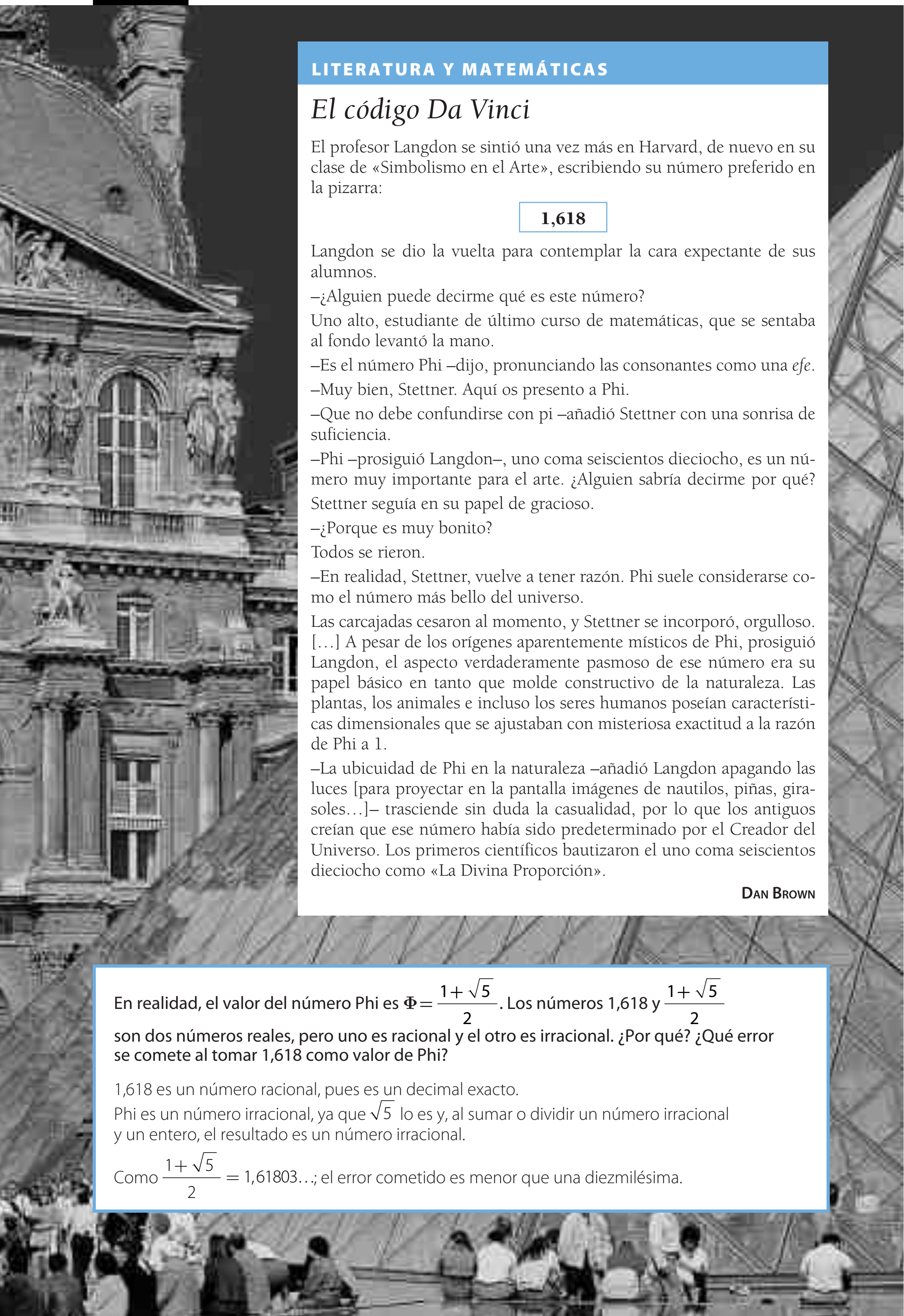
1 Números reales



LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El código Da Vinci

El profesor Langdon se sintió una vez más en Harvard, de nuevo en su clase de «Simbolismo en el Arte», escribiendo su número preferido en la pizarra:

1,618

Langdon se dio la vuelta para contemplar la cara expectante de sus alumnos.

–¿Alguien puede decirme qué es este número?

Uno alto, estudiante de último curso de matemáticas, que se sentaba al fondo levantó la mano.

–Es el número Phi –dijo, pronunciando las consonantes como una *efe*.

–Muy bien, Stettner. Aquí os presento a Phi.

–Que no debe confundirse con pi –añadió Stettner con una sonrisa de suficiencia.

–Phi –prosiguió Langdon–, uno coma seiscientos dieciocho, es un número muy importante para el arte. ¿Alguien sabría decirme por qué?

Stettner seguía en su papel de gracioso.

–¿Porque es muy bonito?

Todos se rieron.

–En realidad, Stettner, vuelve a tener razón. Phi suele considerarse como el número más bello del universo.

Las carcajadas cesaron al momento, y Stettner se incorporó, orgulloso. [...] A pesar de los orígenes aparentemente místicos de Phi, prosiguió Langdon, el aspecto verdaderamente pasmoso de ese número era su papel básico en tanto que molde constructivo de la naturaleza. Las plantas, los animales e incluso los seres humanos poseían características dimensionales que se ajustaban con misteriosa exactitud a la razón de Phi a 1.

–La ubicuidad de Phi en la naturaleza –añadió Langdon apagando las luces [para proyectar en la pantalla imágenes de nautilos, piñas, girasoles...]– trasciende sin duda la casualidad, por lo que los antiguos creían que ese número había sido predeterminado por el Creador del Universo. Los primeros científicos bautizaron el uno coma seiscientos dieciocho como «La Divina Proporción».

DAN BROWN

En realidad, el valor del número Phi es $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Los números 1,618 y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ son dos números reales, pero uno es racional y el otro es irracional. ¿Por qué? ¿Qué error se comete al tomar 1,618 como valor de Phi?

1,618 es un número racional, pues es un decimal exacto.

Phi es un número irracional, ya que $\sqrt{5}$ lo es y, al sumar o dividir un número irracional y un entero, el resultado es un número irracional.

Como $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803...$; el error cometido es menor que una diezmilésima.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Clasifica estos números según el tipo al que pertenecen.**

$$0,\widehat{7} \qquad -16 \qquad 685,00\widehat{91} \qquad -0,0201 \qquad 67 \qquad \frac{27}{44} \qquad -456,89 \qquad \frac{-34}{8}$$

$0,\widehat{7}$ es un número decimal periódico puro.

-16 es un número entero.

$685,00\widehat{91}$ es número decimal periódico mixto.

$-0,0201$ y $-456,89$ son números decimales exactos.

67 es un número natural.

$\frac{27}{44}$ y $\frac{-34}{8}$ son números racionales.

002 **Expresa en forma de fracción.**

$$0,22 \qquad -34,\widehat{03} \qquad 25,01\widehat{2} \qquad 0,1\widehat{043} \qquad -2,\widehat{302}$$

$0,22 = \frac{11}{50}$ $\qquad 25,01\widehat{2} = \frac{22.511}{900}$ $\qquad -2,\widehat{302} = \frac{-2.300}{999}$

$-34,\widehat{03} = \frac{-1.123}{33}$ $\qquad 0,1\widehat{043} = \frac{521}{4.995}$

003 **Obtén el valor absoluto de los números.**

$$7 \qquad 0 \qquad -1 \qquad -6^2 \qquad (-6)^2$$

$|7| = 7$ $\qquad |-1| = 1$ $\qquad |(-6)^2| = 36$

$|0| = 0$ $\qquad |-6^2| = 36$

004 **Calcula las siguientes potencias.**

a) 3^4

b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5$

c) $(-2)^6$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2$

e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$

f) $(-5)^7$

g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3$

h) 2^5

a) $3^4 = 81$

b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5 = -\frac{3.125}{32}$

c) $(-2)^6 = 64$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$

e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$

f) $(-5)^7 = -78.125$

g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3 = -\frac{64}{729}$

h) $2^5 = 32$

005 Simplifica y expresa el resultado como potencia.

a) $\dfrac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}}$ b) $2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^2$

a) $\dfrac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}} = \dfrac{6^2 \cdot 5^{14} \cdot 5^7 \cdot 3^3 \cdot 3^3}{6^4} = \dfrac{5^{21} \cdot 3^6}{6^2} = \dfrac{5^{21} \cdot 3^4}{2^2}$

b) $2 \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\dfrac{3}{8}\right)^2 = \dfrac{2 \cdot 3^3}{2^{11} \cdot 3^2} = \dfrac{3}{2^{10}}$

ACTIVIDADES

001 Calcula el representante canónico de estos números.

a) $\dfrac{-16}{24}$ b) $\dfrac{18}{39}$ c) $\dfrac{-24}{-60}$

a) $\dfrac{-16}{24} = -\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{18}{39} = \dfrac{6}{13}$ c) $\dfrac{-24}{-60} = \dfrac{2}{5}$

002 Escribe dos representantes de los números racionales.

a) $\dfrac{7}{12}$ b) $\dfrac{9}{2}$ c) $\dfrac{8}{25}$

Respuesta abierta.

a) $\dfrac{7}{12} = \left\{\dots, \dfrac{14}{24}, \dfrac{21}{36}, \dots\right\}$

b) $\dfrac{9}{2} = \left\{\dots, \dfrac{18}{4}, \dfrac{27}{6}, \dots\right\}$

c) $\dfrac{8}{25} = \left\{\dots, \dfrac{16}{50}, \dfrac{24}{75}, \dots\right\}$

003 Halla cuántos números racionales distintos hay en esta secuencia.

$$\frac{5}{3} \qquad -\frac{5}{3} \qquad \frac{-5}{3} \qquad \frac{5}{-3} \qquad \frac{10}{6} \qquad 1,\widehat{6}$$

Hay dos números racionales distintos, que son:

$\dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{6} = 1,\widehat{6}$ $\qquad -\dfrac{5}{3} = \dfrac{-5}{3} = \dfrac{5}{-3}$

004 Una fracción que tenga un término negativo y otra que tenga sus dos términos positivos, ¿pueden ser representantes del mismo número racional?

No pueden representar el mismo número racional, puesto que si una fracción tiene un término negativo, el cociente es negativo; y si sus dos términos son positivos, el cociente es positivo.

005 **Escribe 4 números irracionales, especificando su regla de formación.**

Respuesta abierta.

Tras la coma, se sitúan todos los múltiplos de 3: 0,3691215…

Tras la coma se sitúan todos los múltiplos de 4: 0,481216…

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 1: $\sqrt{2}+1$

Al número irracional $\sqrt{2}$ se le suma el número 2: $\sqrt{2}+2$

006 **Decide si los siguientes números son irracionales.**

a) 0,51015202530… **c)** $2-\pi$

b) $\dfrac{3\pi}{4\pi}$ **d)** $\dfrac{10}{17}$

a) Es un número irracional, ya que tiene infinitas cifras decimales que no se repiten de forma periódica.

b) Es un número decimal exacto, luego no es un número irracional.

c) Es un número irracional, porque si a un número irracional se le resta un número entero, el resultado es un número irracional.

d) No es un número irracional, puesto que es una fracción.

007 **Encuentra, sin hacer operaciones con decimales, un número irracional comprendido entre $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.**

Respuesta abierta.

$\sqrt{2}-1$

008 **Razona si son ciertas o no las siguientes afirmaciones.**

a) La raíz de un número irracional es irracional.

b) Un número irracional al cuadrado no es racional.

a) Cierta, ya que sigue teniendo infinitas cifras decimales no periódicas.

b) Falsa, por ejemplo: $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$

009 **Indica el conjunto numérico mínimo al que pertenece cada número.**

a) 8,0999… **c)** $\sqrt{15}$ **e)** 2,5

b) 1,223334444… **d)** $6,1\widehat{26}$ **f)** -11

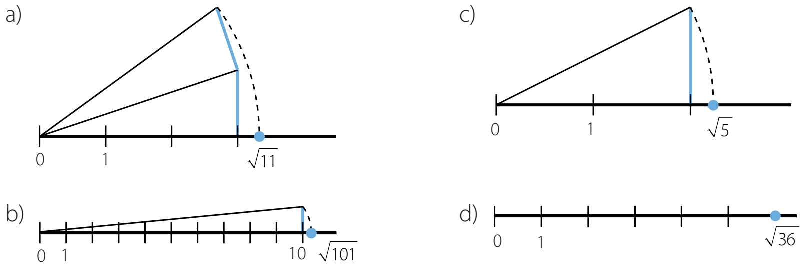
a) $\mathbb{Q}$ d) $\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{I}$ e) $\mathbb{Q}$

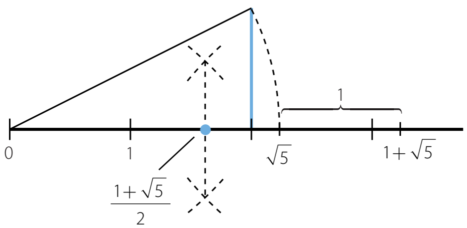
c) $\mathbb{I}$ f) $\mathbb{Z}$

010 Representa las raíces.

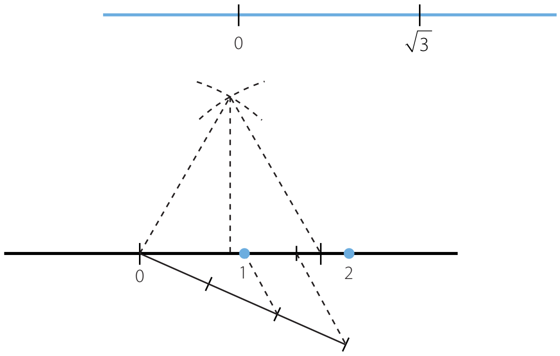
a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{101}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{36}$



011 Coloca, en la recta real, el número: $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$



012 Representa, en la siguiente recta real, los números 1 y 2.



013 Aplica la propiedad distributiva y opera.

a) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{2}{7}-\dfrac{2}{5}\right)$ b) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{7}-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{7}+3\cdot\dfrac{2}{7}$

a) $\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{2}{7}-\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{30-42}{140}=-\dfrac{12}{140}=-\dfrac{3}{35}$

b) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{7}-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{7}+3\cdot\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{7}\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}+3\right)=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{67}{20}=\dfrac{67}{70}$

014 Ordena, de menor a mayor, los siguientes números racionales e irracionales.

$$\frac{22}{7} \qquad \pi \qquad \frac{2.827}{900}$$

$$\frac{2.827}{900} < \pi < \frac{22}{7}$$

015 Con ayuda de la propiedad distributiva, calcula 99^2 y 999^2 sin realizar las operaciones.

$99^2 = 99 \cdot 99 = 99(100 - 1) = 9.900 - 99 = 9.801$

$999^2 = 999 \cdot 999 = 999(1.000 - 1) = 999.000 - 999 = 998.001$

016 Representa los siguientes conjuntos numéricos de todas las formas que conozcas.

a) Números menores que π.
b) Números mayores que $\sqrt{3}$ y menores o iguales que 7.
c) Números menores o iguales que 2 y mayores que −2.
d) Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos.

a) $(-\infty, \pi) = \{x: x < \pi\}$

b) $(\sqrt{3}, 7] = \{x: \sqrt{3} < x \leq 7\}$

c) $(-2, 2] = \{x: -2 < x \leq 2\}$

d) $[2, 4] = \{x : 2 \leq x \leq 4\}$

017 Escribe, de todas las maneras que conozcas, estos intervalos de la recta real.

a) 

c) 

b) 

d) 

a) $(-\infty, -3) = \{x: x < -3\}$

b) $[-3, 2) = \{x: -3 \leq x < 2\}$

c) $(3, +\infty) = \{x: x > 3\}$

d) $(-1, 1) = \{x: |x| < 1\}$

018 Representa el conjunto $\{x: |x - 3| \leq 1\}$ de todas las formas posibles.

$[2, 4] = \{x: 2 \leq x \leq 4\}$

019 **Con ayuda de la calculadora, escribe $\sqrt{3}$ en forma decimal y sus aproximaciones por exceso y por defecto.**

a) A las diezmilésimas.

b) A las cienmilésimas.

c) A las millonésimas.

$\sqrt{3} = 1,73205080\ldots$

a) Aproximación por exceso: 1,7321
Aproximación por defecto: 1,7320

b) Aproximación por exceso: 1,73205
Aproximación por defecto: 1,73205

c) Aproximación por exceso: 1,732051
Aproximación por defecto: 1,732052

020 **Calcula los errores absoluto y relativo al redondear el número 1,3456 a las décimas.**

$V_{\text{real}} = 1,3456$

$V_{\text{aproximado}} = 1,3$

$E_a = |1,3456 - 1,3| = 0,0456 \qquad E_r = \left|\frac{0,0456}{1,3456}\right| = 0,0338$

021 **Piensa en una situación en la que dos mediciones tengan los mismos errores absolutos, pero distintos errores relativos.**

Respuesta abierta.

$V_{\text{real}} = 12,5$

Valores aproximados, 12 y 13. En ambos casos, el error absoluto es 0,5; pero los errores absolutos son distintos:

$E_r = \left|\frac{0,5}{12}\right| = 0,0417 \qquad E_r = \left|\frac{0,5}{13}\right| = 0,0385$

022 **Indica dos ejemplos de medida y da sus correspondientes cotas de error.**

Respuesta abierta.

Velocidad en autopista: 120 km/h; edad de jubilación: 65 años.

023 **Calcula las cotas de error absoluto y relativo al redondear el número $\sqrt{2}$:**

a) A las centésimas. **b) A las milésimas.**

a) $E_a = \left|\frac{1}{2 \cdot 10^2}\right| = 0,005 \qquad E_r = \left|\frac{0,005}{1,41 - 0,005}\right| = 0,0035$

b) $E_a = 0,0005 \qquad E_r = \left|\frac{0,0005}{1,414 - 0,0005}\right| = 0,00035$

024 La población de un pueblo, redondeada a las decenas, es de 310 habitantes. ¿Puedes indicar los errores? ¿Sabrías dar las cotas de error cometido?

Para calcular los errores relativos y absolutos es necesario conocer el valor real; por tanto, no se pueden calcular.

$$E_a = \left|\frac{1}{2\cdot 10^{-1}}\right| = 5$$

$$E_r = \left|\frac{5}{310-5}\right| = 0{,}016$$

025 Calcula una cota de error absoluto cuando truncamos un número a las décimas. ¿Y si fuera a las centésimas?

$$E_a = \left|\frac{1}{2\cdot 10^{1}}\right| = 0{,}5$$

$$E_a = \left|\frac{1}{2\cdot 10^{2}}\right| = 0{,}05$$

026 Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 0,0000085
b) 5.000.000.000.000
c) 31.940.000.000
d) 0,000000000479

a) $0{,}0000085 = 8{,}5 \cdot 10^{-6}$
b) $5.000.000.000.000 = 5 \cdot 10^{12}$
c) $31.940.000.000 = 3{,}194 \cdot 10^{10}$
d) $0{,}000000000479 = 4{,}79 \cdot 10^{-10}$

027 Opera y expresa el resultado en notación científica.

a) $(5{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^{-2}) : 8{,}05 \cdot 10^{-4}$
b) $3{,}79 \cdot 10^8 \cdot (7{,}73 \cdot 10^4 - 6{,}54 \cdot 10^{-2})$

a) $(5{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}75 \cdot 10^{-2}) : 8{,}05 \cdot 10^{-4} = 6{,}465968 \cdot 10^{-2}$
b) $3{,}79 \cdot 10^8 \cdot (7{,}73 \cdot 10^4 - 6{,}54 \cdot 10^{-2}) = 2{,}92966 \cdot 10^{13}$

028 Decide si son ciertas estas igualdades. Razona la respuesta.

a) $\sqrt[4]{-16} = -2$
b) $\sqrt[8]{256} = \pm 4$
c) $\sqrt[3]{1.000.000} = \pm 1.000$
d) $\sqrt[5]{32} = \pm 2$

a) Falsa: $(-2)^4 = 16$
b) Falsa: $4^8 = 65.536$
c) Falsa: $(-1.000)^3 = -1.000.000.000$
d) Falsa: $(-2)^5 = -32$

029 Calcula el valor numérico, si existe, de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{16}$
b) $\sqrt[3]{-8}$
c) $\sqrt[4]{-10.000}$
d) $\sqrt[5]{243}$

a) $\sqrt[4]{16} = 2$
b) $\sqrt[3]{-8} = -2$
c) No existe ninguna raíz real.
d) $\sqrt[5]{243} = 3$

030 Transforma los radicales en potencias, y viceversa.

a) $3^{\frac{1}{4}}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$

c) $2^{\frac{1}{6}}$

d) $7^{\frac{3}{5}}$

e) $10^{\frac{2}{7}}$

f) $\sqrt[4]{5^7}$

a) $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

b) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

c) $2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

d) $7^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{7^3}$

e) $10^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{10^2}$

f) $\sqrt[4]{5^7} = 5^{\frac{7}{4}}$

031 Indica si son equivalentes los siguientes radicales.

a) $\sqrt[4]{3^6}$ y $\sqrt{3^3}$

b) $\sqrt[5]{2^{10}}$ y $\sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{36}$ y $\sqrt{6}$

d) $\sqrt[4]{5^{10}}$ y $\sqrt{5^4}$

a) Son equivalentes.

b) No son equivalentes.

c) Son equivalentes.

d) No son equivalentes.

032 Efectúa estas operaciones.

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5}$

a) $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} = 2\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = -7\sqrt{5}$

b) $7\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[6]{3^2} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5} = 21\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{5} = \dfrac{96\sqrt[3]{3}}{5}$

033 Opera y simplifica.

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}$

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6} = 20\sqrt{162} = 180\sqrt{2}$

b) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3 = \dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{8^3}} = \sqrt{\dfrac{2^5}{2^9}} = \dfrac{1}{4}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{108}$

d) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^6 \cdot 3^4}{3^3}} = \sqrt[12]{3^7}$

034 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}}$ c) $\frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}}$

a) $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{-3}{5\sqrt[4]{2^3}} = \frac{-3\sqrt[4]{2}}{10}$

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{6\sqrt[5]{7^3}} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt[5]{7^2}}{42}$

035 Racionaliza y opera.

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{-7}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{4\sqrt{7}}$

a) $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{18\sqrt{5} + 20\sqrt{6}}{30}$

b) $\frac{-7}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{4\sqrt{7}} = \frac{-7\sqrt{2}}{6} + \frac{5\sqrt{7}}{28} = \frac{-98\sqrt{2} + 15\sqrt{7}}{84}$

036 Racionaliza y opera.

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}}$

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = -1+\sqrt{2}$

b) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}+7} = \frac{8\sqrt{6} - 56\sqrt{2}}{-46} = \frac{-4\sqrt{6} + 28\sqrt{2}}{23}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{9-\sqrt{5}} = \frac{45\sqrt{3} + 5\sqrt{15}}{76}$

037 Racionaliza estas expresiones.

a) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ b) $\frac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

a) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} + \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} =$

$= \frac{-3\sqrt{3} - \sqrt{15} + 3\sqrt{6} + \sqrt{30}}{3} + \frac{-5\sqrt{15} + 5\sqrt{35}}{4} =$

$= \frac{-12\sqrt{3} + 12\sqrt{6} + 4\sqrt{30} - 19\sqrt{15} + 15\sqrt{35}}{12}$

b) $\frac{12\sqrt{6}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{18} + 36\sqrt{12}}{-6} = \frac{72\sqrt{2} + 72\sqrt{3}}{-6} = -12\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$

038 **Calcula, mediante la definición, estos logaritmos.**

a) $\log_2 8$ **b)** $\log_3 81$ **c)** $\log 1.000$ **d)** $\log 0{,}0001$ **e)** $\ln e^{33}$ **f)** $\ln e^{-4}$ **g)** $\log_4 16$ **h)** $\log_4 0{,}25$

a) $\log_2 8 = 3$
b) $\log_3 81 = 4$
c) $\log 1.000 = 3$
d) $\log 0{,}0001 = -4$
e) $\ln e^{33} = 33$
f) $\ln e^{-4} = -4$
g) $\log_4 16 = 2$
h) $\log_4 0{,}25 = -1$

039 **Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.**

a) $\log_3 243$ **b)** $\log_9 81$ **c)** $\log 1.000.000$ **d)** $\log 0{,}00001$ **e)** $\ln e^2$ **f)** $\ln e^{-14}$ **g)** $\log_7 343$ **h)** $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$
b) $\log_9 81 = 2$
c) $\log 1.000.000 = 6$
d) $\log 0{,}00001 = -5$
e) $\ln e^2 = 2$
f) $\ln e^{-14} = -14$
g) $\log_7 343 = 3$
h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

040 **Calcula los logaritmos y deja indicado el resultado.**

a) $\log_4 32$ **b)** $\log_2 32$ **c)** $\log_3 100$ **d)** $\log_5 32$ **e)** $\log_{32} 4$ **f)** $\log_2 304$

a) $\log_4 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{5}{2}$

b) $\log_2 32 = 5$

c) $\log_3 100 = \dfrac{\log 100}{\log 3} = 4{,}1918\ldots$

d) $\log_5 32 = \dfrac{\log 32}{\log 5} = 2{,}1533\ldots$

e) $\log_{32} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 32} = \dfrac{2}{5}$

f) $\log_2 304 = \dfrac{\log 304}{\log 2} = 8{,}2479\ldots$

041 **Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$; $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log 7 = 0{,}8451$; determina los logaritmos decimales de los 10 primeros números naturales. Con estos datos, ¿sabrías calcular $\log 3{,}5$? ¿Y $\log 1{,}5$?**

$\log 4 = \log (2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 = 2 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6020$

$\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

$\log 6 = \log (3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}4771 + 0{,}3010 = 0{,}7781$

$\log 8 = \log (4 \cdot 2) = \log 4 + \log 2 = 0{,}6020 + 0{,}3010 = 0{,}9030$

$\log 9 = \log (3 \cdot 3) = \log 3 + \log 3 = 0{,}4771 + 0{,}4771 = 0{,}9542$

$\log 10 = 1$

$\log 3{,}5 = \log\left(\dfrac{7}{2}\right) = \log 7 - \log 2 = 0{,}8451 - 0{,}3010 = 0{,}5441$

$\log 1{,}5 = \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761$

042 **Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ y $\log_5 2$. Comprueba que su producto es 1.**

En el ejercicio anterior, se ha visto que $\log 2 = 0{,}3010$.

Si se utilizan cambios de base, resulta:

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}32$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 \rightarrow \log_2 5 = 2{,}32$$

$$\log_5 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = \frac{1}{\log_2 5} = 0{,}43$$

Como los dos números son inversos, su producto es 1.

También se puede comprobar de este modo:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = 1$$

043 **Halla el valor de x en las siguientes igualdades.**

a) $\log_x 256 = -8$

b) $\log_3 x = \frac{2}{3}$

c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$

d) $\log_x 3 = 2$

a) $\frac{1}{2}$ b) 2,0801… c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{3}$

044 **Calcula cuánto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.**

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = 1$$

045 **Calcula la fracción irreducible de:**

a) $\frac{5}{200}$ c) $\frac{26}{130}$ e) $\frac{12}{400}$ g) $\frac{88}{176}$

b) $\frac{-1.080}{432}$ d) $\frac{-702}{1.053}$ f) $\frac{72}{243}$ h) $\frac{104}{216}$

a) $\frac{5}{200} = \frac{1}{40}$ c) $\frac{26}{130} = \frac{1}{5}$ e) $\frac{12}{400} = \frac{3}{100}$ g) $\frac{88}{176} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{-1.080}{432} = \frac{-45}{18}$ d) $\frac{-702}{1.053} = \frac{-2}{3}$ f) $\frac{72}{243} = \frac{8}{27}$ h) $\frac{104}{216} = \frac{13}{27}$

046 **Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles.**

$$\frac{3}{15} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{10}{13} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{12}{5} \quad \frac{18}{7} \quad \frac{15}{12} \quad \frac{2}{8}$$

Son fracciones irreducibles: $\frac{10}{13}$, $\frac{12}{5}$ y $\frac{18}{7}$

047 ¿Cuántos números racionales hay en el siguiente grupo?

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{-1}{5} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{-4}{20} \quad \frac{4}{24} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{25}{100} \quad \frac{150}{200}$$

Los números racionales son aquellos que se pueden escribir como fracción, luego todos los números del grupo lo son.

048 Halla x para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{x} = \frac{9}{x} = \frac{21}{x}$

b) $\frac{-5}{2} = \frac{x}{8} = \frac{10}{x} = \frac{25}{x}$

a) $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{21}{35}$

b) $\frac{-5}{2} = \frac{-20}{8} = \frac{10}{-4} = \frac{25}{-10}$

049 ¿Puedes escribir una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$ cuyo denominador sea 10? ¿Por qué?

No, porque 10 no es múltiplo de 3.

050 Realiza estas operaciones.

a) $\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

b) $\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{2}$

a)
$$\left(\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} =$$
$$= \left(\frac{25}{30} - \frac{24}{30}\right)^{-2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$
$$= \left(\frac{1}{30}\right)^{-2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$
$$= 900 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{4} =$$
$$= 1.350 + \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{5.401}{4}$$

b)
$$\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-1} : \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} - \left(\frac{4}{3}\right)^{2} =$$
$$= \left(\frac{25}{10} - \frac{4}{10}\right)^{-1} : \frac{3}{7} - \frac{16}{9} =$$
$$= \left(\frac{21}{10}\right)^{-1} : \frac{3}{7} - \frac{16}{9} =$$
$$= \frac{10}{21} : \frac{3}{7} - \frac{16}{9} =$$
$$= \frac{70}{63} - \frac{16}{9} =$$
$$= \frac{-42}{63}$$

051 ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles no lo son? Razona tu respuesta.

a) 2,555… b) 2,525 c) 2,5255555… d) 2,525522555222…

a) Es un número racional, ya que es periódico, y cualquier número periódico se puede expresar como fracción.

b) Es un número racional, puesto que es un decimal exacto y los decimales exactos se pueden expresar como fracción.

c) Es un número racional, ya que es periódico.

d) Es un número irracional, puesto que tiene infinitas cifras decimales que no son periódicas.

052 Indica el tipo de decimal, en cada caso, y calcula si es posible su fracción generatriz.

a) 15,3222… c) 15,32 e) 15,333

b) 15,233444… d) 15,323232… f) 15

a) Es un número decimal periódico mixto: $\dfrac{1.532 - 153}{90} = \dfrac{1.379}{90}$

b) Es un número decimal periódico mixto: $\dfrac{152.334 - 15.233}{9.000} = \dfrac{137.101}{9.000}$

c) Es un número decimal exacto: $\dfrac{1.532}{100} = \dfrac{383}{25}$

d) Es un número decimal periódico puro: $\dfrac{1.532 - 15}{99} = \dfrac{1.517}{99}$

e) Es un número decimal exacto: $\dfrac{15.333}{1.000}$

f) Es un número natural: $\dfrac{15}{1}$

053 Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) 0,2 d) 8,0002 g) 0,01

b) $3,\overset{\frown}{5}$ e) $42,\overset{\frown}{78}$ h) $5,\overset{\frown}{902}$

c) $2,3\overset{\frown}{7}$ f) $10,5\overset{\frown}{23}$ i) $0,01\overset{\frown}{57}$

a) $\dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

b) $\dfrac{35 - 3}{9} = \dfrac{32}{9}$

c) $\dfrac{237 - 23}{90} = \dfrac{214}{90}$

d) $\dfrac{80.002}{10.000} = \dfrac{40.001}{5.000}$

e) $\dfrac{4.278 - 42}{99} = \dfrac{4.236}{99} = \dfrac{1.412}{33}$

f) $\dfrac{10.523 - 105}{990} = \dfrac{10.418}{990} = \dfrac{5.209}{495}$

g) $\dfrac{1}{100}$

h) $\dfrac{5.902 - 5}{999} = \dfrac{5.897}{999}$

i) $\dfrac{157 - 1}{9.900} = \dfrac{156}{9.900} = \dfrac{13}{825}$

054 Efectúa, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1,\widehat{3} + 3,4$ c) $1,\widehat{36} + 8,\widehat{25}$ e) $3,\widehat{46} + 4,2\widehat{95}$

b) $10,2\widehat{5} - 5,\widehat{7}$ d) $4,\widehat{5} + 6,\widehat{7}$ f) $3,\widehat{21} + 4,3\widehat{12}$

a) $\frac{4}{3} + \frac{17}{5} = \frac{20}{15} + \frac{51}{15} = \frac{71}{15}$

b) $\frac{923}{90} - \frac{52}{9} = \frac{923}{90} - \frac{520}{90} = \frac{403}{90}$

c) $\frac{135}{99} + \frac{817}{99} = \frac{952}{99}$

d) $\frac{41}{9} + \frac{61}{9} = \frac{102}{9}$

e) $\frac{343}{99} + \frac{4.253}{990} = \frac{3.430}{990} + \frac{4.253}{990} = \frac{7.683}{990} = \frac{2.561}{330}$

f) $\frac{318}{99} + \frac{4.269}{990} = \frac{3.180}{990} + \frac{4.269}{990} = \frac{7.449}{990} = \frac{2.483}{330}$

055 Realiza las siguientes operaciones.

a) $1,25 \cdot 2,\widehat{5}$ b) $0,0\widehat{3} : 2,9\widehat{2}$ c) $3,7\widehat{6} \cdot 4,\widehat{8}$ d) $1,25 : 2,2\widehat{5}$

a) $\frac{5}{4} \cdot \frac{23}{9} = \frac{115}{36}$

b) $\frac{1}{30} : \frac{263}{90} = \frac{90}{7.890} = \frac{9}{789}$

c) $\frac{113}{30} \cdot \frac{44}{9} = \frac{4.972}{270} = \frac{2.486}{135}$

d) $\frac{5}{4} : \frac{203}{90} = \frac{450}{812} = \frac{225}{406}$

056 Utilizando las fracciones generatrices, comprueba si son verdaderas o falsas las igualdades.

a) $1,\widehat{9} = 2$ b) $1,\widehat{3} : 3 = 0,\widehat{4}$ c) $1,8\widehat{9} + 0,1\widehat{1} = 2$ d) $0,\widehat{3} + 0,\widehat{6} = 1$

a) Verdadera: $\frac{19-1}{9} = 2$

b) Verdadera: $\frac{13-1}{9} : 3 = \frac{12}{9} : 3 = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

c) Falsa: $\frac{189-18}{90} + \frac{11-1}{90} = \frac{171}{90} + \frac{10}{90} = \frac{181}{90} \neq 2$

d) Verdadera: $\frac{3}{9} + \frac{6}{9} = \frac{9}{9} = 1$

057 Escribe la expresión decimal de tres números racionales y otros tres irracionales. Explica cómo lo realizas.

Respuesta abierta.

La expresión decimal de un número racional debe ser finita o periódica:

$2,3 \quad 2,\widehat{3} \quad 5,32$

La expresión decimal de un número irracional debe ser infinita y no periódica:

$2,1010010001000\ldots \quad 1,1234567891011\ldots \quad 2,23233233323333\ldots$

058 ●○○ **Ordena los siguientes números decimales, de menor a mayor.**

$$2{,}999 \quad 2{,}95 \quad 2{,}955 \quad 2{,}59 \quad 2{,}599 \quad 2{,}559$$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

$$2{,}559 < 2{,}59 < 2{,}599 < 2{,}95 < 2{,}955 < 2{,}999$$

059 ●○○ **Ordena estos números decimales, de menor a mayor.**

a) $2{,}9\overset{\frown}{95} \quad 2{,}\overset{\frown}{9} \quad 2{,}\overset{\frown}{95} \quad 2{,}\overset{\frown}{959} \quad 2{,}9\overset{\frown}{5}$

b) $4{,}75 \quad 4{,}\overset{\frown}{75} \quad 4{,}7\overset{\frown}{5} \quad 4{,}775 \quad 4{,}757 \quad 4{,}\overset{\frown}{757}$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

a) $2{,}9\overset{\frown}{5} < 2{,}\overset{\frown}{959} = 2{,}\overset{\frown}{95} < 2{,}9\overset{\frown}{95} < 2{,}\overset{\frown}{9}$

b) $4{,}75 < 4{,}7\overset{\frown}{5} < 4{,}757 < 4{,}\overset{\frown}{75} = 4{,}\overset{\frown}{757} < 4{,}775$

060 ●○○ **Da un número racional y otro irracional comprendidos entre:**

a) $3{,}4$ y $3{,}400\overset{\frown}{23}$

b) $2{,}5\overset{\frown}{2}$ y $2{,}\overset{\frown}{52}$

c) 1 y 2

d) $5{,}6$ y $5{,}\overset{\frown}{68}$

e) $-2{,}6\overset{\frown}{8}$ y $-2{,}\overset{\frown}{68}$

f) 0,2 y 0,25

Respuesta abierta.

a) Racional: 3,40022
Irracional: 3,4002201001…

b) Racional: 2,523
Irracional: 2,52301001…

c) Racional: 1,1
Irracional: 1,101001…

d) Racional: 5,62
Irracional: 5,6201001…

e) Racional: −2,67
Irracional: −2,6701001…

f) Racional: 0,21
Irracional: 0,2101001…

061 ●○○ **¿Es cierto que $3{,}\overset{\frown}{2} = 3{,}222$? Si no lo es, escribe dos números, uno racional y otro irracional, situados entre ellos.**

No es cierto, ya que un número es decimal exacto y el otro es periódico.

Respuesta abierta.

Racional: 3,2221
Irracional: 3,222101001…

062 ●○○ **Clasifica en racionales e irracionales las raíces cuadradas de los números naturales menores que 20.**

Son racionales las raíces de los cuadrados perfectos (1, 4, 9 y 16).
Las demás raíces son irracionales.

063 ●●○ **Indica cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.**

$$\frac{\sqrt{4}}{2} \quad \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \frac{\sqrt{9}}{3} \quad \frac{\sqrt{16}}{5} \quad \frac{\sqrt{36}}{3}$$

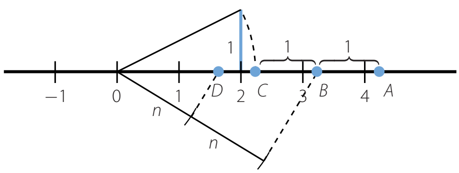
Solo es irracional $\frac{\sqrt{5}}{2}$, ya que las demás raíces son exactas.

064 Deduce cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales.

$$1+\sqrt{2} \qquad 3+\sqrt{4} \qquad 5-\sqrt{9} \qquad 8+\sqrt{10} \qquad 3\sqrt{16} \qquad 5\sqrt{49}$$

Son irracionales $1+\sqrt{2}$ y $8+\sqrt{10}$, pues las demás raíces son exactas.

065 ¿Qué números representan sobre esta recta numérica los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, donde *n* es un segmento cualquiera?



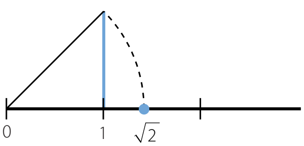
$C=\sqrt{5} \qquad B=1+\sqrt{5} \qquad D=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad A=2+\sqrt{5}$

066 Representa en la recta real.

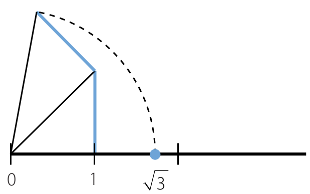
a) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt{3}$ g) $\sqrt{14}$

b) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{18}$ f) $\sqrt{7}$ h) $\sqrt{30}$

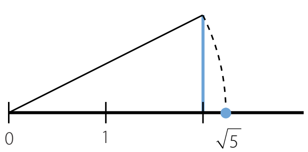
a)



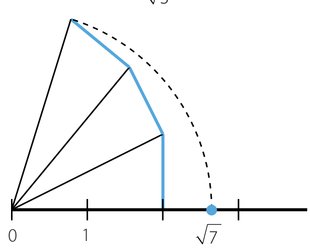
e)



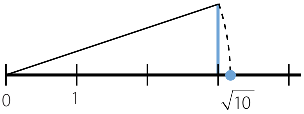
b)



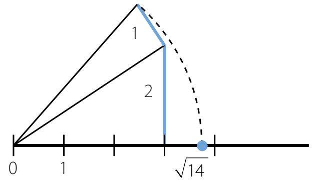
f)



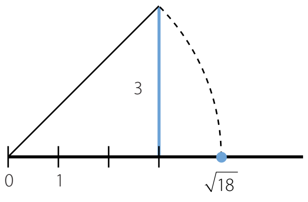
c)



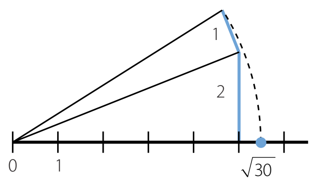
g)



d)



h)



067 Ordena y representa, de forma exacta o aproximada, los siguientes números reales.

$$1{,}65 \qquad \sqrt{3} \qquad \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad 1+\sqrt{2} \qquad 1{,}6\overset{\frown}{57}$$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} < 1{,}65 < 1{,}6\overset{\frown}{57} < \sqrt{3} < 1+\sqrt{2}$$

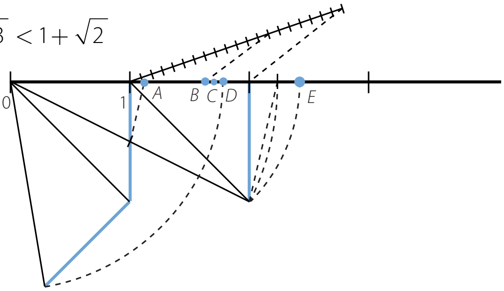
$A = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$B = 1{,}65$

$C = 1{,}6\overset{\frown}{57}$

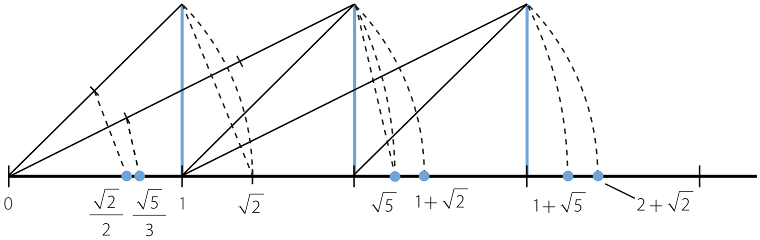
$D = \sqrt{3}$

$E = 1+\sqrt{2}$



068 Representa estos números en la recta real.

$$\sqrt{5} \qquad 1+\sqrt{2} \qquad 2+\sqrt{2} \qquad 1+\sqrt{5} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{5}}{3}$$

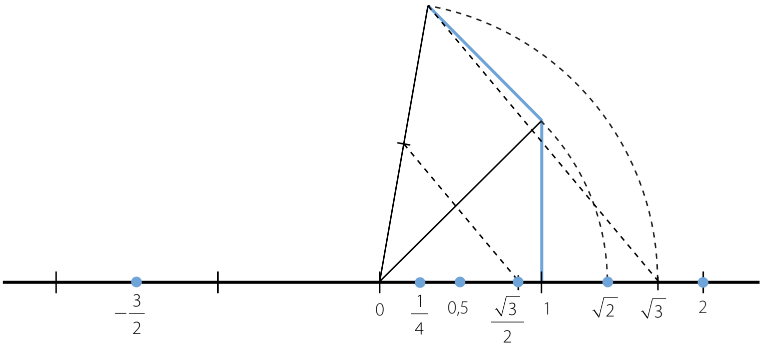


069 Ordena y representa los siguientes números.

$$-\frac{3}{2} \qquad 0{,}5 \qquad \sqrt{2} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2$$

Se ordenan los números, de menor a mayor:

$$-\frac{3}{2} < \frac{1}{4} < 0{,}5 < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} < 2$$



070 ●●○

Opera y clasifica el tipo de número real.

a) $\sqrt{2,\widehat{7}}$ b) $\sqrt{4,\widehat{9}}$ c) $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}}$

a) Es un número racional: $\sqrt{2,\widehat{7}} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \pm\dfrac{5}{3}$

b) Es un número irracional: $\sqrt{4,\widehat{9}} = \sqrt{\dfrac{45}{9}} = \sqrt{5}$

c) Es un número racional: $\sqrt{\dfrac{1,\widehat{3}}{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{27}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \pm\dfrac{2}{3}$

071 ●○○

Describe y representa los siguientes intervalos.

a) $(0, 10)$
b) $(3, 7]$
c) $(-\infty, -2)$
d) $[2, 5]$
e) $[5, 10)$
f) $[-4, +\infty)$
g) $(-\infty, 6]$
h) $(100, +\infty)$

a) $\{x: 0 < x < 10\}$

b) $\{x: 3 < x \le 7\}$

c) $\{x: x < -2\}$

d) $\{x: 2 \le x \le 5\}$

e) $\{x: 5 \le x < 10\}$

f) $\{x: -4 \le x\}$

g) $\{x: x \le 6\}$

h) $\{x: 100 < x\}$

072 Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

a) $1 < x < 3$ b) $6 < x \leq 7$ c) $5 \leq x < 9$ d) $10 \leq x \leq 12$

a) $(1, 3)$ b) $(6, 7]$ c) $[5, 9)$ d) $[10, 12]$

073 Escribe el intervalo que corresponde a:

a) $x \leq -2$ c) $x > -3$ e) $x < -9$

b) $x < 5$ d) $x \geq 7$ f) $x \geq -6$

a) $(-\infty, -2]$ c) $(-3, +\infty)$ e) $(-\infty, -9)$

b) $(-\infty, 5)$ d) $[7, +\infty)$ f) $[-6, +\infty)$

074 Representa, mediante intervalos, los números:

a) Mayores o iguales que 5.

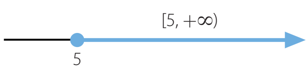
b) Menores o iguales que −8.

c) Mayores que −2.

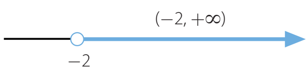
d) Mayores que 2 y menores que 4.

e) Mayores que −5 y menores que −2.

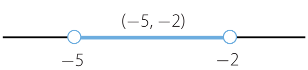
f) Comprendidos entre 0 y 10, incluidos estos.

a) 

b) 

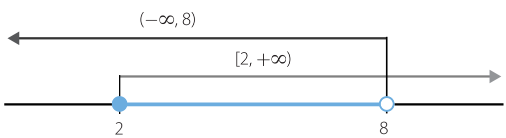
c) 

d) 

e) 

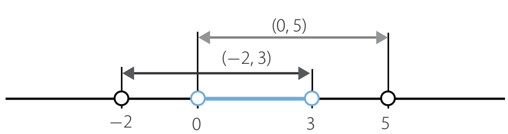
f) 

075 Representa $(-\infty, 8)$ y $[2, +\infty)$ en la misma recta, y señala mediante un intervalo los puntos que están en ambos.



El intervalo es $[2, 8)$.

076 Representa los intervalos $(0, 5)$ y $(-2, 3)$ en la misma recta, y señala el intervalo intersección.



El intervalo es $(0, 3)$.

077 Escribe dos intervalos cuya intersección sea el intervalo $[-1, 1]$.

Respuesta abierta: $(-3, 1]$ y $[-1, 5)$

078 Opera y redondea el resultado a las décimas.

a) $3,253 + 8,45$
b) $52,32 - 18,93$
c) $4,72 + 153,879$
d) $7,8 \cdot 12,9$
e) $13,5 \cdot 2,7$
f) $40,92 : 5,3$
g) $62,3 - 24,95$
h) $100,45 : 8,3$

a) Redondeo: 11,7
b) Redondeo: 33,4
c) Redondeo: 158,6
d) Redondeo: 100,6
e) Redondeo: 36,5
f) Redondeo: 7,7
g) Redondeo: 37,4
h) Redondeo: 12,1

079 Halla la aproximación por redondeo hasta las diezmilésimas para cada caso.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
b) $\frac{6}{7} + \sqrt{7}$
c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$
d) $\frac{4}{15} + \sqrt{8}$

a) 3,1463
b) 3,5029
c) 0,5040
d) 3,0951

080 ¿Qué error absoluto cometemos al aproximar el resultado de $45,96 + 203,7 + 0,823$ por el número 250,49?

$45,96 + 203,7 + 0,823 = 250,483$

El error absoluto cometido es: $E_a = |250,483 - 250,49| = 0,007$

081 Si aproximamos 10,469 por 10,5; ¿qué error absoluto se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es la mejor aproximación? Razónalo.

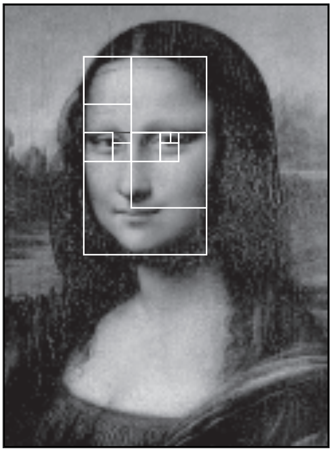
El error absoluto cometido es: $E_a = |10,469 - 10,5| = 0,031$

Si se aproxima por 10,4; el error absoluto es: $E_a = |10,469 - 10,4| = 0,069$

Es mejor aproximación 10,5; porque el error absoluto cometido es menor.

082 Desde la antigüedad aparece con frecuencia, el número de oro, Φ, en proporciones de la naturaleza, así como en las medidas de construcciones, o en obras de arte como la *Gioconda*.

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$$



a) Escribe la aproximación por redondeo hasta las centésimas del número de oro.
b) ¿Puedes hallar los errores absoluto y relativo?

a) La aproximación por redondeo a las centésimas es 1,62.
b) No se pueden hallar los errores absoluto y relativo, ya que el número de oro es un número irracional y, por tanto, tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

083 Un truncamiento de 8,56792 es 8,56. Calcula el error absoluto y el error relativo.

El error absoluto cometido es: $E_a = |8{,}56792 - 8{,}56| = 0{,}00792$

El error relativo cometido es: $E_r = \left|\dfrac{0{,}00792}{8{,}56792}\right| = 0{,}00092$

084 Aproxima el número $\dfrac{1}{7}$ para que el error sea menor que una centésima.

Para que el error absoluto cometido sea menor que una centésima, hay que calcular el cociente con dos cifras decimales. La aproximación pedida es 0,14.

085 Aproxima el número 12,3456 de forma que el error absoluto sea menor que 0,001.

Para que el error absoluto sea menor que una milésima, se escribe el número con tres cifras decimales. Por tanto, la aproximación pedida es 12,345.

086 Escribe los 5 primeros intervalos encajados dentro de los cuales se halla $\sqrt{32}$, e indica qué error máximo cometes en cada uno.

$\sqrt{32} = 5{,}65685\ldots$

(5, 6)	Error $< 6 - 5 = 1$
(5,5; 5,6)	Error $< 5{,}6 - 5{,}5 = 0{,}1$
(5,65; 5,66)	Error $< 5{,}66 - 5{,}65 = 0{,}01$
(5,656; 5,657)	Error $< 5{,}657 - 5{,}656 = 0{,}001$
(5,6568; 5,6569)	Error $< 5{,}6569 - 5{,}6568 = 0{,}0001$

087 ¿Se puede escribir $\pi = \dfrac{355}{113}$? Justifica la respuesta y di cuál es el orden de error cometido.

Al ser un número irracional es imposible escribirlo con una fracción, ya que todas las fracciones son números racionales.

$$\pi = 3{,}1415926\ldots \qquad \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

El error cometido es menor que una millonésima.

088 ¿Para qué número sería 5.432,723 una aproximación a las milésimas por defecto? ¿Es la respuesta única? ¿Cuántas respuestas hay?

Respuesta abierta.

Una aproximación a las milésimas es 5.432,7231.

La respuesta no es única, ya que hay infinitos números.

089 Indica cuáles de los números están escritos en notación científica.

a) $54 \cdot 10^{12}$
b) $0{,}75 \cdot 10^{-11}$
c) 243.000.000
d) 0,00001
e) $7{,}2 \cdot 10^{-2}$
f) $0{,}5 \cdot 10^{14}$
g) $0{,}01 \cdot 10^{-30}$
h) $18{,}32 \cdot 10^{4}$

El número $7{,}2 \cdot 10^{-2}$ está escrito en notación científica.

090 ●○○

Escribe en notación científica los siguientes números, e indica su mantisa y su orden de magnitud.

a) 5.000.000.000 c) 31.940.000 e) 4.598.000.000 g) 329.000.000
b) 0,00000051 d) 0,0000000009 f) 0,0967254 h) 111.000

a) $5.000.000.000 = 5 \cdot 10^9$	Mantisa: 5	Orden de magnitud: 9
b) $0,00000051 = 5,1 \cdot 10^{-7}$	Mantisa: 5,1	Orden de magnitud: −7
c) $31.940.000 = 3,194 \cdot 10^7$	Mantisa: 3,194	Orden de magnitud: 7
d) $0,0000000009 = 9 \cdot 10^{-10}$	Mantisa: 9	Orden de magnitud: −10
e) $4.598.000.000 = 4,598 \cdot 10^9$	Mantisa: 4,598	Orden de magnitud: 9
f) $0,0967254 = 9,67254 \cdot 10^{-2}$	Mantisa: 9,67254	Orden de magnitud: −2
g) $329.000.000 = 3,29 \cdot 10^8$	Mantisa: 3,29	Orden de magnitud: 8
h) $111.000 = 1,11 \cdot 10^5$	Mantisa: 1,11	Orden de magnitud: 5

091 ●○○

Desarrolla estos números escritos en notación científica.

a) $4,8 \cdot 10^8$ b) $8,32 \cdot 10^{-11}$ c) $6,23 \cdot 10^{-18}$ d) $3,5 \cdot 10^{-12}$

a) $4,8 \cdot 10^8 = 480.000.000$
b) $8,32 \cdot 10^{-11} = 0,0000000000832$
c) $6,23 \cdot 10^{-18} = 0,00000000000000000623$
d) $3,5 \cdot 10^{-12} = 0,0000000000035$

092 ●○○

Realiza las operaciones.

a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$

a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4 = 3,89 \cdot 10^4$
b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3 = 1,0335 \cdot 10^4$
c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3} = 3,620000585 \cdot 10^4$
d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2} = 2,303975 \cdot 10^2$
e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2 = 5,93830346 \cdot 10^4$

093 ●○○

Halla el resultado de estas operaciones.

a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4 = 5,78 \cdot 10^4$
b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2 = 8,055 \cdot 10^3$
c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6} = 7,887 \cdot 10^{-4}$
d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2 = 4,652610 \cdot 10^6$
e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} = 4,997 \cdot 10^2$

094 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3}$
b) $8{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{14}$
c) $8{,}3 \cdot 10^6 : 5{,}37 \cdot 10^2$
d) $9{,}5 \cdot 10^{-6} : 3{,}2 \cdot 10^3$

a) $7{,}3 \cdot 10^4 \cdot 5{,}25 \cdot 10^{-3} = 3{,}8325 \cdot 10^2$
b) $8{,}91 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{14} = 5{,}0787 \cdot 10^{10}$
c) $8{,}3 \cdot 10^6 : 5{,}37 \cdot 10^2 = 1{,}545623836 \cdot 10^4$
d) $9{,}5 \cdot 10^{-6} : 3{,}2 \cdot 10^3 = 2{,}96875 \cdot 10^{-9}$

095 Simplifica el resultado de estas operaciones.

a) $\dfrac{6{,}147 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^3}{7{,}9 \cdot 10^8 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-5}}$
b) $\dfrac{3{,}92 \cdot 10^4 \cdot 5{,}86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}2 \cdot 10^{13}}$

a) $\dfrac{6{,}147 \cdot 10^{-2} \cdot 4{,}6 \cdot 10^3}{7{,}9 \cdot 10^8 \cdot 6{,}57 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{2{,}82762 \cdot 10^2}{5{,}1903 \cdot 10^4} = 5{,}447893185 \cdot 10^{-3}$

b) $\dfrac{3{,}92 \cdot 10^4 \cdot 5{,}86 \cdot 10^{-6}}{7 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}2 \cdot 10^{13}} = \dfrac{2{,}29712 \cdot 10^{-1}}{6{,}44 \cdot 10^6} = 3{,}566956522 \cdot 10^{-8}$

096 Halla el valor numérico de estos radicales.

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[5]{-100.000}$ d) $\sqrt[3]{-216}$ e) $\sqrt[4]{625}$ f) $\sqrt[7]{-128}$

a) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$
b) $\sqrt[3]{-27} = -3$
c) $\sqrt[5]{-100.000} = -10$
d) $\sqrt[3]{-216} = -6$
e) $\sqrt[4]{625} = \pm 5$
f) $\sqrt[7]{-128} = -2$

097 Indica los radicales equivalentes.

$\sqrt[4]{2^3}$ $\sqrt[5]{3^2}$ $\sqrt[3]{7^2}$ $\sqrt[8]{2^6}$ $\sqrt[12]{7^8}$ $\sqrt[10]{3^4}$ $\sqrt[12]{2^9}$ $\sqrt[20]{2^{15}}$

$\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{9}{12}} = \sqrt[12]{2^9}$
$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{4}{10}} = \sqrt[10]{3^4}$
$\sqrt[8]{2^6} = 2^{\frac{6}{8}} = 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{15}{20}} = \sqrt[20]{2^{15}}$
$\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}} = 7^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{7^8}$

098 Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{54}$ c) $\sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt{27}$ e) $\sqrt{75}$ f) $\sqrt[5]{128}$ g) $\sqrt[6]{27}$ h) $\sqrt[8]{625}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3^{\frac{3}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2\sqrt[4]{2}$
d) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$
e) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$
f) $\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{2^7} = 2^{\frac{7}{5}} = 2 \cdot 2^{\frac{2}{5}} = 2\sqrt[5]{2^2}$
g) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
h) $\sqrt[8]{625} = \sqrt[8]{5^4} = 5^{\frac{4}{8}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

099 Escribe como potencias de exponente fraccionario estos radicales.

a) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ g) $\left(\sqrt{a}\right)^3$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$

a) $\sqrt{a\sqrt{a}} = \left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}}$

b) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \left(a\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a\cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{12}}$

c) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt{a}}} = \left(\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$

d) $\sqrt[4]{a^{-5}} = a^{\frac{-5}{4}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{-1}{2}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{-1}{4}}$

g) $\left(\sqrt{a}\right)^3 = a^{\frac{3}{2}}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}} = a^{\frac{-1}{3}}$

100 Expresa mediante un solo radical.

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}}$

a) $\sqrt[5]{3\sqrt{5}} = \left(3\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{\frac{1}{10}} = 3^{\frac{2}{10}}\cdot 5^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{3^2\cdot 5}$

b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}} = \left(\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = \left(\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3}$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}}} = \dfrac{1}{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{5^{\frac{1}{4}}} = 5^{\frac{-1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$

101 Extrae los factores que puedas de la raíz.

a) $\sqrt{8}$ c) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{12}$ g) $\sqrt[3]{1.000}$

b) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{98}$ f) $\sqrt{75}$ h) $\sqrt[3]{40}$

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$

e) $\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = 2\sqrt{3}$

f) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$

g) $\sqrt[3]{1.000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 5 = 10$

h) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$

102 Extrae factores de los radicales.

a) $\sqrt[3]{8a^5}$ c) $\sqrt{2^6 a^4 b^8}$ e) $\sqrt[5]{a^6 b^{10}}$

b) $\sqrt[4]{16a^7}$ d) $\sqrt[4]{a^6 b^5 c^9}$ f) $\sqrt[3]{15.625 x^4 y^3}$

a) $\sqrt[3]{8a^5} = \sqrt[3]{2^3 a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

b) $\sqrt[4]{16a^7} = \sqrt[4]{2^4 a^7} = 2a\sqrt[4]{a^3}$

c) $\sqrt{2^6 a^4 b^8} = 2^3 a^2 b^4$

d) $\sqrt[4]{a^6 b^5 c^9} = abc^2\sqrt[4]{a^2 bc}$

e) $\sqrt[5]{a^6 b^{10}} = ab^2\sqrt[5]{a}$

f) $\sqrt[3]{15.625 x^4 y^3} = \sqrt[3]{5^6 x^4 y^3} = 5^2 xy\sqrt[3]{x}$

103 Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}}$ e) $\sqrt[6]{729a^7 b^{-12}}$

b) $\sqrt[4]{32a^5 b^{-8} c^{-12}}$ d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3 b^5 c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6 b^4}}$ f) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

a) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{a^{12}}{a^{18}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^{-6}}} = \left(a^{\frac{-6}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

b) $\sqrt[4]{32a^5 b^{-8} c^{-12}} = \sqrt[4]{2^5 a^5 b^{-8} c^{-12}} = 2ab^{-2}c^{-3}\sqrt[4]{2a}$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{8a^4}{81b^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3 a^4}{3^4 b^3}} = \dfrac{2a}{3b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{3}}$

d) $\dfrac{-\sqrt[3]{8a^3 b^5 c^{-2}}}{\sqrt[3]{-32a^6 b^4}} = \dfrac{-\sqrt[3]{2^3 a^3 b^5 c^{-2}}}{-\sqrt[3]{2^5 a^6 b^4}} = \sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2 a^3 c^2}} = \dfrac{1}{a}\sqrt[3]{\dfrac{b}{2^2 c^2}}$

e) $\sqrt[6]{729a^7 b^{-12}} = \sqrt[6]{3^6 a^7 b^{-12}} = 3ab^{-2}\sqrt[6]{a}$

f) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(a^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

104 Introduce los factores bajo el radical.

a) $2\sqrt[3]{5}$ c) $3\sqrt[5]{15}$ e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}$ g) $2\sqrt[3]{7}$ i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

b) $4\sqrt[4]{20}$ d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ j) $\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{4}$

a) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$

b) $4\sqrt[4]{20}=\sqrt[4]{4^4\cdot 20}=\sqrt[4]{5.120}$

c) $3\sqrt[5]{15}=\sqrt[5]{3^5\cdot 15}=\sqrt[5]{3.645}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{3^2\cdot 2}{5^2}}=\sqrt{\frac{18}{25}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{6}=\sqrt[4]{\frac{1\cdot 6}{2^4}}=\sqrt[4]{\frac{6}{16}}=\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$

f) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{2^4\cdot 2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{32}}$

g) $2\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{2^3\cdot 7}=\sqrt[3]{56}$

h) $5\sqrt[3]{\frac{1}{5}}=\sqrt[3]{\frac{5^3}{5}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

i) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 2}{5^3\cdot 3}}=\sqrt[3]{\frac{18}{125}}$

j) $\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{4}=\sqrt[3]{\frac{3}{7^3\cdot 4^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{21.952}}$

105 Introduce los factores dentro del radical, si es posible.

a) $a\cdot\sqrt{\frac{4a-1}{2a}}$ c) $\frac{2}{a}\cdot\sqrt{\frac{3a}{8}}$ e) $5+\sqrt{2}$

b) $\frac{4ab}{c}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}$ d) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}$ f) $-a^2\sqrt[3]{a}$

a) $a\cdot\sqrt{\frac{4a-1}{2a}}=\sqrt{\frac{a^2(4a-1)}{2a}}=\sqrt{\frac{4a^2-a}{2}}$

b) $\frac{4ab}{c}\cdot\sqrt[4]{\frac{c^2b}{8a}}=\sqrt[4]{\frac{4^4a^4b^4c^2b}{c^4\,8a}}=\sqrt[4]{\frac{2^8a^4b^5c^2}{2^3ac^4}}=\sqrt[4]{\frac{2^5a^3b^5}{c^2}}$

c) $\frac{2}{a}\cdot\sqrt{\frac{3a}{8}}=\sqrt{\frac{2^2\,3a}{2^3a^2}}=\sqrt{\frac{3}{2a}}$

d) $-2ab^2\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{-2^3a^3b^6ab}=\sqrt[3]{-2^3a^4b^7}$

e) No es posible introducir factores, puesto que 5 no es factor.

f) $-a^2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{-a^6a}=\sqrt[3]{-a^7}$

106 Opera y simplifica.

a) $(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)$

b) $(2\sqrt{7}+3\sqrt{2})\cdot(5-2\sqrt{2})$

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

d) $(5\sqrt{2}-3)\cdot(5\sqrt{2}+3)$

e) $(7\sqrt{5}+4)\cdot(5\sqrt{5}-3\sqrt{6})$

f) $(7\sqrt{2}-3)\cdot(5\sqrt{3}+2)$

g) $(6\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot(6\sqrt{7}-\sqrt{5})$

h) $(2\sqrt{5}-\sqrt{10})\cdot(2\sqrt{5}+\sqrt{10})$

a) $(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)=12(\sqrt{2})^2-9\sqrt{2}-20\sqrt{2}+15=-29\sqrt{2}+39$

b) $(2\sqrt{7}+3\sqrt{2})\cdot(5-2\sqrt{2})=10\sqrt{7}-4\sqrt{14}+15\sqrt{2}-6(\sqrt{2})^2=$
$=10\sqrt{7}-4\sqrt{14}+15\sqrt{2}-12$

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-\sqrt{6}+\sqrt{6}-(\sqrt{2})^2=3-2=1$

d) $(5\sqrt{2}-3)\cdot(5\sqrt{2}+3)=25(\sqrt{2})^2+15\sqrt{2}-15\sqrt{2}-9=50-9=41$

e) $(7\sqrt{5}+4)\cdot(5\sqrt{5}-3\sqrt{6})=35(\sqrt{5})^2-21\sqrt{30}+20\sqrt{5}-12\sqrt{6}=$
$=175-21\sqrt{30}+20\sqrt{5}-12\sqrt{6}$

f) $(7\sqrt{2}-3)\cdot(5\sqrt{3}+2)=35\sqrt{6}+14\sqrt{2}-15\sqrt{3}-6$

g) $(6\sqrt{7}+\sqrt{5})\cdot(6\sqrt{7}-\sqrt{5})=36(\sqrt{7})^2-6\sqrt{35}+6\sqrt{35}-(\sqrt{5})^2=$
$=252-5=247$

h) $(2\sqrt{5}-\sqrt{10})\cdot(2\sqrt{5}+\sqrt{10})=4(\sqrt{5})^2+2\sqrt{50}-2\sqrt{50}-(\sqrt{10})^2=$
$=20-10=10$

107 Calcula.

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$

a) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^4}=a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{9}{12}}\cdot a^{\frac{20}{12}}\cdot a^{\frac{8}{12}}=a^{\frac{27}{12}}=\sqrt[12]{a^{37}}=a^3\sqrt[12]{a}$

b) $\sqrt[3]{3a^2b}\cdot\sqrt{2ab^3}=(3a^2b)^{\frac{1}{3}}\cdot(2ab^3)^{\frac{1}{2}}=(3a^2b)^{\frac{2}{6}}\cdot(2ab^3)^{\frac{3}{6}}=$
$=\sqrt[6]{3^2\,a^4b^2\,2^3\,a^3b^9}=\sqrt[6]{2^3 3^2\,a^7b^{11}}$

c) $\sqrt[5]{2a^3b^4}:\sqrt[3]{4ab^2}=(2a^3b^4)^{\frac{1}{5}}:(4ab^2)^{\frac{1}{3}}=(2a^3b^4)^{\frac{3}{15}}:(4ab^2)^{\frac{5}{15}}=$
$=\sqrt[15]{\dfrac{2^3a^9b^{12}}{4^5a^5b^{10}}}=\sqrt[15]{\dfrac{2^3a^9b^{12}}{2^{10}a^5b^{10}}}=\sqrt[15]{\dfrac{a^4b^2}{2^7}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{b}}=\left((ab)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a(b)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a^2b}$

108 Efectúa y simplifica.

a) $(2+\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})$

b) $(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})+(2-4\sqrt{5})\cdot(2+4\sqrt{5})$

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}-4\sqrt{7})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5}+4\sqrt{7})$

a) $(2+\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=4+4\sqrt{3}+3-4+3=6+4\sqrt{3}$

b) $(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})+(2-4\sqrt{5})\cdot(2+4\sqrt{5})=9-5+4-80=-72$

c) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}-4\sqrt{7})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5}+4\sqrt{7})=$
$=3-\sqrt{15}+4\sqrt{21}+\sqrt{15}-5+4\sqrt{35}-4\sqrt{21}+4\sqrt{35}-112=109+8\sqrt{35}$

109 Halla el resultado.

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

a) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{6}}=\sqrt{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}=\sqrt{49-24}=\sqrt{25}=5$

b) $\sqrt[3]{5\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{(5\sqrt{3}+1)(5\sqrt{3}+1)}=\sqrt[3]{75-1}=\sqrt[3]{74}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt[4]{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt[4]{3-2}=1$

110 Efectúa y simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

d) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}\right)^{-2}$

a) $\dfrac{\sqrt[4]{2^3}\cdot 2^{-4}\cdot\sqrt[3]{2}}{2^2\cdot\sqrt{2}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{-4}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{5}{2}}}=\dfrac{2^{\frac{13}{12}}}{2^4}=\dfrac{2^{\frac{13}{12}}}{2^{\frac{48}{12}}}=\sqrt[12]{2^{35}}$

b) $\left(81^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}\right):\sqrt{3}=\left(3\cdot 3^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{8}}\right):3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{8}}:3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{3}$

c) $\left(\sqrt{14+\sqrt{7-\sqrt[4]{81}}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+\sqrt{7-3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{14+2}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$

d) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{9}+\dfrac{a}{16}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\dfrac{16a+9a}{144}}\right)^{-2}=\left(\sqrt{\dfrac{25a}{144}}\right)^{-2}=\left(\dfrac{5}{12}\sqrt{a}\right)^{-2}=\dfrac{144}{25a}$

111 Expresa el resultado como potencia.

a) $\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}\right)^6$

b) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}$

a) $\left(\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5}\right)^6=\left(5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\right)^6=\left(5^{\frac{5}{6}}\right)^6=5^5$

b) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^2\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{5}}\cdot\left(3^2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{1}{5}}\cdot 3^{\frac{2}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{10}}=3^{\frac{7}{10}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{11}{24}}$

d) $\sqrt[3]{8\sqrt[5]{81}}=\left(2^3\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=2\cdot 3^{\frac{4}{15}}$

112 Racionaliza y simplifica.

a) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{-5}{2\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[5]{-3^2}}$

e) $\dfrac{-6}{2\sqrt[4]{7}}$

f) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$

g) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt[3]{6}}$

h) $\dfrac{9}{5\sqrt[7]{5^5}}$

i) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[3]{3^2}}$

j) $\dfrac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3^5}}$

a) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}=\dfrac{(6\sqrt{6}-6)\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=\dfrac{6\cdot 6-6\sqrt{6}}{6}=\dfrac{6\left(6-\sqrt{6}\right)}{6}=6-\sqrt{6}$

b) $\dfrac{-5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{-5\sqrt{5}}{2\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{-5\sqrt{5}}{10}=\dfrac{-\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

d) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[5]{-3^2}}=\dfrac{(5\sqrt{3}-4)\sqrt[5]{-3^3}}{\sqrt[5]{-3^2}\cdot\sqrt[5]{-3^3}}=\dfrac{-15\sqrt[10]{3}+4\sqrt[5]{-3^3}}{-3}=\dfrac{15\sqrt[10]{3}-4\sqrt[5]{-3^3}}{3}$

e) $\dfrac{-6}{2\sqrt[4]{7}}=\dfrac{-3}{\sqrt[4]{7}}=\dfrac{-3\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7}\,\sqrt[4]{7^3}}=\dfrac{-3\sqrt[4]{7^3}}{7}$

f) $\dfrac{7+\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}=\dfrac{\left(7+\sqrt{5}\right)\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{7\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{675}}{3}$

g) $\dfrac{6\sqrt{6}-6}{\sqrt[3]{6}}=\dfrac{(6\sqrt{6}-6)\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{6^2}}=\dfrac{6\left(6\sqrt[6]{6}-\sqrt[3]{6^2}\right)}{6}=6\sqrt[6]{6}-\sqrt[3]{6^2}$

h) $\dfrac{9}{5\sqrt[7]{5^5}}=\dfrac{9\sqrt[7]{5^2}}{5\sqrt[7]{5^5}\cdot\sqrt[7]{5^2}}=\dfrac{9\sqrt[7]{5^2}}{25}$

i) $\dfrac{5\sqrt{3}-4}{\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{(5\sqrt{3}-4)\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{5\sqrt[6]{3^5}-4\sqrt[3]{3}}{3}$

j) $\dfrac{7\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3^5}}=\dfrac{7\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\dfrac{7\sqrt[12]{2^4\cdot 3^9}}{9}$

113 Elimina las raíces del denominador.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}$ e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\dfrac{3(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2-3}=-3(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

c) $\dfrac{-5}{\sqrt{3}-2}=\dfrac{-5(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)}=\dfrac{-5\sqrt{3}-10}{3-4}=5\sqrt{3}+10$

d) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(3\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\dfrac{24+4\sqrt{10}}{18-5}=\dfrac{24+4\sqrt{10}}{13}$

e) $\dfrac{7}{\sqrt{11}-3}=\dfrac{7(\sqrt{11}+3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}=\dfrac{7\sqrt{11}+21}{11-9}=\dfrac{7\sqrt{11}+21}{2}$

f) $\dfrac{-5}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\dfrac{-5(\sqrt{6}-\sqrt{7})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})(\sqrt{6}-\sqrt{7})}=\dfrac{-5\sqrt{6}+5\sqrt{7}}{6-7}=5\sqrt{6}-5\sqrt{7}$

114 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{-1}{2\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$ b) $\dfrac{5}{3\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{2})}$ c) $\dfrac{8}{5\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})}$ d) $\dfrac{-7}{9\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3})}$

a) $\dfrac{-1}{2\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\dfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{5}{3\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{3(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}=\dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{15}=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{8}{5\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})}=\dfrac{8(\sqrt{10}+\sqrt{6})}{5(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{10}+\sqrt{6})}=\dfrac{8(\sqrt{10}-\sqrt{6})}{20}=\dfrac{2(\sqrt{10}-\sqrt{6})}{5}$

d) $\dfrac{-7}{9\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\dfrac{-7(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{9(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\dfrac{-7(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{27}$

115 Racionaliza y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}$ b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}}=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{3+\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{6}}\,(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{9-6}=\dfrac{3\sqrt{3+\sqrt{6}}-\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{3}$

b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(1-\sqrt{5}+\sqrt{7})(1+\sqrt{5}-\sqrt{7})} =$

$= \dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5}-5+\sqrt{35}+\sqrt{7}+\sqrt{35}-7} = \dfrac{1+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-11+2\sqrt{35}} =$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5}-\sqrt{7})(-11-2\sqrt{35})}{(-11+2\sqrt{35})(-11-2\sqrt{35})} = \dfrac{-11-11\sqrt{5}+11\sqrt{7}-2\sqrt{35}-2\sqrt{175}+2\sqrt{245}}{121-140} =$

$= \dfrac{-11-11\sqrt{5}+11\sqrt{7}-2\sqrt{35}-2\sqrt{175}+2\sqrt{245}}{-19}$

c) $\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{(5\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{18}}{(\sqrt{18})^2} = \dfrac{5\sqrt{3^3\cdot 2^2}-6}{18} =$

$= \dfrac{5\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}-6}{18} = \dfrac{6(5\sqrt{3}-1)}{6\cdot 3} = \dfrac{5\sqrt{3}-1}{3}$

d) $\dfrac{4\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{12}} = \dfrac{(4\sqrt{3}+\sqrt{7})\sqrt{12}}{(\sqrt{12})^2} = \dfrac{24+\sqrt{84}}{12} = \dfrac{2(12+\sqrt{21})}{6\cdot 2} = \dfrac{12+\sqrt{21}}{6}$

116 ●●○ Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{3}{(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)}$

c) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)}$

d) $\dfrac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$

a) $\dfrac{3}{(3\sqrt{2}-5)\cdot(4\sqrt{2}-3)} = \dfrac{3}{24-9\sqrt{2}-20\sqrt{2}+15} = \dfrac{3}{39-29\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{3(39+29\sqrt{2})}{(39-29\sqrt{2})(39+29\sqrt{2})} = \dfrac{117+87\sqrt{2}}{1.521-1.682} = \dfrac{117+87\sqrt{2}}{-161}$

b) $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)} = \dfrac{-2(5\sqrt{3}+1)}{\sqrt[3]{4}\cdot(5\sqrt{3}-1)(5\sqrt{3}+1)} = \dfrac{-2(5\sqrt{3}+1)}{74\sqrt[3]{4}} =$

$= \dfrac{-5\sqrt{3}-1}{37\sqrt[3]{4}} = \dfrac{(-5\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{4^2}}{37\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4^2}} = \dfrac{-5\sqrt[6]{3^3\cdot 4^4}-\sqrt[3]{4^2}}{148}$

c) $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)} = \dfrac{-\sqrt{2}(\sqrt{125}-2)}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt{125}+2)(\sqrt{125}-2)} = \dfrac{-\sqrt{250}+2\sqrt{2}}{121\sqrt[3]{2}} =$

$= \dfrac{(-\sqrt{250}+2\sqrt{2})\sqrt[3]{2^2}}{121\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{-\sqrt[6]{5^9\cdot 2^7}+2\sqrt[6]{2^7}}{121\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{-5\cdot 2\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2^2\sqrt[6]{2}}{242} =$

$= \dfrac{2(-5\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2\sqrt[6]{2})}{242} = \dfrac{-5\sqrt[6]{5^3\cdot 2}+2\sqrt[6]{2}}{121}$

d) $\dfrac{-4}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{2}} = \dfrac{-4}{3^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{-4}{3^{\frac{3}{12}}\cdot 2^{\frac{4}{12}}} = \dfrac{-4}{\sqrt[12]{3^3\cdot 2^4}} = \dfrac{-4\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{\sqrt[12]{3^3\cdot 2^4}\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}} =$

$= \dfrac{-4\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{6} = \dfrac{-2\sqrt[12]{3^9\cdot 2^8}}{3}$

117 Realiza estas operaciones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{6}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{6}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[18]{6^{11}}}{\sqrt[9]{6\cdot 2^3}}$

118 Efectúa las operaciones.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+5} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{3}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+5} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{5}-5}{(\sqrt{5}+5)\sqrt[3]{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5}-\sqrt{5}-5}{\sqrt[6]{5^5}+5\sqrt[3]{5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[9]{3}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[9]{3}}{\sqrt[9]{3^7}}$

119 Calcula, mediante la definición, los logaritmos.

a) $\log_3 243$
b) $\log_9 81$
c) $\log 1.000.000$
d) $\log 0{,}00001$
e) $\ln e^2$
f) $\ln e^{-14}$
g) $\log_7 343$
h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$
b) $\log_9 81 = 2$
c) $\log 1.000.000 = 6$
d) $\log 0{,}00001 = -5$
e) $\ln e^2 = 2$
f) $\ln e^{-14} = -14$
g) $\log_7 343 = 3$
h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

120 Sabiendo que $\log_3 2 = 0{,}63$; halla $\log_3 24$ mediante las propiedades de los logaritmos.

$\log_3 24 = \log_3 (2^3 \cdot 3) = \log_3 2^3 + \log_3 3 = 3\log_3 2 + \log_3 3 = 3\cdot 0{,}63 + 1 =$
$= 1{,}89 + 1 = 2{,}89$

121 Calcula $\log_4 128$, utilizando las propiedades de los logaritmos, e intenta dar un resultado exacto.

$\log_4 128 \qquad 4^x = 128 \qquad 2^{2x} = 128 \qquad 2^{2x} = 2^7 \qquad x = \dfrac{7}{2}$

122 Halla el resultado de las expresiones, mediante las propiedades de los logaritmos.

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$
b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$
c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 = 2\cdot 2 + 5 - 3\cdot 2 = 3$
b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 = 3 + 3 + 3 = 9$
c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 = 4 - 2 + 2 = 4$

123 Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $\log_3 \dfrac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2}$

b) $\log_2 \dfrac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$

c) $\log_{10} \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{y^2 \cdot z^3}}$

d) $\ln \dfrac{e^3 \cdot \sqrt[4]{a^6}}{1.000}$

a) $\log_3 \dfrac{a^2 \cdot b^5 \cdot c}{d^2} = \log_3 (a^2 \cdot b^5 \cdot c) - \log_3 d^2 =$
$= \log_3 a^2 + \log_3 b^5 + \log_3 c - \log_3 d^2 =$
$= 2 \log_3 a + 5 \log_3 b + \log_3 c - 2 \log_3 d$

b) $\log_2 \dfrac{a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}} = \log_2 \left(a^3 \cdot \sqrt[5]{b^6}\right) - \log_2 \sqrt[3]{c^7} =$
$= \log_2 a^3 + \log_2 b^{\frac{6}{5}} - \log_2 c^{\frac{7}{3}} =$
$= 3 \log_2 a + \dfrac{6}{5} \log_2 b + \dfrac{7}{3} \log_2 c$

c) $\log_{10} \dfrac{x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{y^2 \cdot z^3}} = \log_{10} \left(x \cdot \sqrt{x}\right) - \log_{10} \sqrt[5]{y^2 \cdot z^3} =$
$= \log_{10} \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right) - \log_{10} \left(y^{\frac{2}{5}} \cdot z^{\frac{3}{5}}\right) =$
$= \log_{10} x + \log_{10} x^{\frac{1}{2}} - \log_{10} y^{\frac{2}{5}} - \log_{10} z^{\frac{3}{5}} =$
$= \log_{10} x + \dfrac{1}{2} \log_{10} x - \dfrac{2}{5} \log_{10} y - \dfrac{3}{5} \log_{10} z$

d) $\ln \dfrac{e^3 \cdot \sqrt[4]{a^6}}{1.000} = \ln\left(e^3 \cdot a^{\frac{6}{4}}\right) - \ln 1.000 =$
$= \ln e^3 + \ln a^{\frac{3}{2}} - \ln 10^3 =$
$= 3 \ln e + \dfrac{3}{2} \ln a - 3 \ln 10$

124 Determina, utilizando la calculadora.

a) $\log_5 36^2$ b) $\log_2 \sqrt{31}$ c) $\log_6 100$ d) $\log_4 31^5$

a) $\log_5 36^2 = 2 \log_5 36 = 2 \cdot \dfrac{\log 36}{\log 5} = 4{,}4531$

b) $\log_2 \sqrt{31} = \dfrac{1}{2} \log_2 31 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\log 31}{\log 2} = 2{,}4771$

c) $\log_6 100 = \log_6 10^2 = 2 \cdot \dfrac{\log 10}{\log 6} = 2{,}5701$

d) $\log_4 31^5 = 5 \log_4 31 = 5 \cdot \dfrac{\log 31}{\log 4} = 12{,}3855$

125 Si $\log e = 0{,}4343$; ¿cuánto vale ln 10? ¿Y ln 0,1?

$$\ln 10 = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3025 \qquad \ln 0{,}1 = \frac{\log 0{,}1}{\log e} = \frac{-1}{0{,}4343} = -2{,}3025$$

126 Halla el valor de los logaritmos decimales, teniendo en cuenta que $\log 2 = 0{,}3010$.

a) log 1.250 c) log 5 e) log 1,6
b) log 0,125 d) log 0,04 f) log 0,2

a) $\log 1.250 = \log \frac{10.000}{8} = \log 10.000 - \log 2^3 = 4 - 3 \cdot 0{,}3010 = 3{,}097$

b) $\log 0{,}125 = \log \frac{1}{8} = \log 1 - \log 2^3 = 0 - 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}903$

c) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

d) $\log 0{,}04 = \log \frac{2^2}{100} = 2 \log 2 - 2 \log 10 = 2 \cdot 0{,}3010 - 2 = -1{,}398$

e) $\log 1{,}6 = \log \frac{2^4}{10} = 4 \log 2 - \log 10 = 4 \cdot 0{,}3010 - 1 = 0{,}204$

f) $\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3010 - 1 = -0{,}699$

127 Calcula el valor de x.

a) $\log_3 x = 5$ c) $\log_2 x = -1$ e) $\log_3 (x - 2) = 5$ g) $\log_2 (2 - x) = -1$
b) $\log_5 x = 3$ d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$ f) $\log_5 (x + 2) = 3$ h) $\log_{23} (3 + x) = 4$

a) $\log_3 x = 5 \to 3^5 = x \to x = 243$

b) $\log_5 x = 3 \to 5^3 = x \to x = 125$

c) $\log_2 x = -1 \to 2^{-1} = x \to x = 0{,}5$

d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4 \to \left(\frac{2}{3}\right)^4 = x \to x = \frac{16}{81}$

e) $\log_3 (x - 2) = 5 \to 3^5 = x - 2 \to x = 243 + 2 = 245$

f) $\log_5 (x + 2) = 3 \to 5^3 = x + 2 \to x = 125 - 2 = 123$

g) $\log_2 (2 - x) = -1 \to 2^{-1} = 2 - x \to x = -0{,}5 + 2 = 1{,}5$

h) $\log_{23} (3 + x) = 4 \to 23^4 = 3 + x \to x = 279.841 - 3 = 279.838$

128 Halla cuánto vale x.

a) $\log_x 3 = -1$ b) $\log_x 5 = 2$ c) $\log_x 3 = -2$ d) $\log_x 2 = 5$

a) $\log_x 3 = -1 \to x^{-1} = 3 \to x = \frac{1}{3}$

b) $\log_x 5 = 2 \to x^2 = 5 \to x = \sqrt{5}$

c) $\log_x 3 = -2 \to x^{-2} = 3 \to x^2 = \frac{1}{3} \to x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

d) $\log_x 2 = 5 \to x^5 = 2 \to x = \sqrt[5]{2}$

129 Calcula el valor de x.

a) $\log_3 9^x = 2$
b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$
c) $\ln 3^x = -1$
d) $\log_2 4^{x+4} = -2$
e) $\log_3 9^{x+3} = 3$
f) $\log 2^{x/2} = \frac{3}{2}$
g) $\ln 3^{x+6} = 3$
h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

a) $\log_3 9^x = 2 \rightarrow x \log_3 9 = 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2} \rightarrow x \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2 \log 2} \rightarrow x = 4{,}9829$

c) $\ln 3^x = -1 \rightarrow x \ln 3 = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{\ln 3} \rightarrow x = -0{,}9102$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2 \rightarrow 2^{-2} = 4^{x+4} \rightarrow 2^{-2} = 2^{2x+8} \rightarrow -2 = 2x + 8 \rightarrow x = -5$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3 \rightarrow 3^3 = 9^{x+3} \rightarrow 3^3 = 3^{3x+9} \rightarrow 3 = 3x + 9 \rightarrow x = -2$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{x}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{\log 2} \rightarrow x = 9{,}9658$

g) $\ln 3^{x+6} = 3 \rightarrow (x + 6) \ln 3 = 3 \rightarrow x = \frac{3}{\ln 3} - 6 \rightarrow x = -3{,}2693$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2 \rightarrow (3x + 4) \log_3 27 = -2 \rightarrow 3x + 4 = \frac{-2}{3}$
$\rightarrow 3x = \frac{-2-12}{3} \rightarrow x = \frac{-14}{9}$

130 Determina el valor de x.

a) $8^x = 1.024$
b) $3^{x^2} = 27$
c) $3^{x^2-6} = 27$
d) $10^{x-1} = 10^3$
e) $8^{x-2} = 1.024$
f) $(3^x)^2 = 27$
g) $3^{x^2} + 18 = 27$
h) $2^{x^2-2x+1} = 1$

a) $8^x = 1.024 \rightarrow 2^{3x} = 2^{10} \rightarrow x = \frac{10}{3}$

b) $3^{x^2} = 27 \rightarrow 3^{x^2} = 3^3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

c) $3^{x^2-6} = 27 \rightarrow 3^{x^2-6} = 3^3 \rightarrow x^2 - 6 = 3 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$

d) $10^{x-1} = 10^3 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$

e) $8^{x-2} = 1.024 \rightarrow 2^{3(x-2)} = 2^{10} \rightarrow 3x - 6 = 10 \rightarrow x = \frac{16}{3}$

f) $(3^x)^2 = 27 \rightarrow 3^{2x} \rightarrow 3^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

g) $3^{x^2} + 18 = 27 \rightarrow 3^{x^2} = 9 \rightarrow 3^{x^2} = 3^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$

h) $2^{x^2-2x+1} = 1 \rightarrow 2^{x^2-2x+1} = 2^0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$

131

Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Razona tu respuesta.

a) Todos los números decimales se pueden escribir en forma de fracción.
b) Todos los números reales son racionales.
c) Cualquier número irracional es real.
d) Hay números enteros que son irracionales.
e) Existen números reales que son racionales.
f) Todo número decimal es racional.
g) Cada número irracional tiene infinitas cifras decimales.
h) Todos los números racionales tienen infinitas cifras decimales que se repiten.
i) Todos los números racionales se pueden escribir mediante fracciones.

a) Falsa, pues los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas y no se pueden escribir como fracción.
b) Falsa, porque hay números reales que son irracionales.
c) Verdadera, ya que los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los números reales.
d) Falsa, porque si son enteros no pueden tener infinitas cifras decimales no periódicas.
e) Verdadero, pues todos los números que se pueden expresar como fracción, son números reales, que además son racionales.
f) Falsa, porque los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas son irracionales.
g) Verdadero, ya que tienen infinitas cifras decimales no periódicas.
h) Falsa, pues los decimales exactos también son racionales.
i) Verdadero, por definición.

132

¿Por qué la raíz cuadrada de cualquier número terminado en 2 es un número irracional? ¿Existe otro conjunto de números con esta característica?

Porque no hay ningún número que, al multiplicarlo por sí mismo, dé un número terminado en 2.

Todas las familias de números terminadas en 3, 7 y 8 tienen esta característica.

133

Escribe en notación científica las siguientes cantidades.

a) Distancia Tierra-Luna: 384.000 km
b) Distancia Tierra-Sol: 150.000.000 km
c) Diámetro de un átomo: 0,0000000001 m
d) Superficie de la Tierra: 500 millones de km^2
e) Longitud de un virus (gripe): 0,0000000022 m
f) Peso de un estafilococo: 0,0000001 g
g) Un año luz: 9.500.000.000.000 km
h) Distancia a la galaxia más lejana: 13.000 millones de años luz

a) $384.000 = 3,84 \cdot 10^5$
b) $150.000.000 = 1,5 \cdot 10^8$
c) $0,0000000001 = 1 \cdot 10^{-10}$
d) $500.000.000 = 5 \cdot 10^8$
e) $0,0000000022 = 2,2 \cdot 10^{-9}$
f) $0,0000001 = 1 \cdot 10^{-7}$
g) $9.400.000.000.000 = 9,4 \cdot 10^{12}$
h) $13.000.000.000 = 1,3 \cdot 10^{10}$

134 Con ayuda de las propiedades de los números reales, prueba que el producto de cero por cualquier número real da como resultado cero. En cada caso, indica la propiedad que estás utilizando.

Por la unicidad de los elementos neutros para la suma y la multiplicación se tiene que:

$$0 \cdot a + a = \underset{\text{Propiedad distributiva}}{a \cdot (0 + 1)} = a \cdot 1 = a$$

Como $0 \cdot a + a = a \rightarrow 0 \cdot a = 0$

135 ¿Qué tipo de decimal se obtiene de la fracción $\dfrac{a}{2^2 \cdot 5^3}$, siendo *a* un número entero?

Como nuestro sistema de numeración es decimal, al dividir un número entero entre un número que sea potencia de 2 o 5, o de ambos, se obtiene un decimal exacto. Si el numerador es múltiplo del denominador, se obtiene un número entero.

136 ¿Existe algún caso en que la aproximación por exceso y por defecto coincidan?

Y si consideramos el redondeo, ¿puede coincidir con la aproximación por exceso o por defecto?

No pueden coincidir, ya que para aproximar por defecto se eliminan las cifras a partir del orden considerado, y para aproximar por exceso se eliminan las cifras a partir del orden considerado, pero se aumenta en una unidad la última cifra que queda.

La aproximación por redondeo coincide con la aproximación por defecto si la cifra anterior al orden considerado es menor que cinco, y coincide con la aproximación por exceso en el resto de casos.

137 Razona cómo se racionalizan las fracciones del tipo: $\dfrac{1}{\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b}}$

Multiplicamos el denominador por el conjugado:

$$\frac{\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}}{\left(\sqrt[2^n]{a} - \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)} = \frac{\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}}{\sqrt[2^{n-1}]{a} - \sqrt[2^{n-1}]{b}}$$

$$\frac{\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)}{\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} - \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)} = \frac{\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)}{\sqrt[2^{n-2}]{a} - \sqrt[2^{n-2}]{b}}$$

Por tanto, multiplicando por el conjugado *n* veces:

$$\frac{\left(\sqrt[2^n]{a} + \sqrt[2^n]{b}\right)\left(\sqrt[2^{n-1}]{a} + \sqrt[2^{n-1}]{b}\right)\dots\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{a - b}$$

138 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ b) $\dfrac{2}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{4}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}-5\sqrt{5}-6\sqrt{3}}$

a) $$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)}{-5-2\sqrt{12}}=\frac{2(\sqrt{2}-\sqrt{3}-2)(-5+2\sqrt{12})}{(-5-2\sqrt{12})(-5+2\sqrt{12})}=$$
$$=\frac{-10\sqrt{2}+4\sqrt{24}+10\sqrt{3}-24-20-8\sqrt{12}}{25-48}=$$
$$=\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{6}-10\sqrt{3}+4+16\sqrt{3}}{23}=\frac{10\sqrt{2}-8\sqrt{6}+4+6\sqrt{3}}{23}$$

b) $$\frac{2}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\frac{2(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)}{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+2)(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)}=$$
$$=\frac{2(\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)}{-23+12\sqrt{3}}=\frac{2(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2)(-23-12\sqrt{3})}{(-23+12\sqrt{3})(-23-12\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{-92\sqrt{2}-48\sqrt{6}-138\sqrt{3}-216+92+48\sqrt{3}}{97}=$$
$$=\frac{-92\sqrt{2}-48\sqrt{6}-90\sqrt{3}-124}{97}$$

c) $$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}-5\sqrt{5}-6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-5\sqrt{5}-6\sqrt{3})(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})}{-227-60\sqrt{15}}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})(-137-60\sqrt{15})}{-2.471}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt{6}+5\sqrt{5}+6\sqrt{3})(-137+60\sqrt{15})}{-2.471}$$

139 Indica un procedimiento general para racionalizar expresiones del tipo:

$$\frac{1}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\ldots+\sqrt{b_n}}$$

teniendo en cuenta que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales.

Se multiplica el denominador por una expresión que resulta al cambiar de signo a todos los elementos del denominador menos a uno.

Al realizar la operación el número de raíces disminuye, se repite este proceso tantas veces como sea necesario hasta que la expresión quede racionalizada.

140 Considera que *A*, *B*, *C* y *D* son cuatro pueblos. La distancia medida entre *A* y *B* ha sido de 48 km, con un error de 200 m, y la distancia entre *C* y *D* ha sido de 300 m, con un error de 2,5 m. ¿Qué medida es mejor? ¿Por qué?

Se calcula el error relativo: $E_r=\left|\dfrac{0,2}{48}\right|=0,00416$ $E_r=\left|\dfrac{2,5}{300}\right|=0,00833$

Es mejor la medida tomada entre las ciudades *A* y *B*, ya que el error relativo cometido es menor.

141 ●●○

Comprueba las siguientes igualdades.

a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n \cdot m]{ab}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[n+m]{a \cdot b}$

c) $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

d) $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{(a \cdot b)^m}$

e) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{a \cdot b}$

f) $a\sqrt{b+c} = \sqrt{ab+ac}$

g) $\sqrt[4]{a^8b^2} = a\sqrt{b}$

h) $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

a) Falso: $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{8} = 4$

$\sqrt[12]{4 \cdot 8} \neq 4$

b) Falso: $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{8} = 4$

$\sqrt[5]{4 \cdot 8} \neq 4$

c) Falso: $\sqrt[3]{5+3} = 2$

$\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3} \neq 2$

d) Falso: $2\sqrt[3]{3^6} = 18$

$\sqrt[3]{(2 \cdot 3)^6} \neq 18$

e) Verdadero: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^3 \cdot b} =$

$= a\sqrt{a \cdot b}$

f) Falso: $2\sqrt{15+1} = 8$

$\sqrt{2 \cdot 15 + 2 \cdot 1} \neq 8$

g) Falso: $\sqrt[4]{a^8b^2} = \left(a^8b^2\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{4}}b^{\frac{2}{4}} = a^2b^{\frac{1}{2}} =$

$= a^2\sqrt{b} \neq a\sqrt{b}$

h) Falso: $\sqrt{3^2+4^2} = 5$

$3+4 \neq 5$

142 ●●●

Escribe 2^{500} en notación científica.

a) Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$ y que $\sqrt{10} = 3{,}1622$.

b) ¿Podrías hacerlo con una calculadora científica?

c) Expresa 5^{500} en notación científica, teniendo en cuenta el primer apartado.

a) Llamamos x al número: $2^{500} = x$

Tenemos que encontrar y tal que $10^y = x$.

$2^{500} = x \qquad 500 = \log_2 x = \dfrac{\log x}{\log 2}$

Por otro lado, como $\log x = y$:

$y = 500 \cdot \log 2 = 150{,}5$

$10^{150{,}5} = 10^{0{,}5} \cdot 10^{150} = 3{,}1622 \cdot 10^{150}$

b) No se puede hallar con calculadora, ya que es un número demasiado grande.

c) Llamamos x al número: $5^{500} = x$

Tenemos que encontrar y tal que $10^y = x$:

$5^{500} = x \qquad 500 = \log_5 x = \dfrac{\log x}{\log 5}$

Por otro lado, como $\log x = y$:

$y = 500 \cdot \log 5 = 349{,}5$

$10^{349{,}5} = 10^{0{,}5} \cdot 10^{349} = 3{,}1622 \cdot 10^{349}$

143 Las unidades de medida con que se mide la cantidad de información son:

Byte $= 2^8$ bits Megabyte $= 2^{10}$ Kilobytes

Kilobyte $= 2^{10}$ bytes Gigabyte $= 2^{10}$ Megabytes

Expresa, en forma de potencia y en notación científica, las siguientes cantidades de información en bits y bytes.

a) Disco duro de 120 Gb.

b) Tarjeta de memoria de 512 Mb.

c) Disquete de 1,44 Mb.

d) CD-Rom de 550 Mb.

a) $120 \text{ Gb} = 120 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ bytes $= 15 \cdot 2^{33}$ bytes $= 15 \cdot 2^{41}$ bits

$120 \text{ Gb} = 1{,}2885 \cdot 10^{11}$ bytes $= 3{,}2985 \cdot 10^{13}$ bits

b) $512 \text{ Mb} = 2^9 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ bytes $= 2^{29}$ bytes $= 2^{37}$ bits

$512 \text{ Mb} = 5{,}3687 \cdot 10^8$ bytes $= 1{,}3743 \cdot 10^{11}$ bits

c) $1{,}44 \text{ Mb} = 1{,}44 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ bytes $= 1{,}44 \cdot 2^{20}$ bytes $= 1{,}44 \cdot 2^{28}$ bits

$1{,}44 \text{ Mb} = 1{,}5099 \cdot 10^6$ bytes $= 3{,}8655 \cdot 10^8$ bits

d) $550 \text{ Mb} = 550 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10}$ bytes $= 550 \cdot 2^{20}$ bytes $= 550 \cdot 2^{28}$ bits

$550 \text{ Mb} = 5{,}7672 \cdot 10^8$ bytes $= 1{,}4764 \cdot 10^{11}$ bits

PARA FINALIZAR...

144 Si $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible:

a) ¿Cuándo es $\frac{a+1}{b+1}$ equivalente a $\frac{a}{b}$?

b) ¿Y cuándo es $\frac{a+b}{b+b}$ equivalente a $\frac{a}{b}$?

a) $\frac{a+1}{b+1} = \frac{a}{b}$

$ab + b = ab + a$

$a = b$

b) $\frac{a+b}{b+b} = \frac{a}{b}$

$ab + b^2 = ab + ab \rightarrow b^2 = ab$

Como b es distinto de cero: $b = a$

145 Si una fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible, ¿son las fracciones $\frac{a+b}{a \cdot b}$ y $\frac{a-b}{a \cdot b}$ irreducibles?

Como los divisores de $a + b$ son los divisores comunes de a y b:

$(a + b)$ y $a \cdot b$ no tienen divisores comunes, y la fracción $\frac{a+b}{a \cdot b}$ es irreducible.

Como los divisores de $a - b$ son los divisores comunes de a y b:

$(a - b)$ y $a \cdot b$ no tienen divisores comunes, y la fracción $\frac{a-b}{a \cdot b}$ es irreducible.

146 Demuestra la siguiente igualdad: $\sum_{k=1}^{99} \log \sqrt{\frac{1+k}{k}} = 1$

$$\sum_{k=1}^{99} \log \sqrt{\frac{1+k}{k}} = \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{2} \log \frac{1+k}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{99} \log \frac{1+k}{k} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{99} \left(\log (1+k) - \log k\right) = \frac{1}{2} \left(\log 100 - \log 1\right) = 1$$

147 **Demuestra estas igualdades.**

a) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ b) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

a) Por la definición de logaritmos:

$\log_a (b \cdot c) = x$ $\log_a b = y$ $\log_a c = z$

$a^x = b \cdot c$ $a^y = b$ $a^z = c$

$a^y \cdot a^z = b \cdot c$ $a^y + z = b \cdot c$ $\log_a (b \cdot c) = y + z$

Es decir: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

b) Por la definición de logaritmos:

$\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = x$ $\log_a b = y$ $\log_a c = z$

$a^x = \dfrac{b}{c}$ $a^y = b$ $a^z = c$

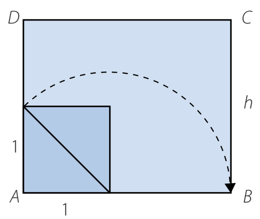
$\dfrac{a^y}{a^z} = \dfrac{b}{c}$ $a^{y-z} = \dfrac{b}{c}$ $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = y - z$

Es decir: $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

148 **Demuestra la siguiente igualdad: $\log (a^2 - b^2) = \log (a + b) + \log (a - b)$**

$\log (a + b) + \log (a - b) = \log [(a + b)(a - b)] = \log (a^2 - b^2)$

149 **Si el área de esta figura es 10 cm^2, ¿cuál es su altura?**



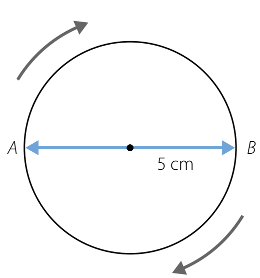
La longitud de la base mide: $1 + \sqrt{2}$ cm

Calculamos la altura: $10 = \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot h$

$$h = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} = \frac{10 - 10\sqrt{2}}{-1} = -10 + 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

150 **Dos piezas móviles de una máquina se desplazan a la misma velocidad. La primera pieza describe una circunferencia de radio 5 cm y la segunda se desplaza de un extremo al otro del diámetro de esa circunferencia.**

Si ambas piezas parten del mismo punto, ¿coincidirán en algún momento?



Suponemos que ambas piezas parten de *A*.
Llamamos *v* a la velocidad que llevan los dos móviles.
La distancia recorrida por el móvil que se desplaza por la circunferencia en los puntos *A* y *B* es: $5\pi(k - 1)$, siendo *k* un número natural. La distancia recorrida por el móvil que se desplaza por el diámetro en los puntos *A* y *B* es: $10(k - 1)$, siendo *k* un número natural. Las distancias recorridas por el móvil que se desplaza por la circunferencia son números irracionales, mientras que las distancias recorridas por el móvil que se desplaza por el diámetro son números naturales.
Por tanto, nunca coincidirán ambos móviles.