11 Probabilidad

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El curioso incidente del perro a medianoche

El señor Jeavons decía que a mí me gustaban las matemáticas porque son seguras. Decía que me gustaban las matemáticas porque consisten en resolver problemas, y esos problemas son difíciles e interesantes, pero siempre hay una respuesta sencilla al final. Y lo que quería decir era que las matemáticas no son como la vida, porque al final en la vida no hay respuestas sencillas.

Eso es así porque el señor Jeavons no entiende los números.

He aquí una famosa historia llamada *El Problema de Monty Hall*, que he incluido en este libro porque ilustra lo que quiero decir.

Había una columna titulada «Pregúntale a Marilyn» en una revista llamada *Parade*, en Estados Unidos. Y esa columna la escribía Marilyn vos Savant y en la revista se decía que tenía el mayor coeficiente intelectual del mundo según el *Libro Guinness de los Récords*. En la columna respondía a preguntas sobre matemáticas enviadas por los lectores. En septiembre de 1990 envió la siguiente pregunta Craig F. Whitaker, de Columbia, Maryland [...]:

«Estás en un concurso en la televisión. En este concurso la idea es ganar como premio un coche. El locutor del programa te enseña tres puertas. Dice que hay un coche detrás de una de las puertas y que detrás de las otras dos hay cabras. Te pide que elijas una puerta. Tú eliges una puerta, que no se abre todavía. Entonces, el locutor abre una de las puertas que tú no has elegido y muestra una cabra (porque él sabe lo que hay detrás de las puertas). Entonces dice que tienes una última oportunidad de cambiar de opinión antes de que las puertas se abran y consigas un coche o una cabra. Te pregunta si quieres cambiar de idea y elegir la otra puerta sin abrir. ¿Qué debes hacer?».

Marilyn vos Savant dijo que siempre debías cambiar y elegir la última puerta, porque las posibilidades de que hubiese un coche detrás de esa puerta eran de 2 sobre 3.

Pero, si usas la intuición, decides que las posibilidades son de 50 y 50, porque crees que hay igual número de posibilidades de que el coche esté detrás de cualquiera de las puertas.

Mucha gente escribió a la revista para decir que Marilyn vos Savant se equivocaba, incluso después de que ella explicara detalladamente por qué tenía razón. [...]

MARK HADDON

Demuestra que la respuesta correcta a *El problema de Monty Hall* es la que dio Marilyn vos Savant.

Si la puerta elegida tenía una cabra detrás, y esto ocurre en dos de los tres casos, hay dos posibilidades: mantener la opción y ganar una cabra, o cambiarla y elegir la otra puerta (la que no se ha abierto), donde estará el coche.

Si la puerta elegida tenía detrás el coche también hay dos posibilidades: mantener la opción y ganarlo, o cambiarla y elegir la otra puerta, en la que hay una cabra.

Por tanto, si se cambia de puerta dos de las tres veces se gana el coche.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Calcula el resultado de estas operaciones.

a) $10 \cdot 9!$
b) $10! - 9!$
c) $4! + 5!$
d) $10! \cdot 9!$

a) $10 \cdot 9! = 10! = 3.628.800$
b) $10! - 9! = 9! \cdot (10 - 1) = 9! \cdot 9 = 3.265.920$
c) $4! + 5! = 4! \cdot (1 + 5) = 4! \cdot 6 = 144$
d) $10! \cdot 9! = 1.316.818.944.000$

002 Haz estas operaciones.

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5}$
c) $\binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3}$
b) $\binom{10}{6} + \binom{9}{6}$
d) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = \dfrac{8!}{5! \cdot 3!} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

b) $\binom{10}{6} + \binom{9}{6} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!} + \dfrac{9!}{6! \cdot 3!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 + 84 = 294$

c) $\binom{5}{4} + \binom{10}{5} - \binom{8}{7} - \binom{9}{3} = \dfrac{5!}{4! \cdot 1!} + \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} - \dfrac{8!}{7! \cdot 1!} - \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} =$
$= 5 + 252 - 8 - 84 = 165$

d) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = 2^{10} = 1.024$

003 Hemos alquilado un palco en el teatro con 6 asientos. ¿De cuántas formas podemos sentarnos mis padres, mi hermana y yo?

$V_{6,\,4} = \dfrac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ formas

004 Con 14 bolas rojas, 13 azules, 12 naranjas y 11 blancas, ¿cuántos collares diferentes de 10 bolas podemos hacer?

$VR_{50,\,10} = 50^{10}$ collares

005 ¿Cuántas formas hay de ponerse 5 anillos, uno en cada dedo de la mano?

$P_5 = 5! = 120$ formas

006 **Con 4 botes de pintura: amarilla, azul, roja y blanca, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes realizar?**

$$C_{4,\,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ mezclas}$$

ACTIVIDADES

001 **Describe tres experimentos aleatorios y otros tres deterministas.**

Respuesta abierta.

Experimentos aleatorios: lanzar una moneda y anotar el resultado de la cara superior; extraer una de las cinco bolas distintas de una urna y anotar su color, y hacer girar una ruleta numerada del 1 al 7 y anotar el número en el que se detiene.

Experimentos deterministas: hallar el volumen de agua desplazado por un objeto en un recipiente; medir el tiempo necesario para realizar un trayecto a una velocidad constante, y calcular la altura alcanzada por un proyectil lanzado verticalmente.

002 **Indica los sucesos elementales y el espacio muestral de cada uno de los experimentos aleatorios de la actividad anterior.**

Respuesta abierta.

Los sucesos elementales del primer experimento son: {cara} y {cruz}

El espacio muestral es: E = {cara, cruz}

Los sucesos elementales del segundo experimento son: {blanca}, {amarilla}, {azul}, {roja} y {negra}

El espacio muestral es: E = {blanca, amarilla, azul, roja, negra}

Los sucesos elementales del tercer experimento son: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} y {7}

El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

003 **Halla experimentos aleatorios que tengan:**

a) Cuatro sucesos elementales.

b) Seis sucesos elementales.

Respuesta abierta.

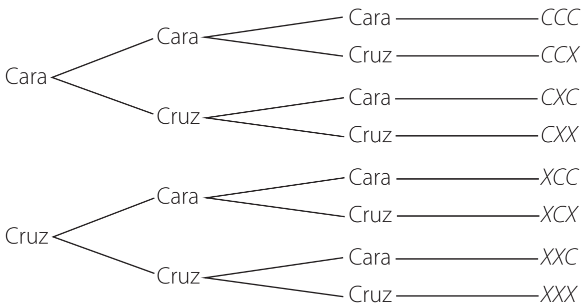
a) Lanzar un dado tetraédrico y anotar el resultado de la cara inferior.

b) Elegir una de las tarjetas de un sobre en el que hay una tarjeta de cada uno de estos colores: amarillo, naranja, verde, azul, violeta y marrón.

004 **Razona por qué no se puede encontrar ningún experimento aleatorio con un solo suceso elemental.**

Si solo hay un suceso elemental, entonces el espacio muestral tiene un único elemento, es decir, solo hay un resultado posible. Por tanto, el experimento es determinista, y no aleatorio.

005 **Con ayuda de un diagrama de árbol, calcula el espacio muestral asociado al experimento aleatorio que consiste en lanzar tres monedas y anotar el número de caras y cruces.**



El espacio muestral es: $E = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$

006 **En el experimento aleatorio que consiste en lanzar 3 monedas, encuentra dos sucesos compatibles y dos incompatibles.**
Escribe dos sucesos seguros y dos imposibles.

Respuesta abierta.

Dos sucesos compatibles son: «Obtener cara en una moneda» y «Obtener cruz en una moneda».

Dos sucesos incompatibles son: «Obtener tres caras» y «Obtener cruz en una moneda».

Dos sucesos seguros son: «Obtener cara o cruz en cada moneda» y «Obtener 0, 1, 2 o 3 cruces».

Dos sucesos imposibles son: «Salir un número par» y «Salir un as».

007 **Al extraer una carta de una baraja española, expresa estos sucesos en forma de uniones e intersecciones.**

a) A = «Salir una figura de copas» **b) B = «Salir una sota o bastos»**

a) $A = \{\text{Salir la sota de copas}\} \cup \{\text{Salir el caballo de copas}\} \cup \{\text{Salir el rey de copas}\}$

b) $B = \{\text{Salir una sota}\} \cup \{\text{Salir una carta de bastos}\}$

008 **Pon un ejemplo y comprueba las siguientes igualdades.**

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$**

Respuesta abierta.

En el experimento que consiste en lanzar un dado consideramos los sucesos:

$A = \{1, 2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $C = \{1, 3, 5\}$

a) $A \cap (B \cup C) = A \cap \{1, 2, 3, 5\} = \{1, 2\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2\} \cup \{1\} = \{1, 2\}$

b) $A \cup (B \cap C) = A \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

009 **Lanzamos 2 monedas y contamos el número de caras.**

a) Describe el espacio muestral.

b) ¿Podrías asignarle alguna probabilidad a los sucesos elementales?

a) El espacio muestral es: $E = \{CC, CX, XC, XX\}$

b) La probabilidad de obtener una cara o una cruz en una moneda es igual. Repartimos la probabilidad total entre los sucesos elementales y obtenemos:

$$P(CC) = \frac{1}{4} \qquad P(CX) = \frac{1}{4}$$

$$P(XC) = \frac{1}{4} \qquad P(XX) = \frac{1}{4}$$

010 **En un llavero hay 3 llaves de las que solo una llave abre un cofre.**

a) ¿Qué probabilidad hay de abrir en un intento?

b) ¿Y de abrir en tres intentos o menos?

a) $P(\text{Abrir en un intento}) = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{Abrir en tres intentos o menos}) = 1$

011 **Se lanza un dado de 6 caras donde hay marcados tres 1, dos X y un 2.**

Calcula la probabilidad de estos sucesos.

a) «Salir 1» b) «Salir X» c) «Salir 2»

a) $P(\text{Salir } 1) = \frac{1}{2}$ b) $P(\text{Salir X}) = \frac{1}{3}$ c) $P(\text{Salir } 2) = \frac{1}{6}$

012 **De 20 alumnos hay que elegir a 3 representantes para formar un grupo de trabajo. Calcula la probabilidad de que los representantes sean Marta, Julia y Rodrigo.**

$$C_{20,\,3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1.140$$

$$P(\text{Salir Marta, Julia y Rodrigo}) = \frac{1}{1.140} = 0{,}00088$$

013 **En una empresa de rodamientos tienen una máquina que fabrica arandelas.**

Diseña un método para calcular la probabilidad de que la máquina fabrique una arandela que sea defectuosa.

Se examina un número grande de arandelas para ver cuántas son defectuosas y se apuntan las frecuencias absolutas. Se calculan las frecuencias relativas para observar su tendencia y asignar la probabilidad de que la máquina fabrique una arandela defectuosa.

014 Al lanzar un dado se han obtenido estos resultados.

	1	2	3	4	5	6
f_i	51	48	52	50	49	102

¿Qué conclusión puedes deducir?

La frecuencia relativa del último valor es aproximadamente el doble de las demás; por tanto, el dado está trucado de modo que el suceso «Salir 6» tenga el doble de probabilidad que el resto de los sucesos elementales.

Resultados	f_i	h_i
1	51	0,14
2	48	0,14
3	52	0,15
4	50	0,14
5	49	0,14
6	102	0,29
	$N = 352$	

015 Si $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$; calcula.

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ c) $P(A - B)$ d) $P(\overline{B} - A)$

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}8$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1$

d) $P(\overline{B} - A) = P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

016 Razona las siguientes afirmaciones.

a) Si $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}45$; los sucesos A y B son compatibles.

b) Si $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}4$; A y B son contrarios.

a) $P(A) + P(B) > 1 \rightarrow P(A \cap B) \neq 0 \rightarrow A$ y B son sucesos compatibles.

b) $P(A) + P(B) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(B) \rightarrow A$ y B son sucesos contrarios.

017 En una oficina hay 8 chicos y 9 chicas. De ellos, 4 chicos y 6 chicas llevan gafas. Si escogemos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chica, sabiendo que lleva gafas. b) Lleve gafas, sabiendo que es chico.

$A =$ «Ser chica» $B =$ «Ser chico» $G =$ «Llevar gafas»

a) $P(A/G) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ b) $P(G/B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

018 En un panel electrónico hay 4 interruptores, de los que solo uno de ellos enciende una luz. Halla la probabilidad de acertar con el interruptor correcto:

a) En el primer intento.

b) En el segundo intento.

c) En el tercer intento.

d) En el cuarto intento.

a) $P(A_1) = \dfrac{1}{4}$

b) $P(A_2/\overline{A_1}) = \dfrac{1}{3}$

c) $P(A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \dfrac{1}{2}$

d) $P(A_4/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1$

019 En una oficina hay 8 chicos y 9 chicas. De ellos, 4 chicos y 6 chicas llevan gafas. Si escogemos un trabajador al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a) Sea chica y no lleve gafas.

b) No lleve gafas y sea chico.

$A =$ «Ser chica» $\quad B =$ «Ser chico» $\quad G =$ «Llevar gafas»

a) $P(A \cap \overline{G}) = P(A) \cdot P(\overline{G}/A) = \dfrac{9}{17} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{3}{17}$

b) $P(\overline{G} \cap B) = P(\overline{G}) \cdot P(B/\overline{G}) = \dfrac{7}{17} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{17}$

020 En un panel electrónico hay 4 interruptores, de los que solo uno de ellos enciende una luz. Consideramos el experimento aleatorio que consiste en anotar el número de interruptores que necesito pulsar para encender la luz. Describe el espacio muestral y calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

$E =$ {un conmutador, dos conmutadores, tres conmutadores, cuatro conmutadores}

$P(\text{un conmutador}) = P(A_1) = \dfrac{1}{4}$

$P(\text{dos conmutadores}) = P(\overline{A_1} \cap A_2/\overline{A_1}) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}$

$P(\text{tres conmutadores}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}/\overline{A_1} \cap A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$P(\text{cuatro conmutadores}) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}/\overline{A_1} \cap \overline{A_3}/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_4/\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) =$

$= \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$

021 Completa la siguiente tabla de contingencia, explicando cómo obtienes los datos que faltan.

	Fuma	No fuma	
Hombre	60	50	110
Mujer	45	45	90
	105	95	200

$60 + 45 = 105$ fumadores

$60 + 50 = 110$ hombres

$200 - 110 = 90$ mujeres

$90 - 45 = 45$ mujeres que no fuman

$50 + 45 = 95$ no fumadores

022 Utilizando la tabla de la actividad anterior, calcula las siguientes probabilidades.

a) Al elegir una persona, ¿qué probabilidad hay de que sea fumadora?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar no fume y sea mujer?

c) Si la persona fuma, ¿qué probabilidad hay de que sea un hombre?

$A =$ «Ser hombre» $\quad B =$ «Ser mujer» $\quad F =$ «Ser fumador»

a) $P(F) = \dfrac{105}{200} = \dfrac{21}{40}$ $\quad$ b) $P(\overline{F} \cap B) = \dfrac{45}{200} = \dfrac{9}{40}$ $\quad$ c) $P(A/F) = \dfrac{60}{105} = \dfrac{4}{7}$

023 **Describe tres experimentos aleatorios, y determina sus sucesos elementales y el espacio muestral de cada uno.**

Respuesta abierta.

Si se tienen cinco tarjetas con las vocales en una bolsa y se extrae una de ellas; los sucesos elementales son: {a}, {e}, {i}, {o} y {u}, y el espacio muestral es: $E = \{a, e, i, o, u\}$

Se lanza un dado con las caras de distintos colores y se anota el color de la cara superior; los sucesos elementales son: {blanco}, {azul}, {verde}, {amarillo}, {rojo} y {negro}, y el espacio muestral es: E = {blanco, azul, verde, amarillo, rojo, negro}

En una caja se tienen las fichas de un damero y se extrae una de ellas; los sucesos elementales son: {blanca} y {negra}, y el espacio muestral es: E = {blanca, negra}

024 **Indica experimentos aleatorios que tengan:**

a) Tres sucesos elementales. **b) Doce sucesos elementales.**

Respuesta abierta.

a) Se extrae una bola de una urna en la que hay bolas azules, rojas y amarillas.

b) Se extrae una tarjeta de una caja en la que hay tarjetas numeradas del 1 al 12.

025 **Si un experimento aleatorio tiene dos sucesos elementales, A y B:**

a) ¿Cuántos sucesos tiene el experimento?

b) Describe la unión, la intersección y los contrarios de los sucesos A y B.

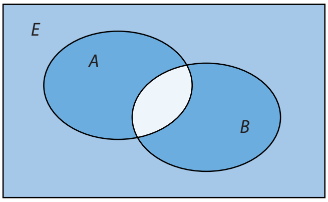
a) El experimento tiene tres sucesos: A, B y el suceso seguro E.

b) $A \cup B = E$ $\quad A \cap B = \varnothing$ $\quad \overline{A} = B$ $\quad \overline{B} = A$

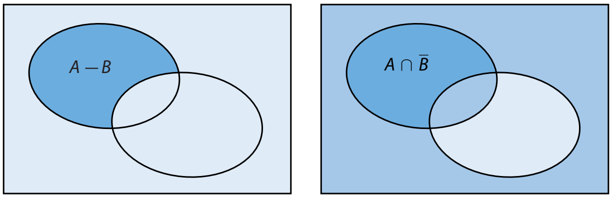
026 **A partir del gráfico, comprueba las siguientes igualdades de sucesos.**

a) $A - B = A \cap \overline{B}$ **c)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

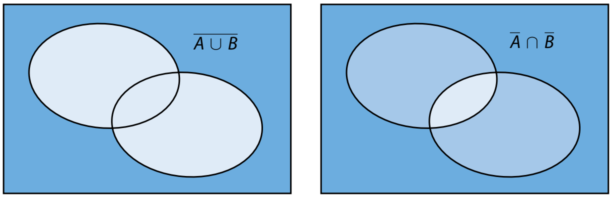
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **d)** $\overline{\overline{A}} = A$



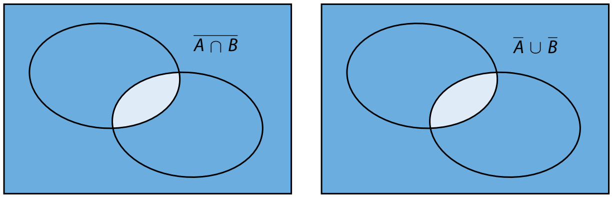
a)



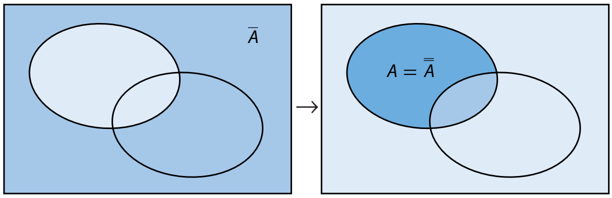
b)



c)



d)



027 ●○○ En el experimento que consiste en lanzar 3 veces una moneda, consideramos los siguientes sucesos.

$A =$ «Salir dos cruces» $\quad C =$ «La última es una cruz»
$B =$ «Salir alguna cara» $\quad D =$ «La primera es una cara»

Describe los casos elementales que componen los sucesos.

a) $A \cap C$
b) $A - B$
c) $A \cup C$
d) $B \cap \overline{D}$
e) $C \cap D$
f) $\overline{C} \cup \overline{D}$

a) $A \cap C = \{CXX, XCX\}$
b) $A - B = \varnothing$
c) $A \cup C = \{CXX, XCX, XXC, CCX, XXX\}$
d) $B \cap \overline{D} = \{XCC, XCX, XXC\}$
e) $C \cap D = \{CCX, CXX\}$
f) $\overline{C} \cup \overline{D} = E$

028 ●○○ Se lanzan tres monedas y se consideran los sucesos:

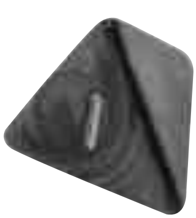
$A =$ «Salir dos caras» $\quad B =$ «Salir tres cruces» $\quad C =$ «Salir una cara»

Define verbalmente estos sucesos.

a) $\overline{C}$
b) $\overline{A} \cup B$
c) $C \cap \overline{B}$

a) «Salir dos caras, tres o ninguna»
b) «Salir una cara, tres o ninguna»
c) «Salir una cara»

029 ●○○ Lanzamos tres veces un dado de cuatro caras, anotando el resultado de la cara oculta, y consideramos los sucesos.



$A =$ «Salir, al menos, un 1»
$B =$ «No salir un 2»
$C =$ «Los tres números sumen menos que 8»
$D =$ «Salir más de un 3»
$E =$ «Salir menos de dos números 4»

Describe los sucesos contrarios de cada uno de los sucesos anteriores.

$\overline{A} =$ «No salir ningún número 1»
$\overline{B} =$ «Salir uno, dos o tres números 2»
$\overline{C} =$ «Los tres números sumen 8 o más»
$\overline{D} =$ «Salir uno o ningún número 3»
$\overline{E} =$ «Salir dos, tres o cuatro números 4»

030 ●○○ En una caja tenemos carteles con las siguientes letras.

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u$$

a) En el experimento aleatorio consistente en extraer uno de los carteles, describe los sucesos indicando los sucesos elementales que los componen.

$V =$ «Vocal»
$C =$ «Consonante»
$A =$ «Letra alta como b o f»
$B =$ «Letra baja como g»
$M =$ «Letra mediana como a o c»

b) Enumera los sucesos elementales que tiene cada uno de estos sucesos.

$A \cup B$	$M \cap A$
$M \cup V$	$\overline{A}$
$\overline{C} \cup A \cup B$	$M \cap V$
$\overline{A \cap C}$	$C - A$

c) Comprueba las propiedades.

$\overline{C \cap M} = \overline{C} \cup \overline{M}$
$\overline{C \cup M} = \overline{C} \cap \overline{M}$

a) $V = \{a, e, i, o, u\}$
$C = \{b, c, d, f, g, h, j\}$
$A = \{b, d, f, h\}$
$B = \{g, j\}$
$M = \{a, c, e, i, o, u\}$

b) $A \cup B = \{b, d, f, g, h, j\}$

$M \cap A = \varnothing$

$M \cup V = \{a, c, e, i, o, u\}$

$\overline{A} = \{a, c, e, g, i, j, o, u\}$

$\overline{C} \cup A \cup B = \{a, b, d, e, f, g, h, i, j, o, u\}$

$M \cap V = \{a, e, i, o, u\}$

$\overline{A \cap C} = \{a, c, e, g, i, j, o, u\}$

$C - A = \{c, g, j\}$

c) $C \cap M = \{C\} \rightarrow \overline{C \cap M} = \{a, b, d, e, f, g, h, i, j, o, u\}$

$$\left.\begin{array}{r}\overline{C} = \{a, e, i, o, u\}\\ \overline{M} = \{b, d, f, g, h, j\}\end{array}\right\} \rightarrow \overline{C} \cup \overline{M} = \{a, b, d, e, f, g, h, i, j, o, u\}$$

$C \cup M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u\} \rightarrow \overline{C \cup M} = \varnothing$

$$\left.\begin{array}{r}\overline{C} = \{a, e, i, o, u\}\\ \overline{M} = \{b, d, f, g, h, j\}\end{array}\right\} \rightarrow \overline{C} \cap \overline{M} = \varnothing$$

031 Un experimento consiste en sacar una bola de una urna con 4 bolas rojas, numeradas del 1 al 4; 5 azules, numeradas del 1 al 5, y 3 negras, numeradas del 1 al 3.

R = «Salir bola roja»
A = «Salir bola azul»
N = «Salir bola negra»
I = «Salir número impar»
P = «Salir número par»

Describe los sucesos.

a) $R \cup P$
b) $I \cup P$
c) $\overline{P} \cap N$
d) $R \cap I$
e) $\overline{N}$
f) $\overline{R \cup A}$

a) $R \cup P = \{R1, R2, R3, R4, A2, A4, N2\}$

b) $I \cup P = \{R1, R2, R3, R4, A1, A2, A3, A4, A5, N1, N2, N3\}$

c) $\overline{P} \cap N = \{N1, N3\}$

d) $R \cap I = \{R1, R3\}$

e) $\overline{N} = \{R1, R2, R3, R4, A1, A2, A3, A4, A5\}$

f) $\overline{R \cup A} = \{N1, N2, N3\}$

032 En una caja hay 5 botones rojos, 3 azules y 7 verdes. Si sacamos un botón al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

A = «Salir botón rojo»
B = «Salir botón verde o azul»
C = «No salir botón azul»

$P(A) = \dfrac{1}{3}$ $\quad P(B) = \dfrac{2}{3}$ $\quad P(C) = \dfrac{4}{5}$

033 Una baraja española se compone de 40 cartas. Llamamos figuras a las sotas, los caballos y los reyes. En el experimento consistente en sacar una carta de la baraja, consideramos A = «Salir un as», C = «Salir copas» y F = «Salir una figura».

Determina las siguientes probabilidades.

$P(A)$ $\quad P(C)$ $\quad P(F)$
$P(A \cap F)$ $\quad P(A \cup C)$ $\quad P(C \cap F)$
$P(\overline{A} \cap F)$ $\quad P(\overline{A} \cap C)$ $\quad P(A \cup \overline{C})$

$P(A) = \dfrac{1}{10}$ $\quad P(C) = \dfrac{1}{4}$ $\quad P(F) = \dfrac{3}{10}$

$P(A \cap F) = 0$ $\quad P(A \cup C) = \dfrac{13}{40}$ $\quad P(C \cap F) = \dfrac{3}{40}$

$P(\overline{A} \cap F) = \dfrac{3}{10}$ $\quad P(\overline{A} \cap C) = \dfrac{9}{40}$ $\quad P(A \cup \overline{C}) = \dfrac{31}{40}$

034 En una empresa disponen de los tipos y las marcas de vehículos reflejados en la tabla.

	Opel	Renault	Seat
Turismo	3	6	5
Furgoneta	1	2	8

Si las llaves están en una caja y elegimos una llave al azar, determina cuál será la probabilidad de que:

a) Las llaves sean de un vehículo de la marca Seat.
b) Las llaves sean de una furgoneta de la marca Renault.
c) Las llaves pertenezcan a un turismo que no sea Opel.
d) Las llaves no sean de una furgoneta, ni de un vehículo de la marca Seat.

a) $P(S) = \dfrac{13}{25}$

b) $P(F \cap R) = \dfrac{2}{25}$

c) $P(T \cap \overline{O}) = \dfrac{11}{25}$

d) $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = \dfrac{9}{25}$

035 El 35 % de los vecinos de un barrio practica algún deporte (D).
El 60 % está casado (C) y el 25 % no está casado, ni hace deporte.

Describe, en función de D y C, los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades.

a) Está casado y practica deporte.
b) Practica deporte, pero no está casado.
c) Está casado, pero no practica deporte.
d) No está casado.
e) No está casado, ni practica deporte.

a) $C \cap D$

$P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0{,}25 \rightarrow P(C \cup D) = 0{,}75$

$\rightarrow P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C \cup D) = 0{,}6 + 0{,}35 - 0{,}75 = 0{,}2$

b) $D \cap \overline{C}$

$P(D \cap \overline{C}) = P(D) - P(D \cap C) = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$

c) $C \cap \overline{D}$

$P(C \cap \overline{D}) = P(C) - P(C \cap D) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

d) $\overline{C}$

$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

e) $\overline{C} \cap \overline{D}$

$P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0{,}25$

036 ●●○

Un vidente predice que, en el próximo sorteo de lotería, el primer premio va a ser un número con tres cifras distintas de 0 y, además, todas serán diferentes. Juan ha comprado el número 00175, Belén ha comprado 13340 y Andrés ha comprado 00643.

En el caso de que el vidente esté en lo cierto, di cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos.

a) Juan resulte afortunado.
b) Belén acierte la terminación.
c) Andrés acierte las tres primeras cifras (006).

a) $\dfrac{1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6} = \dfrac{1}{21.168}$

b) $\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6} = \dfrac{1}{7}$

c) Podemos hacer: $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ números de tres cifras distintas de cero.

Hay $\dbinom{5}{2} = 10$ formas distintas de colocar 2 ceros en un número de 5 cifras.

Si el vidente tiene razón, el número de posibilidades es: $10 \cdot 504 = 5.040$ posibilidades, y de ellas 56 posibilidades comienzan por 006,

luego la probabilidad es: $\dfrac{56}{5.040} = \dfrac{1}{90}$

037 ●●○

El espacio muestral de un experimento aleatorio se compone de los sucesos elementales *a*, *b*, *c* y *d*.

Sabiendo que estos sucesos son equiprobables y que:

$$M = \{a\} \qquad N = \{b\} \qquad P = \{c, d\} \qquad Q = \{b, c, d\}$$

Calcula las probabilidades de los sucesos:

a) M b) $M \cup Q$ c) P d) $\overline{P} \cup N$ e) $M \cap Q$ f) $\overline{Q} \cup P$

a) $P(M) = \dfrac{1}{4}$

b) $P(M \cup Q) = 1$

c) $P(P) = \dfrac{1}{2}$

d) $P(\overline{P} \cup N) = \dfrac{1}{2}$

e) $P(M \cap Q) = 0$

f) $P(\overline{Q} \cup P) = \dfrac{3}{4}$

038 ●●○

Se lanzan dos dados y se calcula la diferencia entre los resultados mayor y menor. Halla las siguientes probabilidades.

a) La diferencia sea 0.
b) La diferencia sea 1.
c) La diferencia sea 2.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia sea 3 o más?
e) ¿Y de que la diferencia se encuentre entre 2 y 4, ambos números incluidos?

a) $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

c) $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

d) $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

e) $\dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$

039 ●●○

Los médicos de un hospital hacen guardias tres días a la semana.

a) Calcula la probabilidad de que un médico haga guardia el lunes, el martes y el miércoles.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que libre el fin de semana (sábado y domingo)?

c) ¿Y de que esté de guardia tres días alternos, es decir, con un día de descanso entre la primera y la segunda guardias, y otro día de descanso entre la segunda y la tercera?

a) $P(\text{Hacer guardia lunes, martes y miércoles}) = \dfrac{1}{C_{7,\,3}} = \dfrac{1}{35}$

b) $P(\text{No hacer guardia sábado y domingo}) = 1 - P(\text{Hacer guardia sábado, domingo y otro día de la semana}) = 1 - \dfrac{5}{35} = \dfrac{6}{7}$

c) $P(\text{Hacer guardia lunes, miércoles y viernes}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia lunes, miércoles y sábado}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia lunes, jueves y sábado}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia lunes, viernes y domingo}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia martes, jueves y sábado}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia martes, jueves y domingo}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia martes, viernes y domingo}) +$
$+ P(\text{Hacer guardia miércoles, viernes y domingo}) = \dfrac{8}{35}$

040 ●●○

Sacamos una ficha del dominó. Determina las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Que la ficha obtenida tenga un 1.

b) Que la suma de sus puntos sea mayor que 4.

c) Que la ficha se pueda encadenar a la ficha 3:5.

Imagina que hemos sacado una ficha y ha resultado ser la ficha 2:6. ¿Cuál es la probabilidad de sacar otra ficha y de que no se pueda encadenar a esta?

a) $\dfrac{7}{28} = \dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{17}{28}$ c) $\dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$

La probabilidad pedida es: $\dfrac{15}{28}$

041 ●○○

En un experimento aleatorio sabemos que:

$$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(A \cap B) = 0{,}2$$

Calcula.

a) $P(\overline{A})$
b) $P(A \cup B)$
c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$
d) $P(A - B)$
e) $P(\overline{B} - A)$
f) $P(\overline{A \cup B})$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,8$

d) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4$

e) $P(\overline{B} - A) = P(\overline{B}) - P(\overline{B} \cap A) = 1 - P(B) - \left[P(A) - P(A \cap B)\right] = 1 - P(A \cup B) = 0,1$

f) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,1$

042 ●○○ Si A y B son incompatibles y $P(A) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,9$; halla:

$P(B)$ $\qquad$ $P(A - B)$ $\qquad$ $P(\overline{A} \cap B)$

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,3$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,3$

043 ●○○ Determina $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$, si:

$P(A) = 0,6$ $\qquad$ $P(B) = 0,5$ $\qquad$ $P(A \cap B) = 0,3$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,8$

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0,7$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,2$

044 ●○○ Halla $P(A)$, $P(B)$ y $P(\overline{A} \cap B)$, si:

$P(A \cup B) = 0,8$ $\qquad$ $P(\overline{B}) = 0,6$ $\qquad$ $P(A \cap B) = 0,3$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 0,4$

$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0,7$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,1$

045 ●○○ ¿Es posible que haya dos sucesos tales que $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,7$?

No es posible.

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0,7 \rightarrow 1 - P(A \cap B) = 0,7 \rightarrow P(A \cap B) = 0,3$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,8 - 0,3 = 1,1 > 1$

046 ●○○ ¿Es posible que haya dos sucesos tales que $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cap B) = 0,3$? ¿Cómo son esos sucesos?

Sí, es posible, pues: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,6 - 0,3 = 0,6$.

El suceso A está contenido en el suceso B.

047 ¿Es posible encontrar dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6$?

Sí, es posible.

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0{,}6 \rightarrow P(A \cup B) = 0{,}4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

048 Si $P(A) = 0{,}7$ y $P(B) = 0{,}4$; ¿pueden ser incompatibles?

No, porque si $P(A \cap B) = 0 \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 1$.

049 Si $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}3$; ¿pueden ser incompatibles? En caso afirmativo, ¿cuánto tiene que valer $P(A \cup B)$?

Sí, pueden ser incompatibles: $P(A) + P(B) = 0{,}6 + 0{,}3 < 1$

Entonces, resulta que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}9$

050 Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B)$.

a) Decide cómo son los sucesos A y B.

b) Calcula $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

El enunciado indica que $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B)$, y por otra parte, sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

De ambas igualdades obtenemos que $P(B) = 0$ y $P(A \cap B) = 0$.

a) Los sucesos A y B son disjuntos, pues la probabilidad de su intersección es cero.

b) $P(A \cup B) = P(A)$ $\qquad P(A \cap B) = 0$

051 Si $E = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ es el espacio muestral de un experimento aleatorio, ¿puede suceder que $P(S_1) = \frac{1}{5}$, $P(S_2) = \frac{2}{3}$, $P(S_3) = \frac{1}{4}$ y $P(S_4) = \frac{1}{6}$?

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1$$

No puede suceder, porque la probabilidad no puede valer más de 1.

052 Discute si estás de acuerdo con el razonamiento.

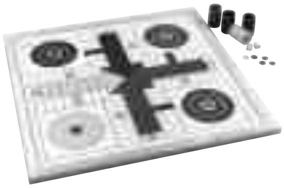
«Cuando lanzo dos dados y sumo los resultados, para obtener 11 necesito un 5 y un 6. Si deseo conseguir 12 es preciso que aparezcan dos 6. Es decir, hay un caso favorable para cada uno de los sucesos, luego la probabilidad es la misma».

Comprueba el resultado anterior, calculando su probabilidad de manera experimental: lanza un dado 200 veces (o cinco dados 40 veces) y estudia cuál de los dos sucesos sale más veces.

El razonamiento no es correcto, porque hay dos formas de obtener un 5 y un 6; por tanto, la probabilidad de obtener 11 es el doble que la de obtener 12.

$P(\text{Obtener } 11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ $\qquad P(\text{Obtener } 12) = \frac{1}{36}$

053 ●●○ Un jugador de parchís fabrica un dado trucado, donde todos los números tengan la misma probabilidad de salir, salvo el 5, que quiere que salga dos veces más que el 1, el 2, el 3 y el 4, y el 6, que quiere que salga el doble de veces que el 5. ¿Cuál es la probabilidad de cada número?



$P(\text{Salir } 1) = x \qquad P(\text{Salir } 3) = x \qquad P(\text{Salir } 5) = 2x$

$P(\text{Salir } 2) = x \qquad P(\text{Salir } 4) = x \qquad P(\text{Salir } 6) = 4x$

$$P(E) = 1 \rightarrow x + x + x + x + 2x + 4x = 1 \rightarrow 10x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{10}$$

Entonces: $P(\text{Salir } 1) = \frac{1}{10} \qquad P(\text{Salir } 2) = \frac{1}{10}$

$P(\text{Salir } 3) = \frac{1}{10} \qquad P(\text{Salir } 4) = \frac{1}{10}$

$P(\text{Salir } 5) = \frac{1}{5} \qquad P(\text{Salir } 6) = \frac{2}{5}$

054 ●●○ En un montón de cartas hemos determinado que

$$P(\text{Oros}) = \frac{5}{12},\ P(\text{Copas}) = \frac{1}{4},\ P(\text{Espadas}) = \frac{1}{3} \text{ y } P(\text{Bastos}) = 0$$

¿Cuántas cartas de cada palo hay en el montón?

$P(\text{Oros}) = \frac{5}{12} \qquad P(\text{Copas}) = \frac{1}{4} = \frac{3}{12} \qquad P(\text{Espadas}) = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

El número de cartas del montón es proporcional a 12, luego si suponemos que se trata de una sola baraja, puede haber 12, 24 o 36 cartas y, por tanto, habrá 5, 3 y 4; 10, 6 y 8; o 15, 9 y 12 cartas de oros, copas y espadas, respectivamente. No hay cartas de bastos, porque la suma de las probabilidades de oros, copas y espadas es 1.

055 ●○○ Vamos a extraer una bola de una urna que contiene 3 bolas rojas, 2 azules y 5 verdes, numeradas del 1 al 3, del 1 al 2 y del 1 al 5, respectivamente.

Consideremos los sucesos.

$R =$ «Salir bola roja»

$A =$ «Salir bola azul»

$V =$ «Salir bola verde»

$S_2 =$ «Salir bola con un 2»

$S_3 =$ «Salir bola con un 3»

$S_5 =$ «Salir bola con un 5»

Determina las probabilidades.

a) $P(R/S_3)$
b) $P(\overline{V}/S_2)$
c) $P(S_5/V)$
d) $P(A/S_2)$
e) $P(S_3/R)$
f) $P(V/S_5)$
g) $P(S_5 \cap V)$
h) $P(A \cap S_2)$

a) $P(R/S_3) = \frac{1}{2}$

b) $P(\overline{V}/S_2) = \frac{2}{3}$

c) $P(S_5/V) = \frac{1}{5}$

d) $P(A/S_2) = \frac{1}{3}$

e) $P(S_3/R) = \frac{1}{3}$

f) $P(V/S_5) = 1$

g) $P(S_5 \cap V) = P(V) \cdot P(S_5/V) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

h) $P(A \cap S_2) = P(A) \cdot P(S_2/A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

056 ●○○ A una excursión acuden niños, padres y profesores de dos colegios, como se indica en la tabla.

	Niños	Padres	Profesores
Colegio *A*	50	5	5
Colegio *B*	30	3	2

Si llamamos N = «Ser niño», P = «Ser padre», F = «Ser profesor», A = «Pertenecer al colegio A» y B = «Pertenecer al colegio B», calcula las probabilidades.

a) $P(P)$
b) $P(A)$
c) $P(A/N)$
d) $P(B/F)$
e) $P(P \cap B)$
f) $P(P/B)$

Comprueba si los sucesos P y B son independientes.

a) $P(P) = \frac{8}{95}$

b) $P(A) = \frac{60}{95} = \frac{12}{19}$

c) $P(A/N) = \frac{50}{80} = \frac{5}{8}$

d) $P(B/F) = \frac{2}{7}$

e) $P(P \cap B) = \frac{3}{95}$

f) $P(P/B) = \frac{3}{35}$

$P(P) \cdot P(B) = \frac{8}{95} \cdot \frac{35}{95} \neq \frac{3}{95} = P(P \cap B) \rightarrow P$ y B no son sucesos independientes.

057 ●●○ Una empresa de transporte tiene dos autobuses, A y B, y tres conductores, Diego (D), Elena (E) e Inés (I). Los viajes realizados por los conductores y los autobuses durante el último mes se han reflejado en la tabla.

	Diego	Elena	Inés
Autobús *A*	10	5	20
Autobús *B*	30	10	30

Durante uno de los viajes se produjo un accidente:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que condujera Elena?
b) ¿Y de que el autobús afectado fuera B?
c) Estudia si E y B son sucesos independientes.
d) Haz lo mismo con los sucesos I y A.

a) $P(E) = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}$ b) $P(B) = \frac{70}{105} = \frac{2}{3}$

c) $P(E \cap B) = \frac{10}{105} = \frac{2}{21} = P(E) \cdot P(B) \rightarrow E$ y B son sucesos independientes.

d) $P(I \cap A) = \frac{20}{105} = \frac{4}{21} \neq \frac{10}{21} \cdot \frac{1}{3} = P(I) \cdot P(A) \rightarrow I$ y A no son sucesos independientes.

058 Una urna contiene 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul.

a) Extraemos una bola, anotamos su color, la devolvemos a la urna, sacamos otra bola y anotamos su color. Halla las siguientes probabilidades.
- Que las dos bolas sean rojas.
- Que haya alguna bola azul.
- Que no haya ninguna bola verde.

b) Repetimos el experimento sin devolver la bola a la urna. Determina las mismas probabilidades.

Si sacáramos las dos bolas a la vez, ¿en cuál de las dos situaciones anteriores nos encontraríamos?

a) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\text{Al menos una bola azul}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$

$P(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

b) $P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$

$P(\text{Al menos una bola azul}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{3}$

$P(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Nos encontraríamos en la situación del apartado b), ya que si se sacan dos bolas a la vez no hay reemplazamiento como en el primer caso.

059 De una caja que contiene 3 fichas azules y 5 rojas sacamos 2 fichas. Determina las siguientes probabilidades.

a) Salgan 2 fichas azules.
b) Sean 2 fichas rojas.
c) La primera sea azul y la segunda roja.
d) Haya una ficha azul y otra roja.
e) La segunda sea roja, si la primera es azul.
f) La segunda sea roja, si la primera es roja.

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

c) $P(A_1 \cap R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

d) $P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$

e) $P(R_2/A_1) = \frac{P(A_1 \cap R_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{7}$

f) $P(R_2/R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}$

060 ●○○ **De una bolsa en la que tenemos 3 fichas azules y 5 rojas sacamos dos fichas con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:**

a) Las dos fichas sean azules.

b) Las dos fichas sean rojas.

c) La primera ficha sea azul y la segunda roja.

d) Haya una ficha azul y otra roja.

Al realizar el experimento con reemplazamiento, las dos extracciones son independientes:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

c) $P(A_1 \cap R_2) = P(A_1) \cdot P(R_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$

d) $P(A_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap A_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

061 ●●○ **Un examen tipo test consta de dos preguntas para las que se ofrecen cuatro posibles respuestas, de las que solo una es correcta.**
Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de acertar dos preguntas? ¿Y de no acertar ninguna? Resuélvelo considerando que el examen consta de cuatro preguntas.

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$

062 ●●○ ¿Cuál es la probabilidad de tener 15 aciertos en una quiniela de fútbol compuesta por 15 partidos? ¿Y de tener 14 aciertos?

$$P(15 \text{ aciertos}) = \frac{1}{3^{15}} = 0{,}000000069$$

$$P(14 \text{ aciertos}) = 15 \cdot \frac{1}{3^{14}} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}00000209$$

063 ●●○ De una baraja extraemos dos montones de cartas; en el primer montón hay 5 oros y 2 copas, y en el segundo montón hay 2 oros, 3 copas y 5 espadas.

Se saca una carta del primer montón y otra del segundo. Determina las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Salen dos cartas de oros.
b) Son dos cartas de copas.
c) Hay una carta de oros y otra de copas.
d) La segunda carta es de espadas.
e) La segunda carta es de espadas, sabiendo que la primera fue de copas.

a) $P(O_1 \cap O_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{7}$

b) $P(C_1 \cap C_2) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{35}$

c) $P(O_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap O_2) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{10} = \frac{19}{70}$

d) $P(E_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

e) $P(E_2/C_1) = \frac{1}{2}$, porque los sucesos son independientes.

064 ●○○ En un cajón tengo 3 calcetines rojos, 5 verdes y 8 negros. Si con la luz apagada saco un par, determina la probabilidad de que los calcetines sean de los colores que se indican en cada caso.

a) Ambos sean verdes.
b) Los dos sean del mismo color.
c) No haya ninguno rojo.
d) Si el primero que saqué resultó ser verde, el segundo también lo sea.
e) El primero es verde y el segundo es de cualquier otro color, excepto el verde.

a) $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) = \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{12}$

b) $P(R_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap V_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(V_1) \cdot P(V_2/V_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) =$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{2}{15} + \frac{5}{16} \cdot \frac{4}{15} + \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} = \frac{41}{120}$$

c) $P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2) = P(\overline{R}_1) \cdot P(\overline{R}_2/\overline{R}_1) = \frac{13}{16} \cdot \frac{12}{15} = \frac{13}{20}$

d) $P(V_2/V_1) = \frac{4}{15}$

e) $P(V_1 \cap R_2) + P(V_1 \cap N_2) = P(V_1) \cdot P(R_2/V_1) + P(V_1) \cdot P(N_2/V_1) =$

$$= \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{15} + \frac{5}{16} \cdot \frac{8}{15} = \frac{11}{48}$$

065 En una caja hay 3 fichas rojas y 1 ficha azul. Un juego consiste en sacar una ficha, anotar su color, devolverla a la caja y seguir sacando hasta el momento en que se hayan conseguido 2 fichas azules.

a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar con menos de cuatro extracciones?

b) ¿Y cuál es la probabilidad de sacar 5 fichas y no ganar?

a) $P(A \cap A) + P(A \cap R \cap A) + P(R \cap A \cap A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

b) $P(R \cap R \cap R \cap R \cap R) + 5P(A \cap R \cap R \cap R \cap R) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 + 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{128}$

066 En una urna hay 5 bolas rojas, 2 negras y un número indeterminado de bolas azules. Se sabe que la probabilidad de que, al sacar dos bolas, haya 1 bola roja y 1 bola azul es de $\frac{1}{3}$. Determina el número de bolas azules que hay en la urna.

Sea x el número de bolas azules de la urna.

$P(R_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(A_2/R_1) + P(A_1) \cdot P(R_2/A_1) = \frac{1}{3}$

$\rightarrow \frac{5}{7+x} \cdot \frac{x}{6+x} + \frac{x}{7+x} \cdot \frac{5}{6+x} = \frac{1}{3} \rightarrow 30x = 42 + 13x + x^2 \rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ x = 3 \end{cases}$

067 Para recibir las quejas de los clientes, una empresa telefónica dispone de una oficina atendida por tres empleados.

- El empleado A está exclusivamente dedicado a la atención a los clientes y los otros dos empleados realizan, además, otras tareas.
- El empleado A atiende al 60 % de los visitantes, B al 25 % y C al resto.
- El empleado más efectivo es A, que resuelve el 95 % de los problemas que le plantean los clientes, mientras que B solo resuelve el 80 % y C el 60 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no me atienda el empleado A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no me resuelvan el problema?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que me resuelvan el problema si no me atiende A?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no me resuelvan el problema si me atiende A?
e) Si no me han resuelto el problema, ¿cuál es la probabilidad de que me haya atendido B?

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,4$

b) $P(\overline{R}) = P(A) \cdot P(\overline{R}/A) + P(B) \cdot P(\overline{R}/B) + P(C) \cdot P(\overline{R}/C) =$
$= 0,6 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,4 = 0,14$

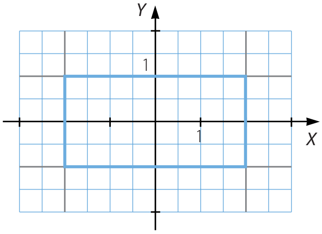
c) $P(R/\overline{A}) = \dfrac{P(R \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) \cdot P(R/B) + P(C) \cdot P(R/C)}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,25 \cdot 0,8 + 0,15 \cdot 0,6}{0,4} = 0,725$

d) $P(\overline{R}/A) = 0,05$

e) $P(B/\overline{R}) = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{R}/B)}{P(A) \cdot P(\overline{R}/A) + P(B) \cdot P(\overline{R}/B) + P(C) \cdot P(\overline{R}/C)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,2}{0,14} = 0,36$

PARA FINALIZAR...

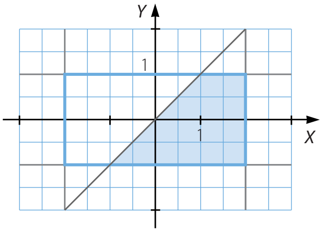
068 Se lanza un dardo sobre el rectángulo determinado por las rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 1$ en un sistema de ejes coordenados.



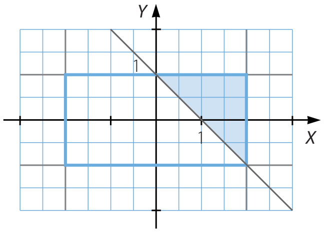
Calcula la probabilidad de que el dardo impacte sobre un punto que:

a) Tenga su abscisa mayor que su ordenada.
b) La suma de sus coordenadas sea mayor que 1.
c) El producto de sus coordenadas sea positivo.
d) La suma de los valores absolutos de sus coordenadas sea mayor que 1.

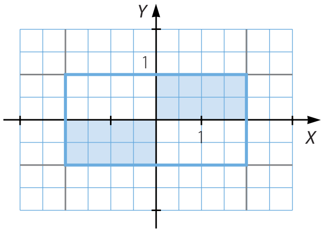
a) $P(\text{La abscisa es mayor que la ordenada}) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$



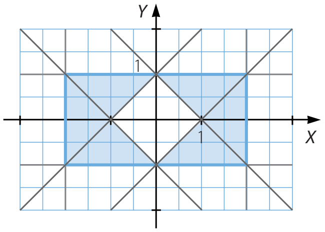
b) P(La suma de las coordenadas es mayor que 1) $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$



c) P(El producto de las coordenadas es positivo) $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$



d) P(La abscisa es mayor que la ordenada) $= \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$



069 **En la ecuación de segundo grado:**

$$x^2 + ax + b = 0$$

los coeficientes, a y b, son los posibles resultados al lanzar dos dados. Calcula la probabilidad de que la ecuación no tenga solución real.

Los resultados al lanzar dos dados son:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

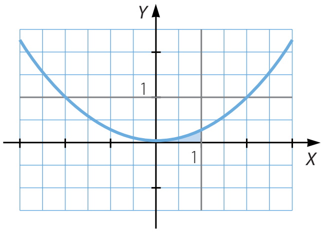
La ecuación de segundo grado no tiene solución si el discriminante es negativo:

$$\Delta = a^2 - 4b < 0 \rightarrow a^2 < 4b \rightarrow P(\text{No solución}) = \frac{17}{36}$$

070 **En la ecuación de segundo grado $x^2 + ax + b = 0$, los coeficientes, a y b, son dos números reales escogidos al azar en el intervalo [0, 1].**

Calcula la probabilidad de que tenga dos soluciones reales distintas.

La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas si el discriminante es positivo: $\Delta = a^2 - 4b > 0 \rightarrow a^2 > 4b$



$$\text{Área encerrada bajo la curva} = \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{Dos soluciones distintas}) = \frac{\text{Área favorable}}{\text{Área posible}} = \frac{\frac{1}{12}}{1} = \frac{1}{12}$$

071 **¿Cuál es el mínimo número de personas necesarias, para que la probabilidad de que, al menos, dos de ellas cumplan años el mismo día, sea superior al 50 %?**

Suponemos que el año tiene 365 días.

Si estudiamos un grupo de n personas, el número de casos posibles es 365^n.

$$P(n \text{ personas no cumplen años el mismo día}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

$$P(\text{Al menos dos personas del grupo de } n \text{ personas cumplen años el mismo día}) =$$
$$= 1 - P(n \text{ personas no cumplen años el mismo día}) =$$
$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

n	Probabilidad
5	0,027
10	0,12
15	0,25
20	0,41
25	0,57

n	Probabilidad
20	0,41
21	0,44
22	0,47
23	0,51

El mínimo número de personas es 23.

072 Tenemos dos urnas iguales, una con 25 bolas rojas y otra con 25 bolas negras. Cambiamos el número de bolas que queramos de una urna a otra. Si después se elige una urna al azar y se saca una bola:

¿Cómo distribuirías las bolas para que la probabilidad de sacar una bola roja sea la mayor posible? ¿Cuál es esa probabilidad?

U_1	U_2	Probabilidad
25 rojas	25 negras	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}=0{,}5$
25 rojas y 5 negras	20 negras	$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{12}=0{,}41$
25 rojas y 20 negras	5 negras	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{18}=0{,}22$
20 rojas y 5 negras	20 negras y 5 rojas	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}=0{,}5$
15 rojas y 5 negras	20 negras y 10 rojas	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{12}=\frac{13}{24}=0{,}54$
20 rojas	25 negras y 5 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}=\frac{7}{12}=0{,}58$
15 rojas	20 negras y 10 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{7}=\frac{9}{14}=0{,}64$
10 rojas	25 negras y 15 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8}=\frac{11}{16}=0{,}69$
5 rojas	25 negras y 20 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{9}=\frac{13}{18}=0{,}72$
1 roja	25 negras y 24 rojas	$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{49}=\frac{1}{2}\cdot\frac{73}{49}=\frac{73}{98}=0{,}74$

Observamos que, al cambiar las bolas negras de urna, la probabilidad de extraer una bola roja es menor que al cambiar las bolas rojas. Por tanto, esta probabilidad es máxima al pasar 24 bolas rojas a la segunda urna, junto con las 25 bolas negras, y su valor es 0,74.