# Problemas Métricos

**1.-** Hallar la distancia del punto P al plano determinado por los puntos A(1,0,1); B(0,0,1); C(1,2,0), siendo P en que la recta $r: \frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-4}{-1}$ corta al plano $\pi: 2x+y-z+4=0$

$Sol: d(P,\pi)=\frac{9\sqrt{5}}{5}$

**2.-** Calcular la distancia entre las rectas:

$$r: \frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{4} \text{ y } s: \begin{cases} x=5+t \\ y=-1 \\ z=8+2t \end{cases}$$

Sol: d(r,x)=3

**3.-** Obtener las ecuaciones de los planos que son perpendiculares a la recta $r: \begin{cases} 3x-2y+2z=6 \\ x+z=3 \end{cases}$ y distan 3 unidades del punto P(-1,1,2). Calcular el seno del ángulo formado por r y el plano coordenado OXY.

Sol: $\pi_1: -2x-y+2z+4=0$ y $\pi_2: -2x-y+2z-14=0$

$Sen(r,\pi)=|Cos(r,n_\pi)|=\frac{2}{3}$

**4.-** Obtener el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi: 2x+y+3z=6$ con los ejes coordenados.

$Sol: A=\frac{1}{2}\|mn \wedge mt\|=3\sqrt{14}$

**5.-** Calcular la distancia del punto P(1,-3,1) a la recta

$$r: \begin{cases} x+y-2z=-3 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$$

$Sol: d(P,r)=\sqrt{\frac{2}{3}}$

**6.-** Calcular las coordenadas del punto simétrico del (1,3,7) respecto de la recta dada por las ecuaciones $x-1=y+3=\frac{z-4}{2}$

$Sol: A'=(5,-5,9)$

**7.-** Hallar el punto de la recta $r: x=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-1}$ que equidista del punto A(1,2,1) y del origen de coordenadas.

$Sol: P=(1,0,2)$

**8.-** Consideramos los planos $\pi: 2x+5=0$ y $\pi'=3x+3y-4=0$ ¿Qué ángulo determinan ambos planos?. Hallar el plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los dos planos.

$Sol: a)\ \alpha=\frac{\pi}{4}; b)\ \pi: z=0$

**9.-** Hallar el punto de la recta $r: \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=1+2t \end{cases}$ cuya distancia al punto P(1,0,2) sea $\sqrt{5}$

$Sol: Q(1,2,3)$

**10.-** Encontrar los puntos de $r: \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ que disten $\frac{1}{3}$ del plano $\pi: 2x-y+2z+1=0$

$Sol: (0,0,0) \text{ y } \left(\frac{-2}{5},\frac{2}{5},\frac{-2}{5}\right)$

**11.-** Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: \begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ x-2y+2z=0 \end{cases}$ y otro lado sobre la recta $s: \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{-2}$. Calcula el área del cuadrado.

Sol: A=10

**12.-** Hallar el plano de la familia $mx+y+z-(m+1)=0$ que está situado a distancia 1 del origen.

$Sol: \pi: x+2y+2z-3=0$

**13.-** Explicar cómo se obtiene la perpendicular común a dos rectas que se cruzan. Obtener la perpendicular común a las rectas $r: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x=0 \\ z=3 \end{cases}$

$Sol: r': \{x=0;\ y=0;\ z=3t\}$

**14.-** **a)** Determinar la ecuación de un plano $\pi$ pasando por el punto A(-1,-1,1) y siendo $v(1,-2,-1)$ un vector normal al mismo. **b)** Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta s que se obtiene al cortarse el plano $\pi: x-2y-z-2=0$ con el plano $\pi': z=1$; **c)** Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos B(1,1,2) y C(1,-1,2); **d)** Encontrar la posición relativa entre las rectas r y s de los apartados anteriores; **e)** Hallar un punto D de la recta r que esté a la misma distancia de los puntos B y C.

$Sol: a)\pi: x-2y-z-2=0;\ b)\begin{cases} x=3-2t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases};c)\begin{cases} x=1 \\ y=1-2t; \\ z=2 \end{cases}$ d) Se Cruzan e) D(3,0,1)

**15.-** Considera el triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,1,2), B(1,0,-1) y C(1,-3,2); **a)** Razonar si es rectángulo; **b)** Calcular la recta r que pasa por B y es perpendicular al lado AC. **c)** Calcular la recta S que pasa por los puntos A y C. **d)** Si D es el punto de corte de r y s, calcular el módulo de $BD$. E)

$a)\ No;\ b)\ r: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=-1-3t \end{cases}\quad c)\ s: \begin{cases} x=1 \\ y=1-4\lambda \\ z=2 \end{cases}\quad d)\ \|BD\|=3$

**16.-** Consideramos los puntos A(2,1,2) y B(0,4,1) y la recta r: $x=y-2=\frac{z-3}{2}$. **a)** Determinar un punto C de la recta que equidiste de los puntos A y B. **b)** Calcular el área del triángulo ABC.

$Sol: a)C(-1,1,1);\ b)\ A=\frac{\sqrt{91}}{2}$

**17.-** Sea el plano $\pi \equiv 2x+y-z+8=0$ **a)** Calcula el punto P', simétrico del punto P(2,-1,5) respecto del plano $\pi$ . **b)** Calcula la recta r', simétrica de la recta $r \equiv \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ .

$Sol: a)\ P'(-2,-3,7);\quad b) r' \equiv \frac{x+4}{2}=\frac{y-8}{-11}=\frac{z-8}{-1}$

**18.-** Considera el punto P(-3,1,6) y la recta r dada por $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$ **a)** Determina la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r. **b)** Calcula las coordenadas del simétrico de P respecto de la recta r.

Sol: a) x+2y+2z-11=0; b) P'(9,1,0)

**19.-** Sean los planos $\pi \equiv x+3y+2z-5=0$ y $\pi' \equiv -2x+y+3z+3=0$. **a)** Determina el ángulo que forman $\pi$ y $\pi'$. **b)** Calcula el volumen del tetraedro limitado por $\pi$ y los planos coordenados.

Sol: a) 60º; b) V=125/36 u.v.

**20.-** Sean el punto P(1,6,-2) y la recta $r \equiv \frac{x-5}{6}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{2}$ **a)** Halla la ecuación general del plano que contiene al punto P y a la recta r. **b)** Calcula la distancia entre el punto P y la recta r.

**Sol:** a) $-4x+2y+15z+22=0$ b) $d=\sqrt{20}$

**21.-** Sea $r$ la recta definida por $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y $s$ la recta dada $s \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ z=-1 \end{cases}$. **a)** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas. **b)** Calcula la distancia entre r y s.

**Sol:** a) $\frac{x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{z+1}{0}$; b) $d=\frac{\sqrt{2}}{2}u$

**22.-** Sea la recta $r$ que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(-1,1,0). **a)** Halla la ecuación de la recta $s$ paralela a $r$ que pasa por C(-2,3,2). **b)** Calcula la distancia de $r$ a $s$.

**Sol:** a) $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}$; b) $d=\sqrt{3}u$

**23.-** Sea $r$ la recta definida por $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ y $s$ la recta dada por $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$. **a)** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a $r$ y a $s$. **b)** Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

**Sol:** a) $\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}}=\frac{y-\frac{1}{2}}{0}=\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$; b) $d=\frac{\sqrt{2}}{2}u$

**24.-** Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(2,-1,3). **a)** Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta $r$. **b)** Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a $r$ y pasa por el origen de coordenadas.

**Sol:** a) $d=\sqrt{\frac{3}{2}}u$; b) $\frac{x}{\frac{7}{6}}=\frac{y}{\frac{-1}{6}}=\frac{z}{\frac{-1}{3}}$

**25.-** Sea $r$ la recta que pasa por el punto (1,0,0) y tiene como vector director (a,2a,1) y sea $s$ la recta dada por: $s \equiv \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=0 \end{cases}$ **a)** Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas. **b)** Calcula, para a = 1, la distancia entre $r$ y $s$.

Sol: a) a=±1; b) $d=\sqrt{\frac{5}{6}}u$

**26.-** Considera los puntos P(2, 3,1) y Q(0,1,1). **a)** Halla la ecuación del plano $\pi$ respecto del cual P y Q son simétricos. **b)** Calcula la distancia de P a $\pi$.

**Sol:** a) $x+y-3=0$ b) $d(P,\pi)=\sqrt{2}\ u$

**27.-** Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv x=y=z$ y $s \equiv x-1=y-2=z-3$.

Sol: $d(r,s)=\sqrt{2}\ u$

**28.-** Considera los puntos A(1,2,1), B(–1,0,2) y C(3,2,0) y el plano π determinado por ellos. **a)** Halla la ecuación de la recta $r$ que está contenida en π y tal que A y B son simétricos respecto de r. **b)** Calcula la distancia de A a $r$.

**Sol:** a) $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-\frac{3}{2}}{2}$; b) $d=\frac{3}{2}u$

**29.-** Considera los puntos A(1,0,2) , B(–1,3,1) , C (2,1,2) y D(1,0,4). **a)** Halla la ecuación del plano que contiene a A, B y C; **b)** Halla el punto simétrico de D respecto del plano $\pi \equiv x-y-5z+9=0$.

Sol: a) x-y-5z+9=0; b) $\left(\frac{47}{27},\frac{-20}{27},\frac{8}{27}\right)$

**30.-** Dados los puntos A(1,0,0), B(0,0,1) y P(1,–1,1) , y la recta $r$ definida por $r \equiv \begin{cases} x-y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$ **a)** Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades. **b)** Calcula el área del triángulo ABP.

Sol: a) C(3,1,0) y C'(–1,–3,0); b) A=√3/2 u.a.

**31.-** Considera los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ dados por: $\pi_1 : (x,y,z)=(-2,0,7)+\lambda(1,-2,0)+\mu(0,1,-1)$ y $\pi_2 \equiv 2x+y-z+5=0$ Determina los puntos de la recta $r$ dada por $x=y+1=\frac{z-1}{-3}$ que equidistan de $\pi_1$ y $\pi_2$.

Sol: (0,-1,1) y (-1,-2,4)

**32.-** Encuentra los puntos de la recta $r$ dada por: $r \equiv \frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{2}=z-3$ cuya distancia al plano π de ecuación $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.

**Sol:** (5,0,4) y $\left(\frac{-23}{5},\frac{24}{5},\frac{8}{5}\right)$

**33.-** Determina un punto P de la recta r, dada por: $r \equiv \frac{x+3}{2}=\frac{y+5}{3}=\frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto A(3,2,1).

Sol: P(1,1,2)

**34.-** Considera el punto P(1,0, 2) y la recta r dada por las ecuaciones $r \begin{cases} 2x-y-4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$. **a)** Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r. **b)** Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Sol: a) –x-2y+z-1=0; b) P'(10/3,2/3,17/3)

**35.-** Halla el punto simétrico de P (2,1, –5) respecto de la recta r definida por $\begin{cases} x-z=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$

Sol:P'(-6,-1,1)

**36.-** Dados los puntos A(1,0,0), B(0,0,1) y P(1, –1,1), y la recta r definida por $\begin{cases} x-y-2=0 \\ z=0 \end{cases}$ **a)** Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades. **b)** Calcula el área del triángulo ABP.

Sol: a) $C_1$(3,1,0) y $C_2$(-1,-3,0); b) A=√3/2 $u^2$

**37.-** Considera los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ dados, respectivamente, por $(x,y,z)=(-2,0,7)+\lambda(1,-2,0)+\delta(0,1,-1)$ y $\pi_2 \equiv 2x+y-z+5=0$. Determina los puntos de la recta r definida por $x=y+1=\frac{z-1}{-3}$ que equidistan de $\pi_1$ y $\pi_2$.

Sol: (0,-1,1) y (-1,-2,4)