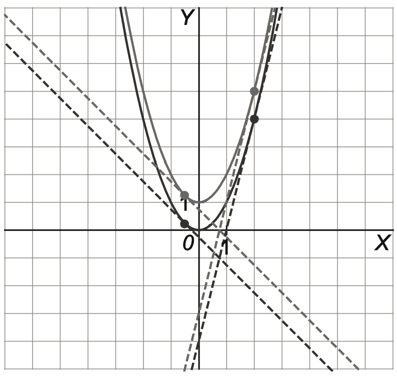
c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

12. Obtén las funciones derivadas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dibuja las gráficas de *f* y *g*, y observa cómo son las tangentes en puntos de igual abscisa. ¿Confirma tu cálculo anterior dicha observación?

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2+2xh}{h} = 2x$

$g'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2+2xh+h^2+1-x^2-1}{h} = 2x$



Las rectas tangentes en puntos de igual abscisa son paralelas, ya que las pendientes en ambos casos son $2x$.

13. **a)** Deduce la derivada de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

b) ¿Hay algún punto en la curva $y = f(x)$ en el que la tangente sea horizontal? ¿Y en el que la tangente tenga pendiente positiva?

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h-1} - \dfrac{1}{x-1}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x-1-(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(x+h-1)(x-1)} = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) Como la derivada es siempre negativa, no hay ningún punto en que la recta tangente sea horizontal o de pendiente positiva.

14. **Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 5$ en el que la tangente es paralela a la recta $y = 4x + 3$.**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 5 - (x^2-5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x$$

Para que la recta tangente sea paralela a $y = 4x + 3$ debe ser $f'(x) = 4$, es decir, $2x = 4$, $x = 2$.

El punto de la gráfica es $P(2, f(2)) = P(2, -1)$ y la ecuación de la recta tangente es $y + 1 = 4(x - 2)$.

15. **Calcula las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^3$ hasta que obtengas la función idénticamente nula.**

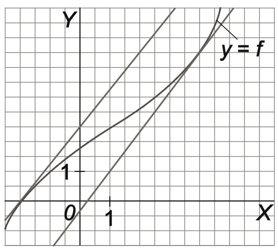
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2$$

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(6x+3h)}{h} = 6x$$

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h)-f''(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6(x+h)-6x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h}{h} = 6$$

Al ser $f'''(x)$ constante, la cuarta derivada será nula: $f^{iv)}(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'''(x+h)-f'''(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6-6}{h} = 0$

16. **Observa la siguiente gráfica. Teniendo en cuenta que las rectas trazadas son tangentes a la función $f(x)$, halla los valores de la derivada de f en los puntos de abscisas $x = -2$ y $x = 4$.**



$f'(-2) = \dfrac{2,5}{2} = 1,25$ $f'(4) = \dfrac{4}{3} = 1,\hat{3}$

17. **Ejercicio interactivo.**

18 y 19. **Ejercicios resueltos.**

20. **Calcula las derivadas de las funciones siguientes:**

a) $f(x) = x^3$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$ **d)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^3}}$

a) $f'(x) = 3x^2$

b) $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

c) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}} \to f'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1} = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

21. Calcula la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto de abscisa 8.

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 8$ es $m = f'(8)$. Se calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ y su valor en $x = 8$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$ es la pendiente pedida.

22. Calcula la pendiente de la tangente a $f(x) = e^x$ en el punto de corte de esta con el eje de ordenadas.

El punto de corte de $f(x) = e^x$ con el eje de ordenadas es $P(0, e^0) = P(0, 1)$. La pendiente de la tangente en dicho punto es $f'(0)$, por lo que: $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$.

23. ¿Cómo son las rectas tangentes a las curvas $f(x) = \ln x$ en $P(1, 0)$ y $g(x) = \text{sen } x$ en $Q(0, 0)$?

Se calcula el valor de la derivada correspondiente en sendas abscisas:

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$g(x) = \text{sen } x \Rightarrow g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = \cos 0 = 1$

Las tangentes tienen la misma pendiente y, por tanto, son paralelas.

24. ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x) = x^t$, con t un número positivo e impar, la recta tangente a la gráfica es decreciente, es decir, tiene pendiente negativa?

Su derivada es $f'(x) = tx^{t-1}$ y, como t es impar, $t – 1$ es par, por lo que x^{t-1} es no negativo. Por tanto la pendiente nunca será negativa.

25. Ejercicio resuelto.

26. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^4 \cdot x^{-2}$ **c)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ **e)** $f(x) = x\,\text{tg}\,x$

b) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$ **d)** $f(x) = (\cos x)^{\frac{3}{2}}$ **f)** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

a) $f(x) = x^4 \cdot x^{-2} = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

d) $f(x) = (\cos x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(\cos x)^{\frac{3}{2}-1}(-\text{sen } x) = -\frac{3}{2}\text{sen } x\sqrt{\cos x}$

b) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

e) $f(x) = x\,\text{tg}\,x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \text{tg}\,x + x(1 + \text{tg}^2 x) = \text{tg}\,x + x + x\text{tg}^2 x$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}2x = \frac{2x}{x^2 - 1}$

27. Halla las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{\cos x}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

a) $f(x) = \text{sen } x + (\cos x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = \cos x - (\cos x)'(\cos x)^{-2} = \cos x + \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}$

b) $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

28. Actividad interactiva.

29 y 30. Ejercicios resueltos.

31. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ **c)** $f(x) = x(x-2)$ **d)** $f(x) = (x-1)^2$

a) Como $f'(x) = 2x - 6 > 0$ si $x > 3$, la función es creciente en $(3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 3)$.

b) Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje de abscisas en $x = 1$ y $x = 3$, la función es decreciente en (1, 3) y creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

c) Como $f'(x) = 2x - 2 > 0$ si $x > 1$, la función es creciente en $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1)$.

d) Como $f'(x) = 2(x-1) > 0$ si $x > 1$, la función es creciente en $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1)$.

32. La curva de ecuación $y = x^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(-2, 1)$ y alcanza un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$. Halla los números b y c.

Planteamos un sistema de ecuaciones:
Como la curva para por $P(-2, 1)$ tenemos que $1 = 4 - 2b + c$.
Y como la derivada $f'(x) = 2x + b$ se anula en $x = -3$ tenemos que $2(-3) + b = 0$, luego $b = 6$ y $c = 9$.
La ecuación de la curva es $y = x^2 + 6x + 9$.

33. Calcula el valor máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = 3x^2 - x$ en $[-3, 5]$ **b)** $f(x) = (x-1)(x-2)$ en $[0, 3]$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 5]$ **d)** $f(x) = \sqrt{x}$ en $[4, 9]$

a) $f'(x) = 6x - 1 = 0$ si $x = \dfrac{1}{6}$. $f(-3) = 30$, $f\left(\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{12}$, $f(5) = 70$. El valor mínimo es $-\dfrac{1}{12}$ y el máximo es 70.

b) $f'(x) = 2x - 3 = 0$ si $x = \dfrac{3}{2}$. $f(0) = 2$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, $f(3) = 2$. El valor mínimo es $-\dfrac{1}{4}$ y el máximo es 2.

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ es siempre negativa y, por tanto, la función es decreciente. En [1, 5], el máximo lo alcanzará en $x = 1$ y el mínimo en $x = 5$. Así pues, el valor máximo es $f(1) = 1$ y el mínimo $f(5) = \dfrac{1}{5}$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es siempre positiva y, por tanto, la función es creciente. En [4, 9] el valor mínimo es $f(4) = 2$ y el máximo $f(9) = 3$.

34. Halla el valor de a para que el mínimo de la función $f(x) = x^2 + 2x + a$ sea igual a 8.

$f'(x) = 2x + 2 = 0$ si $x = -1$, por lo que el vértice de la parábola está en el punto de abscisa $x = -1$.

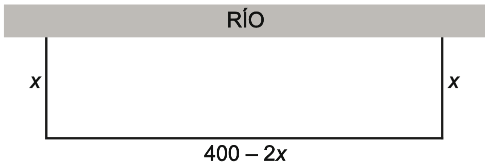
Se pide $f(-1) = 8$, luego $1 - 2 + a = 8$, y se obtiene que $a = 9$.

35. Ejercicio resuelto.

36. Un agente comercial cobra por la venta de un cierto producto una comisión dada por: $C(x) = 100 + \dfrac{x}{100} - \dfrac{x^2}{1000}$,donde *x* representa la cantidad en miles de € de la venta efectuada. Determina la cantidad que habrá de vender para que la comisión sea máxima.

$C'(x) = \dfrac{1}{100} - \dfrac{x}{500} = \dfrac{5-x}{500} = 0$ si $x = 5$. Como la parábola es cóncava hacia abajo, en $x = 5$ hay un máximo. Debe vender 5000 €.

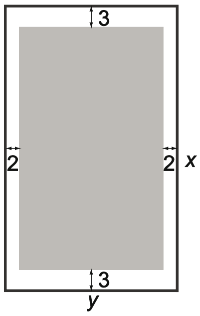
37. Eduardo dispone de 400 m de alambre con los que quiere vallar un campo rectangular aprovechando que un río hace ya de valla en un lado. ¿Cómo debe hacerlo para cercar la máxima superficie?



Si los lados perpendiculares al río miden *x* metros, el lado paralelo al río debe medir $400 - 2x$ y el área del rectángulo será $A(x) = x(400 - 2x)$. La parábola alcanza el máximo cuando $x = 100$ y, por tanto, abarcará una superficie de 20 000 m^2.

Los lados deben medir: 100 m los perpendiculares al río y 200 m el otro.

38. Se quiere escribir un texto de 81 cm^2 en una hoja. Si debe haber 2 cm de margen en cada lateral y 3 cm arriba y abajo. ¿cuáles son las dimensiones de la hoja de menor área?



Se llama *x* a la altura la hoja e *y* al ancho (ambas medidas en centímetros)

Se pide minimizar el área, es decir *xy*.

La relación entre *x* e *y* viene dada por $(x - 6)\cdot\ (y - 4) = 81$.

De la expresión anterior se despeja *y*: $y - 4 = \dfrac{81}{x-6} \to y = \dfrac{81}{x-6} + 4$.

La función a minimizar es: $f(x) = xy = x\left(\dfrac{81}{x-6} + 4\right) = \dfrac{81x}{x-6} + 4x = \dfrac{4x^2 + 57x}{x-6}$

Y su derivada es: $f'(x) = \dfrac{(8x+57)(x-6) - (4x^2+57x)}{(x-6)^2} = \dfrac{4x^2 - 48x - 342}{(x-6)^2}$.

Igualando la derivada a cero se obtiene que $4x^2 - 48x - 342 = 0 \Rightarrow x = 6 \pm \dfrac{9}{2}\sqrt{6}$ **.**

Se rechaza la solución negativa y se obtienen que para que la superficie de la hoja sea mínima la altura debe medir $x \simeq 17{,}02$ cm y el ancho $y \simeq \dfrac{81}{17{,}02 - 6} + 4 \simeq 11{,}35$ cm. El área de la hoja será de 193,18 cm^2.

39. El coste, en €, de fabricar *x* televisores es $D(x) = 200x + x^2$, con $0 \le x \le 80$ y cada televisor se vende a 300 €.

a) ¿Qué función da los beneficios de la venta de *x* televisores.

b) ¿Cuándo se obtiene el máximo beneficio y cuál sería este?

a) Si fabricamos *x* televisores ingresaremos 300*x* € y los costes serán de $200x + x^2$ €, así pues, la función que nos da los beneficios en función del número de televisores fabricados y vendidos es:

$B(x) = \text{ingresos} - \text{costes} = 300x - (200x + x^2) = 100x - x^2$

b) $B'(x) = 100 - 2x$, por lo que la derivada de la función se anula en $x = 50$. Luego se obtendrán máximos beneficios fabricando 50 televisores y serán de 2500 €.

40. Actividad interactiva.

41 a 47. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Tasa de variación

48. En cada caso, calcula la tasa de variación media en el intervalo dado.

a) $f(x)=3x^2+x$ en [–2, 4]

b) $f(x)=5$ en [–500, 317]

c) $f(x)=4x^3-5$ en [–3, 0]

d) $f(x)=2x^4-6x^3+x$ en [1, 5]

e) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ en [8, 12]

f) $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ en [0, 6]

g) $f(x)=|x^3-4|$ en [–5, 5]

h) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+2}$ en [–1, 1]

a) $TVM\,f[-2,4]=\dfrac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)}=\dfrac{52-10}{6}=\dfrac{42}{6}=7$

b) $TVM\,f[-500,317]=\dfrac{f(317)-f(-500)}{317-(-500)}=\dfrac{5-5}{317-(-500)}=\dfrac{0}{817}=0$

c) $TVM\,f[-3,0]=\dfrac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\dfrac{(4\cdot 0^3-5)-\left[4(-3)^3-5\right]}{3}=\dfrac{(-5)-(-113)}{3}=36$

d) $TVM\,f[1,5]=\dfrac{f(5)-f(1)}{5-1}=\dfrac{(2\cdot 5^4-6\cdot 5^3+5)-(2\cdot 1^4-6\cdot 1^3+1)}{4}=\dfrac{505-(-3)}{4}=127$

e) $TVM\,f[8,12]=\dfrac{f(12)-f(8)}{12-8}=\dfrac{\sqrt{12^2-4}-\sqrt{8^2-1}}{4}=\dfrac{\sqrt{140}-\sqrt{60}}{4}=\dfrac{2\sqrt{35}-2\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{2}\simeq 1{,}02$

f) $TVM\,f[0,6]=\dfrac{f(6)-f(0)}{6-0}=\dfrac{\frac{6}{6+2}-\frac{0}{0+2}}{6}=\dfrac{\frac{3}{4}-0}{6}=\dfrac{1}{8}$

g) $TVM\,f[-5,5]=\dfrac{f(5)-f(-5)}{5-(-5)}=\dfrac{|5^3-4|-|(-5)^3-4|}{10}=\dfrac{121-129}{10}=-\dfrac{4}{5}$

h) $TVM\,f[-1,1]=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\dfrac{\frac{\sqrt[3]{1}}{1^2+2}-\frac{\sqrt[3]{-1}}{(-1)^2+2}}{1-(-1)}=\dfrac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\dfrac{1}{3}$

49. Se estima que dentro de *t* años, la tirada de un periódico local será $C(t)=50t^2+100t+2000$ ejemplares.

a) Calcula la tasa de variación media en los próximos 3 años.

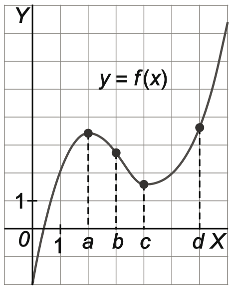
b) Halla la tasa de variación instantánea en el tercer año.

a) $TVM\,C[0,3]=\dfrac{C(3)-C(0)}{3-0}=\dfrac{(50\cdot 3^2+100\cdot 3+2000)-(50\cdot 0^2+100\cdot 0+2000)}{3}=250$ ejemplares/año

b) $TVI\ C(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C(3+h)-C(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left[50(3+h)^2+100(3+h)+2000\right]-\left[50\cdot 3^2+100\cdot 3+2000\right]}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{50h^2+400h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(50h+400)=400$ ejemplares/año

50. Considera la gráfica de la figura y contesta a las siguientes preguntas.



a) ¿Entre qué parejas de puntos consecutivos es negativa la tasa de variación media?

b) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos es máxima la tasa de variación media?

c) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos está más próxima a 0 la tasa de variación media?

a) La *TVM* es negativa entre *a* y *b* y entre *b* y *c*, ya que $f(a) > f(b)$ y $f(b) > f(c)$.

b) La *TVM* es máxima entre *c* y *d*, ya que $f(c) < f(d)$ por lo que su *TVM* es positiva.

c) La *TVM* es más cercana a cero entre *a* y *b*, ya que su valor está entre –1 y 0.

Derivada de una función en un punto

51. Aplicando la definición de derivada, halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $x = 0$

c) $f(x) = 2x + 1$ en $x = 3$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2-1-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h+2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h+2) = 2$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+1}-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-(h+1)}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(h+1)} = -1$

c) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(3+h)+1-7}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2 = 2$

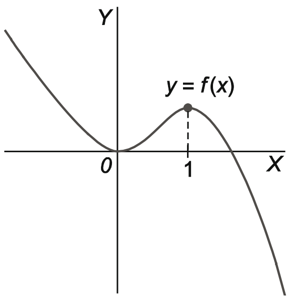
d) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+\sqrt{1}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+h}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$

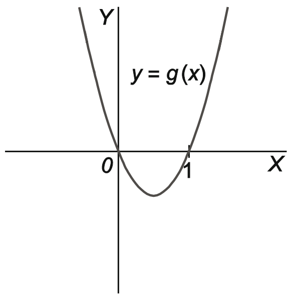
52. La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, 3)$ pasa también por el punto $Q(-1, 0)$. ¿Cuánto vale $f'(2)$?

$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente por $P(2,3)$. Calculamos la ecuación de la recta, $y = mx+n$, que pasa por esos dos puntos: $\begin{cases} 3 = 2m+n \\ 0 = -m+n \end{cases} \Rightarrow m = 1;\ n = 1$. Así pues, $f'(2) = m = 1$.

Función derivada

53. Observa las dos gráficas siguientes y contesta razonadamente si puede ser la función $g(x)$ la derivada de la función $f(x)$.

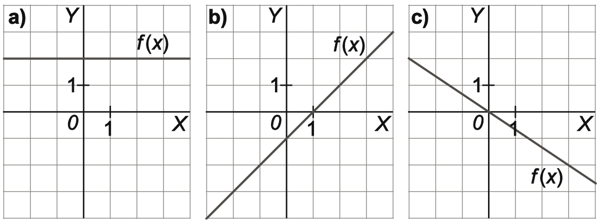




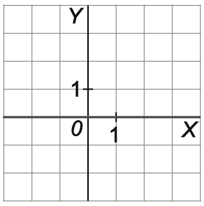
La función $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y, por tanto, su derivada debe ser negativa en este mismo intervalo, pero $g(x)$ es positiva en $(-\infty, 0)$. Así que $g(x) \neq f(x)$.

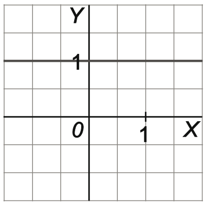
54. En cada caso, utiliza la gráfica de *f* para estimar el valor de la derivada en los puntos indicados y, a continuación, esboza la gráfica de la función $y = f'(x)$.

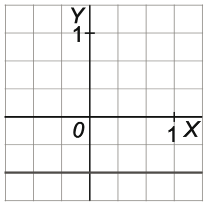
a) $f'(2), f'(3)$ **b)** $f'(-2), f'(0), f'(2)$ **c)** $f'(0), f'(1), f'(4)$



a) $f'(2) = f'(3) = 0$ **b)** $f'(x) = 1$ en todos los puntos **c)** $f'(x) = -\dfrac{2}{3}$ en todos los puntos







Interpretación geométrica

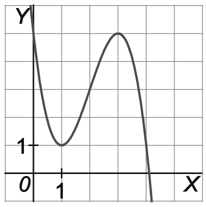
55. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ si tienes estos datos sobre su derivada:

$f'(x) > 0$ en (1, 3) **$f'(x) < 0$ para $x < 1$ y para $x > 3$** **$f'(x) = 0$ para $x = 1$ y para $x = 3$**

La función $f(x)$ debe ser decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y creciente en (1, 3);

además, en $x = 1$ y en $x = 3$ debe tener tangente horizontal.

Con estos requisitos, una posible gráfica para $f(x)$ es la que se muestra a la derecha:



56. Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta $y = -x$.

La pendiente de una recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$. Debe ser igual a la pendiente de la recta $y = -x$, es decir, igual a -1. Así pues, $m = f'(a) = -1$.

$f'(x) = -3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x = -3$ y $x = 3$. Por tanto $a_1 = -3$ y $a_2 = 3$.

Una de las rectas tangentes pasa por el punto de tangencia $P(3, f(3)) = P(3, 51)$. Su ecuación es $y = -x + 54$.

La otra recta tangente pasa por el punto de tangencia $P(-3, f(-3)) = P(-3, -51)$. Su ecuación es $y = -x - 54$.

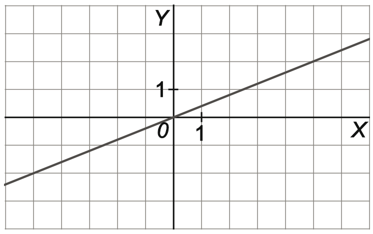
57. ¿En qué puntos son horizontales las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$?

Se calculan los valores de x para los que se anula la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ si $x = 1$ o $x = \dfrac{1}{3}$.

Los puntos en los que la recta tangente a la curva es horizontal son $P(1, f(1)) = P(1, -2)$ y

$Q\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = Q\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{50}{27}\right)$.

58. Dada la curva de ecuación $y = -x^2 + x$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta de la figura.



La recta de la figura tiene por pendiente $m = \frac{2}{5}$. Para calcular los puntos en los que se trazan las tangentes paralelas a la recta del dibujo se debe resolverla ecuación $-2x + 1 = \frac{2}{5}$, que tiene por solución $x = \frac{3}{10}$. Por tanto, la tangente que se pide será $y - \frac{21}{100} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{3}{10}\right)$.

59. Obtén la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto de abscisa 8.

La pendiente m buscada es $f'(8)$. Se calcula pues la función derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ y la pendiente que se pide es $m = f'(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{3}$.

60. Obtén los puntos de la curva $y = x^3$ en los que su tangente es paralela a la recta $y = 12x + 1$.

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$, que a su vez debe ser igual a la pendiente de la recta $y = 12x + 1$. Así pues, $m = f'(a) = 12$. Las abscisas de los posibles puntos de tangencia se encuentran derivando la función e igualando la derivada a 12: $f'(x) = 3x^2 = 12 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$. Por lo que los puntos son $P(-2, f(-2)) = P(-2, -8)$ y $Q(2, f(2)) = Q(2, 8)$.

61. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = \frac{x^2}{2} + 1$ que sea paralela a la recta $y = x + 3$.

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$, que a su vez debe ser igual a la pendiente de la recta $y = x + 3$. Así pues, $m = f'(a) = 1$. La abscisa del punto de tangencia se calcula derivando la función e igualando la derivada a 1: $f'(x) = x = 1 \Rightarrow x = 1$. Por tanto, $a = 1$, y la recta tangente $y - f(a) = m(x - a)$, es $y - \frac{3}{2} = 1 \cdot (x - 1)$.

Derivadas de funciones elementales y operaciones

62. Halla la derivada de $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ de dos formas: aplicando la derivada del cociente y escribiendo f como suma de potencias de x. Observa que deben coincidir los resultados.

Se deriva $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ aplicando la derivada del cociente: $f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

Ahora se escribe f como suma de potencias: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$.

Se deriva la expresión anterior: $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{x-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

63. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^3-2x^2+4x+1$

b) $f(x)=4x^5+3x^3-2x^2-x$

c) $f(x)=-x^7+2x^5-5x^3+7$

d) $f(x)=6x^6-5x^5+4x-8$

e) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^4}{2}+x-1$

f) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+2x$

g) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt{x^3}-x^2$

h) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x}-3$

i) $f(x)=3x^2-x+4-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

j) $f(x)=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}-3x+6x^2$

a) $f'(x)=3x^2-4x+4$

b) $f'(x)=20x^4+9x^2-4x-1$

c) $f'(x)=-7x^6+10x^4-15x^2$

d) $f'(x)=36x^5-24x^4+4$

e) $f'(x)=x^4-2x^3+1$

f) $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+2$

g) $f'(x)=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}-2x$

h) $f'(x)=-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$

i) $f'(x)=6x-1+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$

j) $f'(x)=-\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}-3+12x$

64. Deriva los siguientes productos y cocientes.

a) $f(x)=(x^2+x)(5x^3+1)$

b) $f(x)=(2x^4-x^2)(x^3-5x)$

c) $f(x)=e^x\ln x$

d) $f(x)=x(\ln x-1)+2$

e) $f(x)=2^x\text{sen }x$

f) $f(x)=\text{sen }x\text{ tg}x$

g) $f(x)=3x\sqrt{x}-2x^2\cos x$

h) $f(x)=3^x\text{sen}x+x\sqrt[4]{x}$

i) $f(x)=\log_2 x-\text{sen }x+x$

j) $f(x)=\dfrac{3x^2-3}{x^3+1}$

k) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x^2+x-1}$

l) $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

m) $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}}$

n) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\text{sen}x}$

o) $f(x)=\dfrac{\log_2 x}{1+\text{sen}x}$

p) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\ln x}$

q) $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}$

r) $f(x)=\dfrac{\text{sen}x+\cos x}{\ln x}$

a) $f'(x)=(2x+1)(5x^3+1)+15x^2(x^2+x)=25x^4+20x^3+2x+1$

b) $f'(x)=(8x^3-2x)(x^3-5x)+(2x^4-x^2)(3x^2-5)=14x^6-55x^4+15x^2$

c) $f'(x)=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

d) $f'(x)=1(\ln x-1)+x\dfrac{1}{x}=\ln x-1+1=\ln x$

e) $f'(x)=2^x\ln 2\cdot\text{sen}x+2^x\cos x=2^x(\ln 2\cdot\text{sen}x+\cos x)$

f) $f'(x)=\cos x\text{ tg }x+\text{sen }x(\text{tg}^2 x+1)=\text{sen }x+\dfrac{\text{sen }x}{\cos^2 x}$

g) $f'(x)=3\sqrt{x}+\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}-4x\cos x+2x^2\text{sen}x$

h) $f'(x)=3^x\ln 3\cdot \text{sen}x+3^x\cos x+\sqrt[4]{x}+\dfrac{x}{4\sqrt[4]{x^3}}$

i) $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln 2}-\cos x+1$

j) $f'(x)=\dfrac{6x\left(x^3+1\right)-3x^2\left(3x^2-3\right)}{\left(x^3+1\right)^2}=\dfrac{-3x^4+9x^2+6x}{\left(x^3+1\right)^2}$

k) $f'(x)=\dfrac{2x\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2-2\right)(2x+1)}{\left(x^2+x-1\right)^2}=\dfrac{x^2+2x+2}{\left(x^2+x-1\right)^2}$

l) $f'(x)=\dfrac{(2x+1)\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2+x-1\right)(2x-1)}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{-2x^2+4x}{\left(x^2-x+1\right)^2}$

m) $f(x)=xe^x$ y $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

n) $f'(x)=\dfrac{-\text{sen}^2x-\cos^2 x}{\text{sen}^2x}=-\dfrac{1}{\text{sen}^2x}$

o) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}(1+\text{sen}x)-\log_2 x\cos x}{(1+\text{sen}x)^2}=\dfrac{1+\text{sen}x-x\cdot\ln 2\cdot\log_2 x\cdot\cos x}{x\ln 2(1+\text{sen}x)^2}$

p) $f'(x)=\dfrac{2x\ln x-\left(x^2+1\right)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x^2\ln x-x^2-1}{x(\ln x)^2}$

q) $f'(x)=\dfrac{-\text{sen}x\, e^x-\cos x\, e^x}{\left(e^x\right)^2}=-\dfrac{\text{sen}x+\cos x}{e^x}$

r) $f'(x)=\dfrac{(\cos x-\text{sen}x)\ln x-(\text{sen}x+\cos x)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{x\ln x\cos x-x\ln x\,\text{sen}x-\text{sen}x-\cos x}{x(\ln x)^2}$

65. Aplica la regla de la cadena para derivar estas funciones.

a) $f(x)=\text{sen}(2x)$

b) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{15}$

c) $f(x)=e^{x^3-x+1}$

d) $f(x)=\text{tg}\left(x^3+4x-1\right)$

e) $f(x)=\log_3\left(x^2-\sqrt{x}\right)$

f) $f(x)=\cos^2(5x-3)$

g) $f(x)=\text{sen}(\text{sen}\,x)$

h) $f(x)=\ln^2(\cos x)$

i) $f(x)=\dfrac{\ln\left(x^3-4x\right)}{x}$

j) $f(x)=\dfrac{1+\ln x^2}{x^3}$

k) $f(x)=\sqrt{\text{sen}x-x}$

l) $f(x)=5^{x+\cos x}$

m) $f(x)=\text{tg}^3\left(x^2+1\right)$

n) $f(x)=\text{sen}^2\left(\sqrt{x}\right)$

o) $f(x)=\log_3\sqrt[3]{4x^2-x+4}$

p) $f(x)=\text{sen}^2x\cos^2 x$

q) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-e^{-x}}$

r) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

s) $f(x)=\dfrac{\text{tg}(2x-1)}{\cos\left(x^2+1\right)}$

t) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

a) $f'(x)=\cos(2x)\cdot 2=2\cos(2x)$

b) $f'(x)=15\left(x^2+1\right)^{14}\cdot 2x=30x\left(x^2+1\right)^{14}$

c) $f'(x)=e^{x^3-x+1}\cdot\left(3x^2-1\right)$

d) $f'(x)=\left(\text{tg}^2\left(x^3+4x-1\right)+1\right)\cdot\left(3x^2+4\right)$

e) $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 3\cdot\left(x^2-\sqrt{x}\right)}\cdot\left(2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

f) $f'(x)=2\cos(5x-3)(-\text{sen}(5x-3))\cdot 5=-10\cos(5x-3)\,\text{sen}(5x-3)$

g) $f'(x)=\cos(\text{sen}x)\cos x$

h) $f'(x)=2\ln(\cos x)\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\text{sen}x)=-\dfrac{2\ln(\cos x)\,\text{sen}x}{\cos x}$

i) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x}\cdot x-\ln(x^3-4x)}{x^2}=\dfrac{3x^2-4-\ln(x^3-4x)(x^2-4)}{x^2(x^2-4)}$

j) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2}\cdot x^3-3x^2(1+\ln x^2)}{x^6}=-\dfrac{x^2+\ln x^2}{x^6}$

k) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\text{sen}x-x}}\cdot(\cos x-1)=\dfrac{\cos x-1}{2\sqrt{\text{sen}x-x}}$

l) $f'(x)=\ln 5\cdot 5^{x+\cos x}(1-\text{sen}x)$

m) $f'(x)=3\text{tg}^2(x^2+1)(\text{tg}^2(x^2+1)+1)\cdot 2x=6x\cdot\text{tg}^2(x^2+1)(\text{tg}^2(x^2+1)+1)$

n) $f'(x)=2\text{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\text{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

o) $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 3\sqrt[3]{4x^2-x+4}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(4x^2-x+4)^2}}\cdot(8x-1)=\dfrac{8x-1}{3\ln 3(4x^2-x+4)}$

p) $f'(x)=2\text{sen}x\cos x\cdot\cos^2x+\text{sen}^2x\cdot 2\cos x\cdot(-\text{sen}x)=2\text{sen}x\cos x(\cos^2x-\text{sen}^2x)$

q) $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x^2-e^{-x})^3}}\cdot(2x+e^{-x})=\dfrac{2x+e^{-x}}{4\sqrt[4]{(x^2-e^{-x})^3}}$

r) $f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

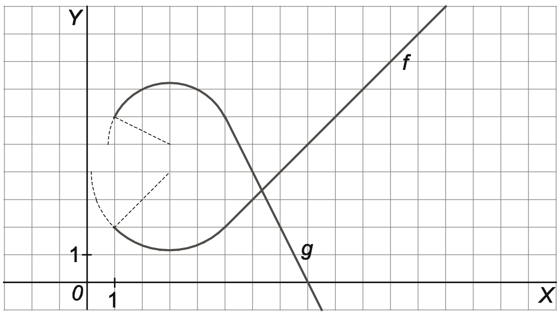
s) $f'(x)=\dfrac{(\text{tg}^2(2x-1)+1)\cdot 2\cdot\cos(x^2+1)-\text{tg}(2x-1)(-\text{sen}(x^2+1))\cdot 2x}{\cos^2(x^2+1)}$

t) $f'(x)=\dfrac{x}{x-1}\cdot\dfrac{x-(x-1)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2-x}$

66. En la figura se dan las gráficas de las funciones *f* y *g*, compuesta por arcos de circunferencia y segmentos. Calcula:

a) $(f+g)'(5)$ **c)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(5)$ **e)** $(f^2)'(5)$

b) $(fg)'(5)$ **d)** $(f\circ g)'(5)$ **f)** $(g\circ f)'(5)$



Trazando la recta tangente a las funciones *f* y *g* en $x=5$ y contando los cuadritos se puede hallar su pendiente, es decir, su derivada: $f'(5)=1$ y $g'(5)=-2$. Análogamente $g'(2)=\dfrac{1}{2}$. Además, $f(5)=2$ y $g(5)=6$.

a) $(f+g)'(5)=f'(5)+g'(5)=1-2=-1$

b) $(fg)'(5)=f'(5)g(5)+g'(5)f(5)=1\cdot 6+2(-2)=2$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(5)=\dfrac{f'(5)\,g(5)-g'(5)\,f(5)}{[g(5)]^2}=\dfrac{16-2(-2)}{6^2}=\dfrac{5}{18}$

d) $(f\circ g)'(5)=f'(g(5))\,g'(5)=f'(6)\,(-2)=1(-2)=-2$

e) $(f^2)'(5)=2f(5)f'(5)=2\cdot 2\cdot 1=4$

f) $(g\circ f)'(5)=g'(f(5))f(5)=g'(2)f'(5)=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$

67. A partir de la relación $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y aplicando la regla de la cadena, deduce la derivada de la función $y = \cos x$ y, a continuación, la derivada de $y = \operatorname{tg} x$.

$$(\cos\ x)' = \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \operatorname{sen} x \cdot (-1) = -\operatorname{sen} x$$

$$\text{Si } f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

68. La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ satisface las siguientes condiciones.

a) Pasa por el punto (0, 0).

b) Tiene un mínimo relativo en el punto (1, –1).

Calcula los coeficientes *a*, *b* y *c*.

Como *f* pasa por el punto (0, 0), $f(0) = 0$, por lo que $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = 0$; $c = 0$.

Como *f* pasa por el punto (1, –1), $f(1) = -1$, por lo que $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c = -1$; $a + b = -1$.

Tiene un mínimo de abscisa $x = 1$, por lo que $f'(1) = 0$; $3^a + b = 0$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{3}{2}$

69. Deduce la fórmula que da el valor de la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Recuerda que el vértice de una parábola es siempre un máximo o un mínimo relativo.

El vértice de una parábola es su máximo o su mínimo, entonces $f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

70. Para cada valor de *a* se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$. Calcula el valor de *a* para que *f* tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{(6x - a)(x + 2) - (3x^2 - ax)}{(x + 2)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{(12 - a) \cdot 4 - (12 - 2a)}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Para verificar que dicho extremo es un mínimo, se estudia el signo de la derivada cerca de $x = 2$.

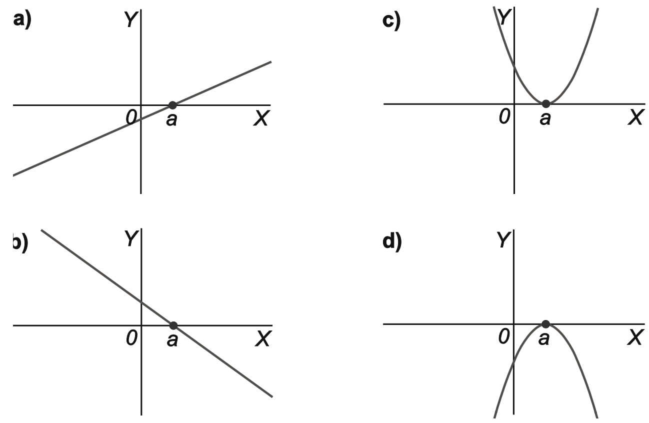
$$f(x) = \frac{3x^2 - 18x}{x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x + 6)(x - 2)}{(x + 2)^2}$$

$-6 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente a la izquierda de $x = 2$.

$x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente a la derecha de $x = 2$.

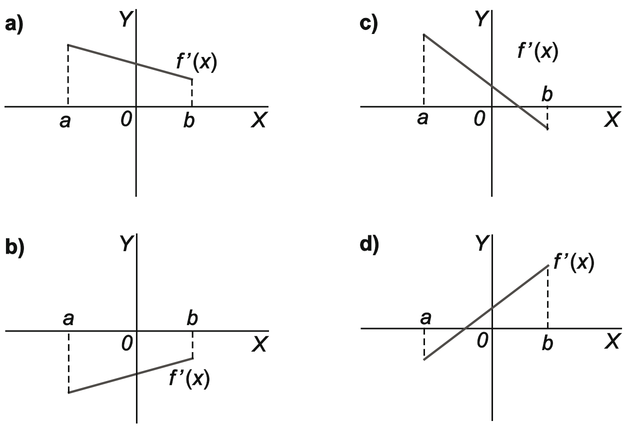
Entonces, para $a = 18$, la función dada tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

71. **Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la derivada de una función que tiene un máximo en el punto $x = a$.**



Si tiene un máximo, además de anularse en *a*, debe pasar de ser positiva a negativa, por pasar *f* de creciente a decreciente. Por tanto, la solución es la gráfica b.

72. **Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la derivada de una función creciente en el intervalo [*a, b*].**



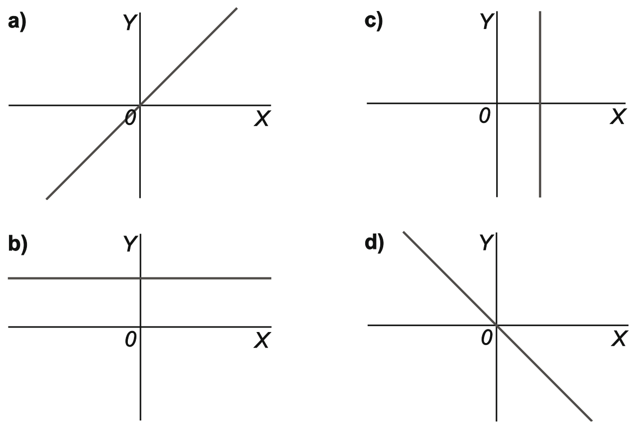
Si *f* es creciente en el intervalo [*a*, *b*], la derivada debe ser positiva en dicho intervalo, por lo que la solución es la gráfica a.

73. Razona y relaciona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con el tipo de función descrito en cada caso.

I. Una función lineal creciente.

II. Una función cuadrática, esto es, un polinomio de segundo grado, cuyo vértice corresponde al mínimo absoluto de la misma.

III. Una función cuadrática cuyo vértice corresponde al máximo absoluto de la misma.



I. Si f es una función lineal creciente su derivada es una función constante positiva, por lo que la solución es la gráfica b**.**

II. Si f es una función cuadrática con un mínimo absoluto, es decreciente hasta dicho mínimo y creciente después, por lo que su derivada será negativa antes de ese valor y positiva después. La solución es la gráfica a**.**

III. Si f es una función cuadrática con un máximo absoluto, es creciente hasta dicho punto y decreciente después, por lo que su derivada será positiva antes de ese valor y negativa después. La solución es la gráfica d.

Problemas de optimización

74. Encuentra dos números no negativos que sumen 14, de forma que la suma de sus cuadrados sea:

a) Máxima **b)** Mínima

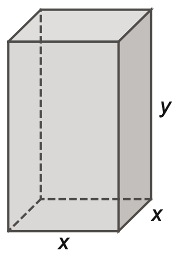
Los números son x y $14 - x$. La suma de sus cuadrados es $x^2 + (14 - x)^2$.

La derivada de la función $f(x) = x^2 + (14 - x)^2 = 2x^2 - 28x + 196$ es $f'(x) = 4x - 28$ que se anula para $x = 7$.

Se buscan los máximos o mínimos en los valores de x que anulan la derivada y en los extremos del dominio de definición de la función que, en este caso es [0, 14], pues los números no pueden ser negativos.

Como $f(0) = 196$, $f(7) = 98$ y $f(14) = 196$, el máximo se alcanza cuando uno de los números es 0 y el otro 14; y el mínimo cuando los dos números son iguales a 7**.**

75. Un depósito abierto de chapa y de base cuadrada debe tener capacidad para 13 500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que precise la menor cantidad de chapa?



Si el lado de la base mide x metros y la altura mide y metros, la función a minimizar es

$x^2 + 4xy$.

Se establece la relación entre x e y utilizando el dato del volumen: $x^2y = 13{,}5\ \text{m}^3$.

De esa expresión se despeja la variable y: $y = \dfrac{13{,}5}{x^2}$ y la función a minimizar es:

$$f(x) = x^2 + \frac{4 \cdot 13{,}5}{x} = x^2 + \frac{54}{x} = \frac{x^3 + 54}{x}$$

$f'(x) = \dfrac{3x^3 - \left(x^3 + 54\right)}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 54}{x^2} = 0$ si $2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$ que es un mínimo de la función ya que la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del 3.

Así pues, las dimensiones que minimizan la cantidad de chapa son 3 metros de lado de la base y $\dfrac{13{,}5}{3^2} = 1{,}5$ metros de altura. Esta mínima cantidad de chapa son $f(3) = 27\ \text{m}^2$.

76. Los beneficios que se obtienen de la venta de x unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $B(x)=-2x^3+216x-256$.

a) ¿Cuántas unidades vendidas dan el mayor beneficio?

b) Determina el número de unidades que hay que vender para el que se maximice el beneficio medio: $\frac{B(x)}{x}$.

a) Hay que hallar el máximo de la función $B(x)=-2x^3+216x-256$, en la que x no puede ser negativa.

$B'(x)=-6x^2+216$; $B'(x)=0 \Rightarrow -6x^2+216=0 \Rightarrow x=6$. La solución negativa se descarta obviamente. Se comprueba si es, en efecto, máximo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si} \quad 0<x<6 \Rightarrow f'(x)>0 \\ \text{Si} \quad x>6 \Rightarrow f'(x)<0\end{array}\right\} P(6, B(6))=P(6, 608)$$

El beneficio máximo es de 608 y se obtiene con la venta de 6 unidades.

b) Hay que hallar el máximo de la función $B_m(x)=\frac{B(x)}{x}=\frac{-2x^3+216x-256}{x}=-2x^2+216-\frac{256}{x}$, en la que x no puede ser negativa.

$B_m{}'(x)=-4x+\frac{256}{x^2}$; $B_m{}'(x)=0 \Rightarrow -4x+\frac{256}{x^2}=0 \Rightarrow x=4$

Se comprueba si es, en efecto, máximo: $\left.\begin{array}{l}\text{Si} \quad 0<x<4 \rightarrow B_m{}'(x)>0 \\ \text{Si} \quad x>4 \rightarrow B_m{}'(x)<0\end{array}\right\} P(4, B_m(4))=P(4, 120)$

El beneficio medio máximo es de 120 y se obtiene con la venta de 4 unidades.

CUESTIONES

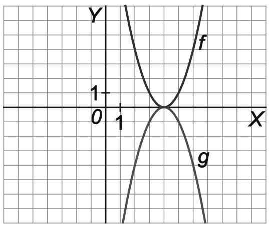
77. Las siguientes afirmaciones son falsas. Haz ver con algún dibujo que, efectivamente, lo son.

a) Si $f(3) > g(3)$, entonces $f'(3) \geq g'(3)$

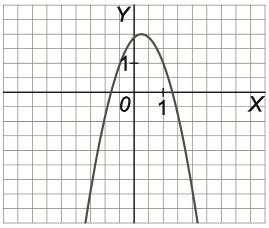
b) Si $f'(0) > 0$, entonces $f(0) \leq f(1)$

c) Si $f'(1) = 0$, entonces $f(0) = f(2)$

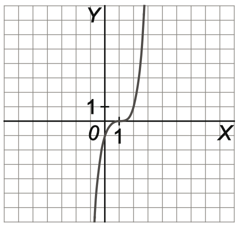
a) $f(3) > g(3)$ pero $f'(3) < 0$ y $g'(3) > 0$.



b) $f'(0) > 0$ pero $f(0) > 0$ y $f(1) = 0$.



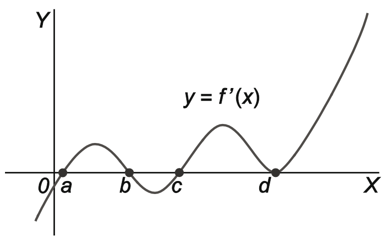
c) $f'(1) = 0$ pero $f(0) < 0$ y $f(2) > 0$.



78. ¿Es tangente la recta $y = x + 5$ a la curva $y = x^4 - 3x + 2$?

De ser tangente, lo sería en un punto de la curva en el que $y' = 1$. Pero $y' = 4x^3 - 3 = 1 \Rightarrow x = 1$. El punto de la curva de abscisa $x = 1$ tiene ordenada $y = 1^4 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Pero el punto (1, 0) no pertenece a la recta $y = x + 5$, luego no es tangente.

79. Decide las abscisas de los puntos en los que f presenta un extremo relativo, si la gráfica de $y = f'(x)$ es:

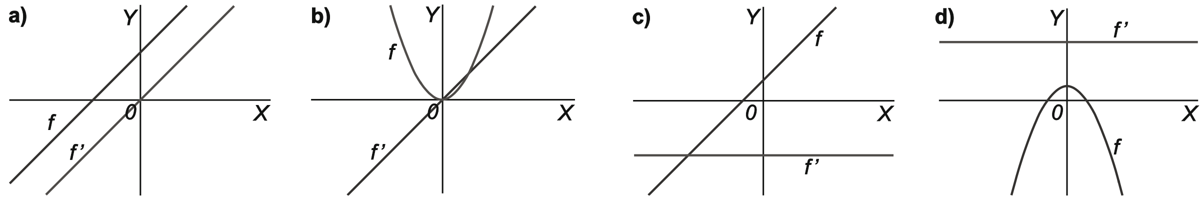


Los máximos y mínimos relativos están en los puntos en los que la derivada cambia de signo. Si pasa de positiva a negativa, serán máximos, y si el cambio es de negativo a positivo, serán mínimos.

Así pues, presenta un máximo en $x = b$ y mínimos en $x = a$ y en $x = c$.

Obsérvese que en $x = d$ la derivada no cambia de signo.

80. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con una función y su derivada.



De una función polinómica a su derivada se baja un grado, con lo que se descarta la función del apartado a. Además, como las parábolas crecen y decrecen, a los lados del vértice, la derivada debe tener un cambio de signo, y la función derivada f' del apartado d no cambia de signo.

Como en c la función f es creciente, f' debería ser positiva, y es negativa.

En conclusión, el único apartado correcto es el b.

81. Si $f'(a) = 0$, entonces ¿tiene que presentar la gráfica de f un máximo o un mínimo relativo en el punto de abscisa a?

No necesariamente, por ejemplo, $f(x) = x^3$ y $a = 0$.

82. El máximo valor de f en el intervalo $[a, b]$, ¿se alcanza necesariamente en un punto con tangente horizontal?

No necesariamente, por ejemplo, $f(x) = x^2$ y $[a, b] = [-1, 4]$.

83. Si $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h) \neq f(2)$, entonces la gráfica de f ¿puede tener tangente en el punto de abscisa 2?

No, pues si $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h) \neq f(2)$, entonces f no es continua en $x = 2$ y por tanto no tiene tangente en dicho punto.

84. Si f tiene tangente en todos los puntos y es creciente, entonces ¿tiene que ocurrir que $f'(x) > 0$ para cualquier valor de x?

No, por ejemplo $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$ y $f'(0) = 0$.

85. Si f y g son funciones con derivadas en todos los puntos y $f(x)g(x) = x + 3$, ¿puede presentar alguna de las dos curvas, f o g, algún máximo en el eje de abscisas?

No, pues $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1$, y si hubiera algún máximo de alguna de las dos en el eje de abscisas, por ejemplo f, en ese punto $(a, f(a))$ sería $f(a) = 0$ y $f'(a) = 0$ con lo que la expresión anterior sería igual a 0.

86. Responde verdadero o falso.

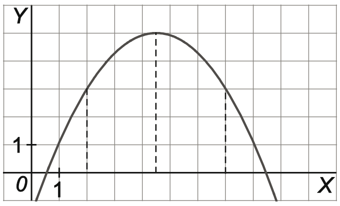
a) Si f tiene derivada en todos los puntos y $f(2) = f(7)$, debe haber un número c entre 2 y 7 con $f'(c) = 0$.

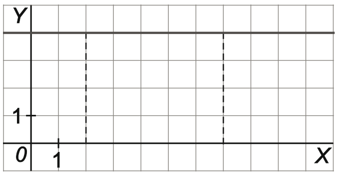
b) Existe f para la que $f(2) = 3$, $f(5) = 6$ y $f'(x) > 1$ para todo x.

c) Si f y g son positivas y crecientes, entonces $f\,g$ es creciente.

a) Verdadera, pues si una función toma el mismo valor en los extremos de un intervalo sólo se pueden dar una de estas dos situaciones:

La función toma valores distintos de los extremos en los puntos del interior, con lo que, obligatoriamente pasará de creciente a decreciente, o viceversa, y alcanzará un extremo relativo $x = c$ en el interior, donde la derivada se anulará.





La función en el interior toma los mismos valores que en los extremos por lo que se trata de una función constante. En este caso se verifica que en cualquier c de (2, 7) se cumple que $f'(c) = 0$.

b) Falso, pues $TMV\,f\,[2, 5] = 1$ y si para todo x fuera $f'(x) > 1$, sería $TMV\,f\,[2, 5] > 1$.

c) Verdadero, pues $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, pues ambos sumandos son positivos.

PROBLEMAS

87. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población y el tamaño de ésta en ese momento.

c) El tamaño de la población a largo plazo.

a) $P(0) = 15$ millones.

b) $$P'(t) = \frac{(t+1)^2 \cdot 2t - (15+t^2)\cdot 2(t+1)}{(t+1)^4} = \frac{2\left[t(t+1) - (15+t^2)\right]}{(t+1)^3} = \frac{2(t-15)}{(t+1)^3} = 0 \text{ si } t = 15$$

Si $0 < t < 15$, $P'(t) < 0$, por lo que P es decreciente y si $t > 15$, $P'(t) > 0$ con lo que P es creciente. Así pues, al cabo de 15 años se alcanza el mínimo absoluto en el tamaño de la población, que vale $P(15) = \dfrac{240}{256} \simeq 0{,}94$ millones.

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15+t^2}{(t+1)^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15+t^2}{t^2+2t+1} = 1$, con lo que la población tiende a estabilizarse en torno al millón de individuos.

88. Una empresa de venta por teléfono ha establecido para sus empleados un incentivo mensual, $f(x)$ (en €), en relación con el valor x (también en €) de lo vendido por cada uno según la función.

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}03x-30 & \text{si } 0\le x\le 10\,000 \\ \dfrac{600x}{x+10\,000} & \text{si } x>10\,000 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de f e indica si hay algún valor en las ventas que la empresa valore especialmente.

b) ¿Es el incentivo siempre creciente en relación con las ventas realizadas?

c) ¿Puede un empleado recibir 600 €de incentivo? ¿Por qué? ¿Y 598 €?

a) Como f es continua, de forma evidente, para $x\neq 10\,000$, se estudia la continuidad sólo en $x = 10\,000$.

$\lim\limits_{x\to 10000^-} f(x)=270$; $\lim\limits_{x\to 10000^+} f(x)=300$, así que f no es continua en $x = 10000$, valor en ventas que la empresa valora especialmente.

b) Hasta 10000 sí, pues el incentivo mensual viene dado por una recta de pendiente positiva.

Si $x > 10\,000$, $f'(x)=\dfrac{600(x+10\,000)-600x\cdot 1}{(x+10\,000)^2}=\dfrac{600\cdot 10\,000}{(x+10\,000)^2}>0$ con lo que f también es creciente si

$X > 10000$.

Finalmente, como $\lim\limits_{x\to 10\,000^-} f(x)<\lim\limits_{x\to 10\,000^+} f(x)$, resulta que, efectivamente, el incentivo es siempre creciente en relación con las ventas realizadas.

c) Como $f(10\,000) = 270$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=600$ y $f'(x) > 0$, ningún empleado podrá alcanzar los 600 € de incentivo.

Sí se pueden alcanzar 598€.

89. Una compañía puede producir x cientos neumáticos de calidad A. Además, por cada x cientos neumáticos de calidad A es capaz de producir $\dfrac{40-12x}{6-x}$ cientos neumáticos de calidad B, que dejan la mitad de beneficio que los de calidad A. Por problemas de almacenamiento, la compañía no puede producir más de 550 neumáticos de calidad A.

Halla el número de neumáticos de cada tipo que resulte más rentable producir.

Llamando b al beneficio que producen cada cien neumáticos de calidad A, el beneficio total viene dado por la función $f(x) = bx + f(x)=bx+\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{40-12x}{6-x}=b\left[x+\dfrac{20-6x}{6-x}\right]$ Se pide encontrar el máximo de f en [0; 5,5].

$f'(x) = b\,f'(x)=b\left[1+\dfrac{(6-x)(-6)+(20-6x)}{(6-x)^2}\right]=b\left[1-\dfrac{16}{(6-x)^2}\right]=0$ si $6 - x = \pm 4$, $x = 10$ o $x = 2$.

Se calcula el valor de la función para estos valores de x: $f(0) = 3{,}3b$; $f(5{,}5) < 0$ y $f(2) = 4b$. El máximo beneficio se obtiene en $x = 2$, es decir, produciendo 200 neumáticos de calidad A y 400 de calidad B.

90. Los beneficios de una fábrica de camisas dependen del número de camisas que se fabrican cada día, según la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 19$, donde x mide el número de camisas fabricadas al día, y $f(x)$, la ganancia en miles de € al mes. Atendiendo al número de máquinas y personal necesarios, la fábrica puede optar por fabricar un número diario de camisas comprendido entre 1000 y 4000. ¿Cuántas camisas debe fabricar para obtener un beneficio máximo?

Se pide el máximo de f en [1, 4].

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$ si $x = 2$ o $x = 3$.

Se calcula el valor de la función para estos valores de x: $f(1) = 4$, $f(2) = 9$, $f(3) = 8$ y $f(4) = 13$.

Se observa que el máximo beneficio se obtiene fabricando 4000 camisas diarias.

91. En el año 2000 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años según la función

$$N(t) = 40(t^3 - 4{,}5t^2 + 6t + 3)$$

donde *t* mide el número de años desde el inicio de la fundación.

a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores?

b) ¿En qué período de tiempo aumentó el número de socios?

c) ¿En qué año tuvo la sociedad el mínimo número de socios?

a) En el año 2000 tenemos que $t = 0$, por lo que $N(0) = 120$ socios fundadores.

b) $N'(t) = 40(3t^2 - 9t + 6) > 0$ si $t < 1$ o $t > 2$, así que hasta el año 2001 aumentó el número de socios, que volvió a aumentar a partir del final del 2002.

c) Calculamos los valores de la función $N(t)$ al inicio de cada intervalo de crecimiento, que son $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$: $N(0) = 120$, $N(2) = 200$, por lo que el mínimo número de socios se produjo en el momento de su fundación, año 2000.

92. Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral desde las 8 hasta las 15 horas, analizando el número de instancias revisadas en una hora. La función que expresa dicho rendimiento es

$$R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$$

siendo *t* el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral.

a) Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre $t = 2$ y $t = 4$.

b) Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento entre las 9 y las 14 horas, y entre las 9 y las 12 horas.

a) $TVM\,R\,[2, 4] = \dfrac{R(4) - R(2)}{4 - 2} = \dfrac{16 - 26}{2} = -5$

b) $R'(t) = 30 - 21t + 3t^2 = 0$ si $t = 2$ o $t = 5$.

Se pide el máximo y el mínimo de $R(t)$ en [1, 6] y en [1, 4].

En [1, 6], se calcula $R(1) = 20{,}5$; $R(2) = 26$; $R(5) = 12{,}5$ y $R(6) = 18$. El momento de máximo rendimiento entre las 9 y 14 horas se produce en $t = 2$, es decir, a las 10 de la mañana; y el de mínimo rendimiento en $t = 5$, es decir, a las 13 horas.

En [1, 4], además de los valores calculados previamente, $R(1)$ y $R(2)$, se calcula $R(4) = 16$. El máximo rendimiento entre las 9 y las 12 se alcanzará en el mismo punto que antes, es decir, a las 10 de la mañana; y el mínimo en $t = 4$, es decir, a las 12 horas.

93. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m^2. El metro lineal de tramos horizontales cuesta 2,50 €, y el de tramos verticales, 5 €. Determina las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo y el precio de dicho marco.

Llamando x e y a las dimensiones de la ventana, como indica la figura, el precio del marco es: $P(x, y) = 2(2{,}5x + 5y) = 5x + 10y$ €.

Como $xy = 8$ entonces $y = \dfrac{8}{x}$ y el precio será $P(x) = 5x + \dfrac{80}{x}$. Se calcula el mínimo de P, para $x > 0$.

$P'(x) = 5 - \dfrac{80}{x^2} = 0$ si $x = 4$ o $x = -4$. Se descarta la solución negativa.

Si $0 < x < 4$, $P'(x) < 0$, por lo que P es decreciente. Si $x > 4$, $P'(x) > 0$ y P es creciente, así que el mínimo absoluto se encuentra en $x = 4$, $y = \dfrac{8}{4} = 2$, $P(4) = 5 \cdot 4 + \dfrac{80}{4} = 20 + 20 = 40$.

Las dimensiones del marco son de 4 m el tramo horizontal y 2 m el tramo vertical. El coste mínimo es de 40 €.

94. Considera la función *f* definida en (0, +∞) mediante la fórmula $f(x)=\frac{2(1+\ln x)}{x}$.

a) Resuelve la ecuación $f(x)=0$, redondeando el resultado hasta las milésimas.

b) Resuelve la inecuación $f(x)>0$.

c) Obtén $f'(x)$ los máximos o mínimos relativos de $f(x)$.

d) Esta función sirve como modelo para analizar los beneficios mensuales (en miles de €) de una empresa que vende *x* miles de objetos. Utilizando las cuestiones anteriores, responde estas preguntas.

1. ¿Cuál es el mínimo número de objetos que deben vender para que el beneficio sea positivo?

2. ¿Cuántos objetos deben vender para obtener el máximo beneficio?

a) $f(x)=0$ si $\ln x=-1$, $x=\frac{1}{e}=0{,}367879441171442\ldots\simeq 0{,}368$.

b) Si $0<x<\frac{1}{e}$, $f(x)<0$ y si $x>\frac{1}{e}$, $f(x)>0$, por lo que $f(x)>0$ en $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

c) $f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x-2(1+\ln x)\cdot 1}{x^2}=-\frac{2\ln x}{x^2}=0$ si $\ln x=0$ cuya solución es $x=1$.

El único posible máximo o mínimo relativo se encuentra en $x=1$.

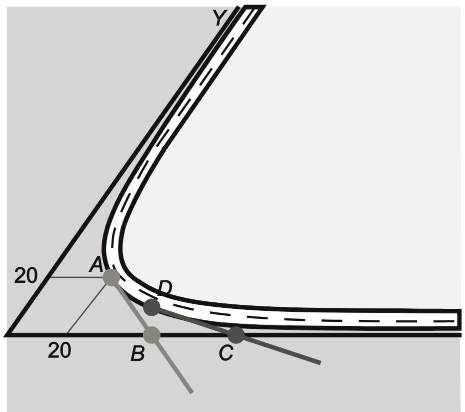
Si $x<1$, $f'(x)>0$. Si $x>1$, $f'(x)<0$. En $x=1$ hay un máximo relativo, que además es absoluto.

d) **1.** El beneficio es positivo en $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, así que el valor de *x* pedidos es $\frac{1}{e}$, que corresponde a 368 objetos.

2. El máximo beneficio se obtiene en $x=1$, que corresponde a $f(1)=2$, es decir, vendiendo 2000 objetos.

ENTORNO MATEMÁTICO

Salirse por la tangente



Sergio es un piloto profesional de pruebas. Acaba de llegar a un circuito en construcción en el que le han ofrecido probar el trazado para mejorar la seguridad. Una de las pruebas que tiene que realizar es tomar la curva llamada "platillo volante" a una velocidad elevada para forzar al vehículo a salirse por la tangente en el punto central de la curva y, así, ajustar las indicaciones y el espacio libre para que los posibles accidentes no tengan consecuencias graves.

Como Sergio es un profesional ha procurado formarse en matemáticas y física y con los planos en la mano empieza a estudiar la situación de la curva:

"La curva tiene forma de hipérbola y considerando como ejes de coordenadas aproximados las dos rectas que une, se puede describir bastante bien por la función $y = \frac{400}{x}$, donde tanto x como y están dados en metros.

La recta de seguridad parte del punto *A* que en el plano corresponde a las coordenadas (20, 20) metros. La longitud de esa recta debe ser el doble que la distancia que hay de *A* al punto *B* situado en el eje *X*". Lee con atención las notas de Sergio y ayúdale en su trabajo contestando las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto *B* en el que la recta tangente a la curva en *A* corta el eje de abscisas?

b) Si se establece una segunda recta de seguridad que debe cortar al eje *X* en el punto *C* cuya abscisa es 1,5 veces la de *B*, ¿en qué punto *D* de la curva debe iniciarse dicha recta?

a) Se calcula la función derivada: $f'(x) = -\frac{400}{x^2}$.

La recta tangente a la función $f(x) = \frac{400}{x}$ en el punto *A* tiene pendiente $m = f'(20) = -\frac{400}{20^2} = -1$.

La ecuación de dicha recta es: $y - 20 = -1 \cdot (x - 20)$. Simplificando: $y = -x + 40$.

Dicha recta cortará al eje de abscisas, $y = 0$, en el punto $B(40, 0)$.

b) La abscisa correspondiente al punto *C* es $1,5 \cdot 40 = 60$, por lo que *C* tiene coordenadas $C(60, 0)$.

La recta tangente en el punto $D(x_0, y_0)$ tendrá pendiente: $m = f'(x_0) = -\frac{400}{x_0^2}$.

Además, por ser *D* un punto de la curva, verificará su ecuación: $y_0 = f(x_0) = \frac{400}{x_0}$.

Se sustituye en la ecuación punto–pendiente de la recta tangente en *D*, $y - y_0 = m(x - x_0)$, los datos que se conocen: $y = 0$, $x = 60$, $m = f'(x_0) = -\frac{400}{x_0^2}$, y resulta la ecuación: $0 - \frac{400}{x_0} = -\frac{400}{x_0^2}(60 - x_0)$, cuya solución es $x_0 = 30$.

Además $y_0 = f(30) = \frac{40}{3}$. Por tanto, la recta debe iniciarse en el punto $D\left(30, \frac{40}{3}\right)$.

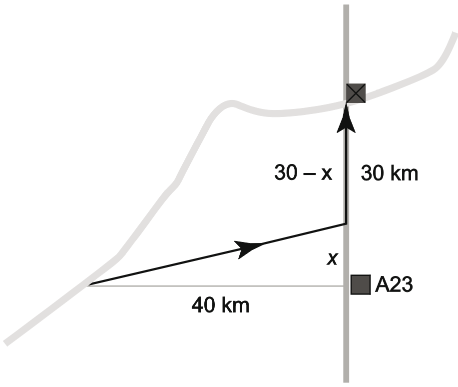
“Contrarreloj”

Laura y Miguel están en el puesto A23 de Protección Civil situado en una carretera. A primera hora de la mañana han tenido que viajar 40 km campo a través en dirección perpendicular a la carretera, para comprobar el estado de un dique en un arroyo, debilitado por las intensas lluvias.

“Si llego a saber que esto era tan aburrido no me hubiera apuntado voluntario” dice Miguel cuando bajan para revisar el dique. Laura se ríe y le contesta “mejor estar aburrido, ya que eso significa que no está pasando nada grave. Además cállate que basta que lo digas para...” Laura no termina la frase porque en ese momento les avisan del centro de operaciones. Ha habido una crecida 30 km carretera arriba del puesto A23 y una familia está atrapada en su casa. Por la información que les han podido dar, el agua les alcanzará en 55 minutos.

Los compañeros se miran excitados y asustados. Pueden ir campo a través directos a la casa amenazada pero entonces su velocidad no sería superior a 50 km/h, mientras que en la carretera podrían alcanzar los 120 km/h. Miguel dice “no hay problema, vamos a calcular hacia qué punto de la carretera debemos ir en línea recta para que el tiempo total de nuestro viaje sea mínimo. Para algo me tienen que servir las matemáticas del instituto”.

Realiza el cálculo con ayuda del esquema que rápidamente ha dibujado Miguel y comprueba si llegarán a tiempo para evacuar a la familia.



Se utiliza la fórmula del MRU (movimiento en una recta con velocidad constante): $v = \frac{e}{t}$,

donde v = velocidad, e= distancia y t = tiempo. Despejando el tiempo en dicha fórmula: $t = \frac{e}{v}$.

Llamamos v_1, e_1 y t_1 los datos del primer tramo, campo a través, y v_2, e_2 y t_2 los del segundo, los de la carretera.

La función que relaciona la distancia x con el tiempo total empleado es $t = f(x) = t_1 + t_2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras, la distancia recorrida campo a través es $e_1 = \sqrt{x^2+1600}$.

Como $v_1 = 50$ km/h y $v_2 = 120$ km/h y $e_2 = 30 - x$ tenemos que $t_1 = \frac{e_1}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2+1600}}{50}$ y $t_2 = \frac{e_2}{v_2} = \frac{30-x}{120}$.

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1600}}{50} + \frac{30-x}{120} \Rightarrow f'(x) = \frac{12x - 5\sqrt{x^2+1600}}{600\sqrt{x^2+1600}} = 0$.$x \simeq 18{,}334$ km.

Como $f'(x) < 0$ si $0 < x < 18{,}334$, y $f'(x) > 0$ si $18{,}334 < x < 30$, entonces $x \simeq 18{,}334$ es un mínimo de $f(x)$.

El tiempo empleado es $f(18{,}334) \simeq 0{,}977$ horas $= 0{,}977 \cdot 60$ minutos $\simeq 58$ minutos.

Eso quiere decir que, aún siguiendo el camino más rápido, no llegarán a tiempo.

Hay que observar que en los casos extremos se obtienen resultados parecidos:

$f(0) = 1,\ 05$ horas = 1 hora y 3 minutos

$f(30) = 1$ hora

Por tanto, si hacen todo el trayecto campo a través, se tardarán 1 hora, y si hace el trayecto mayor que se puede por carretera, 30 km, después de 40 km campo a través, se tarda prácticamente lo mismo, una hora exacta.

AUTOEVALUACION

Averigua qué has aprendido

1. Determina los dominios de *f* y de *f′*, así como una expresión para *f′* en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)=\frac{x}{2}-x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ **b)** $f(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x\sqrt{3}}$

a) $f'(x)=\frac{1}{2}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$, $D(f)=D(f')=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $f'(x)=-\frac{8}{x^3}+\frac{15}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{3}\,x^2}$, $D(f)=D(f')=\mathbb{R}-\{0\}$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+x}$ **b)** $f(x)=\cos^2(3x-4)$

a) Si $x\neq 0\Rightarrow f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ y, por tanto, $f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

b) $f'(x)=2\cos(3x-4)\left[-\operatorname{sen}(3x-4)\right]\cdot 3=-6\cos(3x-4)\operatorname{sen}(3x-4)$

3. Halla las expresiones de las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{(5x+1)^2}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\left(1+5\sqrt{x}\right)^3$

a) $f'(x)=\frac{2(5x+1)\cdot 5\left(x^2-1\right)-(5x+1)^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2(5x+1)\left(5x^2-5-5x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{2(5x+1)(x+5)}{\left(x^2-1\right)^2}$

b) $f'(x)=3\left(1+5\sqrt{x}\right)^2\cdot\frac{5}{2\sqrt{x}}=\frac{15\left(1+5\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}}$

4. Halla la derivada segunda de la función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2}=-\frac{1}{x(x+1)}\qquad f''(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

También se pueden usar las propiedades de logaritmos y luego derivar: $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(x+1)}\qquad f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{-x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

5. ¿Hay algún punto en la gráfica de $f(x)=\frac{3}{x+1}$ en el que la tangente sea horizontal?

No, pues $f'(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}$ nunca se anula.

6. En cada caso, determina los puntos de la gráfica de *f* en los que la tangente tiene de pendiente *m*.

a) $f(x) = \left(x^2 - x - 2\right)^3$, $m = 0$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - 1}$, $m = 1$

a) $f'(x) = 3\left(x^2 - x - 2\right)^2(2x - 1) = 0$ se cumple si $x^2 - x - 2 = 0$ o $2x - 1 = 0$, cuyas soluciones son:

$x = -1$, $x = 2$ y $x = \frac{1}{2}$, por lo que los puntos de la gráfica en el que la tangente tiene pendiente 0 son:

$A(-1, f(-1)) = A(-1, 0)$; $B(2, f(2)) = B(2, 0)$ y $C\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = C\left(\frac{1}{2}, -\frac{729}{64}\right)$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2} - 1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x}{2} - 1}} = 1$ cuya solución es: $4\sqrt{\frac{x}{2} - 1} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{16} \Rightarrow x = \frac{17}{8}$.

El punto de la gráfica en el que la tangente tiene pendiente 1 es $A\left(\frac{17}{8}, f\left(\frac{17}{8}\right)\right) = A\left(\frac{17}{8}, \frac{1}{4}\right)$.

7. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x$. Determina *a* y *b* sabiendo que en el punto *A*(1, 2) la tangente a la gráfica de *f* es una recta horizontal.

Como *A* es un punto de la curva, se tiene que verificar $f(1) = 2$, es decir $a + b + 3 = 2 \Rightarrow a + b = -1$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$; $f'(1) = 0$, es decir, $3a + 2b + 3 = 0 \Rightarrow 3^a + 2b = -3$

Se resuelve el sistema $\left.\begin{matrix} a + b = -1 \\ 3a + 2b = -3 \end{matrix}\right\}$ y se obtiene $a = -1$ y $b = 0$.

8. Encuentra el máximo valor de la función $f(x) = x^2(x-1)$ en el intervalo [–1, 2].

Como $f(x) = x^2(x - 1) = x^3 - x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2) = 0$ si $x = 0$ o si $x = \frac{2}{3}$.

$f(-1) = -2$; $f(2) = 4$; $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$, así que el máximo valor de *f* en [–1, 2] se alcanza en $x = 2$ y vale 4.

9. Si $f'(2) = 4$, $g'(2) = -3$, $f(2) = -1$, $g(2) = 1$, $f'(1) = 2$ y $g'(-1) = 5$, calcula la derivada en $x = 2$ de las funciones.

a) $h(x) = f(g(x))$

b) $k(x) = g(f(x))$

a) $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ así que $h'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(1) \cdot (-3) = 2 \cdot (-3) = -6$.

b) $k'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ así que $k'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(-1) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$.

10. Encuentra dónde es creciente y dónde es decreciente la función $f(x) = (1000 - x)^2 + x^2$.

$f'(x) = -2(1000 - x) + 2x = 4x - 2000 = 0$ si $x = 500$.

$f'(x) > 0$ si $x > 500$ y $f'(x) < 0$ si $x < 500$.

Así pues, *f* es creciente en $(500, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 500)$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes apartados.

1. La tangente a la curva de ecuación $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$ pasa por el punto:

A. (1, 3) **C.** (–1, 0)

B. (1, –4) **D.** (–1,–8)

$f'(x) = 2x f'(2) = 4$, por lo que la ecuación de la tangente pedida es $y - 4 = 4(x - 2)$, es decir, $y = 4x - 4$, que pasa por el punto (–1, –8).La respuesta es la D.

2. Si la tangente a la gráfica de f en el punto $P\left(1, \frac{2}{3}\right)$ corta al eje de ordenadas en el punto (0, 1), el valor de $f'(1)$ es:

A. $\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Como la recta que pasa por $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ y por (0, 1), tiene pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{0 - 1} = -\frac{1}{3}$, entonces $f'(1) = -\frac{1}{3}$, por lo que la respuesta es la C.

3. La derivada de $(f \circ g)$ en el punto $x = 0$, siendo $g(x) = e^{-6x}$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$, toma el valor:

A. 0 **C.** –2

B. –1 **D.** e

$(f \circ g)'(0) = f'(g(0))\, g'(0)$. Como $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ y $g'(x) = -6e^{-6x}$, se tiene que $f'(g(0)) = f'(1) = \frac{1}{3}$ y $g'(0) = -6$.

$(f \circ g)'(0) = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$, por lo que la respuesta es la C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas.

4. **Considera la función $f(x) = 2x\sqrt{3-x}$, definida en (–∞, 3] y sea *T* la tangente a su gráfica en el punto de abscisa 0. Entonces:**

A. Para todo x de (–∞, 3], $f'(x) = \dfrac{6-3x}{\sqrt{3-x}}$

B. Para todo x de (–∞, 3], $f'(x) \le 4$

C. La ecuación de la recta *T* es $y = 2\sqrt{3x}$.

D. Para todo x de (–∞, 3], $f'(x) = 2\sqrt{3-x} + \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$

A. $f'(x) = 2\sqrt{3-x} - \dfrac{2x}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{2(3-x)-x}{\sqrt{3-x}} = \dfrac{6-3x}{\sqrt{3-x}} \Rightarrow$ A es verdadera.

B. Falsa pues, por ejemplo, $f'(-1) = \dfrac{9}{2} > 4$.

C. Es falsa pues $f(x) = 2\sqrt{3x}$ no es la ecuación de una recta.

D. Es falsa pues $f'(x) = 2\sqrt{3-x} - \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$.

5. **Si *f* es la función definida por la fórmula $f(x) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{1000} + \dfrac{1}{10^3}$, si $x \ne 0$, entonces:**

A. El dominio de *f* son todos los números reales.

B. $f'(1) = -\dfrac{9}{2}$

C. Las tangentes en los puntos de abscisas 1 y –1 son paralelas.

D. $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} - \dfrac{5}{x^2}$

A. Como $x = 0$ no está en el dominio de *f* la afirmación A es falsa.

B. $f'(x) = -\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, por lo que $f'(1) = -5 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{9}{2} \Rightarrow$ B es verdadera.

C. $f'(-1) = -5 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{11}{2}$. Así pues, como $f'(-1) \ne f'(1)$, la afirmación C es falsa.

D. Es verdadero, como hemos visto en el cálculo del apartado B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas.

6. **Sea *f* una función definida en $\mathbb{R}$, con derivada en todos sus puntos y considera las dos afirmaciones siguientes:**

1 $f'(x) > 0$

2. ***f*** **es estrictamente creciente en** $\mathbb{R}$.

Entonces:

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí

$1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$ como ocurre con la función $f(x) = x^3$, en $x = 0$, pues $f(x)$ es creciente en $x = 0$, pero $f'(0)$ no es positiva. Por tanto, la afirmación correcta es la A.

Razona cuál de los siguientes datos es innecesario

7. **Para encontrar el número que mide la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función** $f(x) = ax^2 + bx + c$ **en un intervalo cerrado se tienen los siguientes datos:**

1. El valor de *a* **2. El valor de *b*** **3. El valor de *c***

Entonces, puede eliminarse, por innecesario:

A. El dato 1

B. El dato 2

C. El dato 3

D. Todos los datos son necesarios.

Si el máximo se alcanza en $x = p$ y el mínimo en $x = q$

$f(p) - f(q) = \left(ap^2 + bp + c\right) - \left(aq^2 + bq + c\right) = a\left(p^2 - q^2\right) + b(p - q)$, con lo que sobra el valor de c .La respuesta correcta es la C.