Tema 2: Derivadas, Técnicas de Derivación

2.1.- Derivada de una función en un punto:

Sea la función f definida en un entorno x_o, decimos que la función f es derivable en el punto x_o si existe el límite de $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ cuando la función tiende a x_o.

$$\text{f derivable en } x_o \rightarrow \exists \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Si la función es derivable en x_o, al límite anterior se le llama ***derivada*** de la función f en el punto x_o, y se simboliza por $f'(x_o)$ o por $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_o}$.

$$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

Ejemplo 1: Hallar la derivada de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ en el punto x_o = a

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+h^2+2ah-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah}{h}=\lim_{h\to 0}h+2a=2a$$

- La función f es ***derivable por la derecha*** si existe el límite por la derecha de $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ cuando la función tiende a x_o. La derivada por la derecha se simboliza por $f'(x_o^+)$.

- La función f es ***derivable por la izquierda*** si existe el límite por la izquierda de $\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ cuando la función tiende a x_o. La derivada por la izquierda se simboliza por $f'(x_o^-)$.

Por tanto ***la función f es derivable en x_o*** si existen los límites por la izquierda y por la derecha y ambos coinciden.

$$f'(x_o)=f'(x_o^-)=f'(x_o^+)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Ejemplo 2: Estudiar la derivabilidad en 0 y -1 de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} senx & si \quad x\ge 0 \\ x^2 & si \quad -1<x<0 \\ -2x-1 & si \quad x\le -1 \end{cases}$$

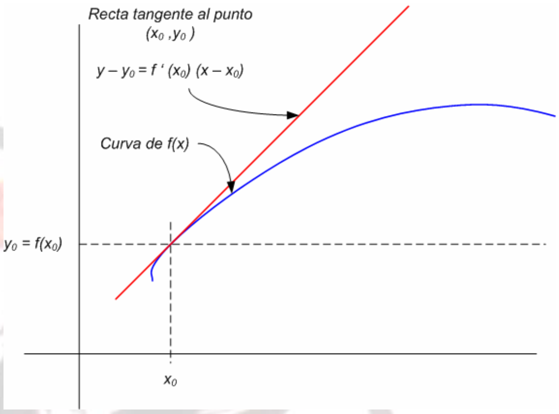
$$\left.\begin{array}{l} f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{sen(h)-sen(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{sen(h)}{h} = 1 \\ f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{(h)^2-sen(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(0^+) \neq f'(0^-) \\ \text{f no es derivable en } x = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(-1+h)^2-(-2x-1-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -2+h = -2 \\ f'(1^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[-2(-1+h)-1]-[-2(-1)-1]}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -2 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(-1^+) = f'(-1^-) \\ \text{f es derivable en } x = -1 \end{array}$$

2.2.- Recta tangente a la curva en un punto.

El cálculo de la derivada de una función en un punto ***a***, nos permite escribir la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisas ***a***, utilizando la ecuación punto pendiente:

$$\boxed{y = m(x-a)+b}$$



Donde ***m*** es la pendiente de la recta y ***b*** la ordenada en el origen.

$$\begin{cases} m = f'(a) \\ b = f(a) \end{cases}$$

Ejemplo 3: Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en el punto de abscisa x=0.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f'(0) = -2 \end{array}\right\}$$ ➔ La ecuación de la recta tangente es: $y = 2x-2$

2.3.- Relación entre continuidad y derivabilidad

Una función f es derivable en un punto x_o, si f es contínua en dicho punto.

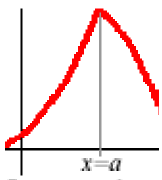
f derivable en x_o ➔ f contínua en x_o	f no contínua en x_o ➔ f no derivable en x_o

Hay funciones contínuas que no son derivables, por ejemplo la función valor absoluto, en general las funciones que tienen picos no son derivables en los picos.

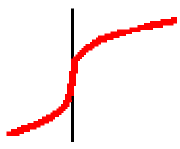
2.4.- Significado gráfico de la derivada: Suavidad.

- Una función f es continua en un punto, x_o, si su gráfica atraviesa dicho punto.
- Una función f es derivable en un punto, x_o, si su gráfica lo atraviesa con suavidad, es decir, la gráfica de f no presenta "picos".
- Una función no es derivable:

  → En los puntos angulosos.
  → En los puntos de tangente vertical.
  → En los puntos de discontinuidad.



Punto anguloso


Derivada infinita (tangente vertical)

2.5.- Calculo de derivadas:

Si f y g son funciones derivables en a, entonces K·f, f±g, f·g son funciones derivables en a.

$$(k\cdot f)'(a) = k\cdot f'(a)$$
$$(g \pm f)(a) = g'(a) + f'(a)$$
$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$$

Si además g(a) $\neq$ 0, entonces $\frac{1}{f}$ y $\frac{f}{g}$ son derivables en a.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Si g derivable en a y f derivable en g(a) ➔ $f \circ g$ es derivable en a

$$(f \circ g)'(a) = (f[g(a)])' = f'[g(a)]\cdot g'(a)$$ ***(Regla de la Cadena)***

2.6.- Función derivada:

Si una función f(x) es derivable en su dominio, es posible definir una nueva función que asocie a cada número real del dominio la derivada de la función en ese punto.

Esta función se llama ***función derivada*** o simplemente derivada.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Ejemplo 4: Calcular la función derivada de f(x) = X^4

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-(x)^4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} 4x^3+6x^2h\ +4xh^2+h^3 = 4x^3$$

2.7.- Derivadas de las funciones elementales:

- $\frac{d}{dx}$(K) = 0
- $\frac{d}{dx}$(X) = 1
- $\frac{d}{dx}$ (X^k) = kX^{k-1}
- $\frac{d}{dx}$ ($\sqrt{x}$) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$
- $\frac{d}{dx}$ (Sen X) = Cos X
- $\frac{d}{dx}$ (Cos X) = -Sen X
- $\frac{d}{dx}$ (g(h(X))) = g'(h(X)) · h'(X)
- $\frac{d}{dx}$ (ln u) = $\frac{u'}{u}$
- $\frac{d}{dx}$ ($\log_a$ u) = $\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{u'}{u}$
- [f(X) · g(X)]' = f'(X)·g(X) + f(X)·g'(X)
- $\frac{d}{dx}$ (f(X) + g(X)) = f'(X) + g'(X)
- $\frac{d}{dx}$ (tg(X)) = 1 + tg^2(X) , $1/Cos^2$(X)
- $\frac{d}{dx}$ (e^u) = e^u · u'

- $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcSen}(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcCos}(u)) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg}(u)) = \frac{u'}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcCtg}(u)) = \frac{-u'}{1+u^2}$
- $\frac{d}{dx}(ctg(u) = -(1+ctg^2(u)) \cdot u' = \frac{-u'}{sen^2 u} =$
  $= -u' \cdot Co\sec^2 u$
- $\frac{d}{dx}(f^{-1})(X) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- $\frac{d}{dx}(\sec(X)) = \operatorname{tg}(X) \cdot \sec(X)$
- $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}(X)) = -\operatorname{cotg}(X) \cdot \operatorname{cosec}(X)$
- $\frac{d}{dx}$ Sh u = u' · Ch u
- $\frac{d}{dx}$ Ch u = u' · Sh x
- $\frac{d}{dx}$ th u = u' · Sech² u
- $\frac{d}{dx}$ Ctgh u = -u' · Cosech² u
- $\frac{d}{dx}$ Sech u = -u' · Sech u tgh u
- $\frac{d}{dx}$ Cosech u = -u' · Cosech u · Ctgh u
- $\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left(v' \cdot \ln u + \frac{vu'}{u}\right)$

· ***Ejemplo de derivación logarítmica:***

$f(x) = x^{2x+1}$ ➔ $\ln[f(x)] = (2x+1) \cdot \ln x$

Derivamos: $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln x + \frac{(2x+1) \cdot 1}{x}$

Despejamos: $f'(x) = f(x) \cdot 2\ln x + \frac{(2x+1) \cdot 1}{x}$

Sustituimos: $f'(x) = x^{2x+1} \cdot \left(2\ln x + \frac{2x+1}{x}\right)$

2.8.- Derivabilidad de una función en un intervalo:

Decimos que $f : \left]a,b\right[\to \mathbb{R}$ es una función derivable en (a,b), si es derivable en todo punto x_o de (a,b).

Decimos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable en [a,b], si es derivable en todo punto x_o de (a,b) y es derivable en a por la derecha y en b por la izquierda.

2.9.- Derivadas sucesivas:

Se llama derivada segunda de f con respecto a x, y se simboliza f''(x) ó $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$, a la derivada de la función f'(x).

De forma más general, se llama derivada n-ésima (o derivada de orden n) de f y se simboliza por $f^{(n}$ ó $\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)$ a la derivada de la función $f^{(n-1}$.

<u>Ejemplo 5:</u> Calcular la derivada tercera de la función $f(x)=x^4$

$f'(x) = 4x^3$ ➔ $f''(x) = 12x^2$ ➔ $f'''(x) = 24x$

2.10.- Ejercicios:

1.- A partir de la definición de derivada de una función en un punto, calcular la derivada de las funciones f(X)=3X, en x_o=1, y $g(x)=\sqrt{x-5}$ en x_o=9.

2.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ en x_o=0.

3.- Sea k un número real y f una función real definida sobre R, mediante

$$f(x)=\begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x}+kx & \text{si } \ x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$$

a) Calcular la derivada de f en el punto x_o=0
b) Calcular la función derivada

4.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} 3x+5 & \text{si } \ x\leq -1 \\ 2 & \text{si } \ -1<x\leq 1 \\ x^2-3x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

5.- Calcular a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-x \text{ si } x<-1 \\ ax^2+bx \ \text{ si } x\geq -1 \end{cases}$ sea derivable.

6.- Calcular las derivadas de las funciones:

$$f(x)=\frac{x^3}{sen^2x} \qquad f(x)=tg^2\left(\frac{x}{2}\right) \qquad f(x)=\sqrt{1+x^4} \qquad f(x)=(Arcsenx)^{\cos^2 x}$$

7.- Derivar y simplificar:

$$f(x)=Arctg\frac{1+x}{1-x}-Arctgx \qquad\qquad f(x)=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot Arcsenx+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

8.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x)=e^{2x}$

9.- Hallar un punto del intervalo [0,1], donde la tangente a la curva $f(x)=1+x-x^2$, sea paralela al eje de abscisas.

10.- Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ sea:

a) Paralela el eje OX
b) Paralela a la recta: $g(x)=5x+3$
c) Perpendicular a la recta: $h(x)=\dfrac{x}{3}+1$

11.- Halla el punto de la curva $f(x)=\ln(1+x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa x=1.

2.11.- Soluciones:

1.- A partir de la definición de derivada de una función en un punto, calcular la derivada de las funciones f(X)=3X, en x_o=1, y $g(x)=\sqrt{x-5}$ en x_o=9.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}3=3$$

$$f'(9)=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-5}-2}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x-5}-2)\cdot(\sqrt{x-5}+2)}{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}=$$
$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x-5}+2)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x-5}+2}=\frac{1}{4}$$

2.- Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ ***en x_o=0.***

Lo primero es estudiar la continuidad:

f(0)=0; $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{+\infty}=0$ $\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\frac{0}{1}=0$, por tanto la función es contínua en x=0.

Veamos ahora si es derivable:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$$

Vemos que las derivadas laterales en x=0 no coinciden, por tanto la función f(x) no es derivable en este punto.

Así que la función es contínua en cero, pero no es derivable.

3.- Sea k un número real y f una función real definida sobre R, mediante

$$f(x)=\begin{cases}x^2 sen\frac{1}{x}+kx & \text{si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$$

c) Calcular la derivada de f en el punto x_o=0
d) Calcular la función derivada

a) $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen\frac{1}{x}+kx-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 sen\frac{1}{x}+kx}{x}=\lim_{x\to 0}x sen\frac{1}{x}+k=k$

b) $f'(x)=\begin{cases}2x sen\frac{1}{x}+x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)+k & \text{si } k\neq 0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases}2xsen\dfrac{1}{x}-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+k & \text{si } k\neq 0\\ k & \text{si } x=0\end{cases}$$

4.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{si } x\leq -1\\ 2 & \text{si } -1<x\leq 1\\ x^2-3x+1 & \text{si } x>1\end{cases}$

Para que una función sea derivable en un punto, antes ha de ser contínua, vemos a simple vista que la función f(x) es contínua en x=-1 porque sus límites laterales coinciden y ambos coinciden con el valor de la función en el x=-1, veamos si es derivable en este punto:

$$f'(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{3x+5-2}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{3(x+1)}{x+1}=3$$
$$f'(-1^+)=\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{2-2}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{0}{x+1}=\frac{0}{0}$$ ➔ Indeterminado.

Por tanto la función no es derivable en x=-1

Veamos en x=1, Veamos a simple vista que los límites laterales no coinciden, por la izquierda es 2 y por la derecha es -1, por tanto la función no es contínua, y por tanto tampoco es derivable en x=1.

Así que podemos decir que la función no es derivable ni en x=-1, ni en x=1. En los restantes puntos de R si es contínua y derivable, por ser una función definida a trozos con tres ramas ambas polinómicas.

5.- Calcular a y b para que la función $f(x)=\begin{cases}x^3-x & \text{si } x<-1\\ ax^2+bx & \text{si } x\geq -1\end{cases}$ ***sea derivable.***

Como ya sabemos, para que una función sea derivable, ha de ser contínua, por tanto:

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}x^3-x=0$$
$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}ax^2+bx=a-b$$
➔ Para que sea contínua, a=b

Veamos si es derivable:

Vamos a calcular las derivadas laterales en x=-1:

$$f'(-1^-)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3-x-a+b}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{x(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}x(x-1)=2$$
$$f'(-1^+)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{ax^2+bx-a+b}{x+1}=\lim_{x\to -1^+}\frac{a(x+1)(x-1)+b(x+1)}{x+1}=$$
$$\lim_{x\to -1^+}a(x-1)+b=-2a+b$$

Y para que sea derivable ambas derivadas han de ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases} a = b \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$ ➔ a=b=-2 Por tanto f es derivable para a=b=-2

6.- Calcular las derivadas de las funciones:

$$f(x) = \frac{x^3}{sen^2 x} \quad g(x) = tg^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad h(x) = \sqrt{1+x^4} \quad I(x) = (Arcsenx)^{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(sen^2 x) - x^3 \cdot 2senx\cos x}{sen^4 x} = \frac{3x^2 sen^2 x - x^3 sen(2x)}{sen^4 x}$$

$$g'(x) = 2tg\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{2} = tg\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}}\cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

Para la última aplicaremos derivación logarítmica:

$$\ln(I(x)) = \ln(Arcsenx)^{\cos^2 x} \;➔\; \ln(I(x)) = Cos^2 x \cdot \ln(Arcsenx)$$

Derivamos:

$$\frac{I'(x)}{I(x)} = 2\cdot senx \cdot \cos x \cdot \ln(arcsenx) + \frac{1}{arcsenx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos^2 x$$

Operamos y despejamos I(x):

$$I'(x) = I(x)\cdot\left(sen2x \cdot \ln(arcsenx) + \frac{\cos^2 x}{arcsenx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

De donde:

$$\boxed{I'(x) = (Arcsenx)^{\cos^2 x}\cdot\left(sen2x \cdot \ln(arcsenx) + \frac{\cos^2 x}{arcsenx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}$$

7.- Derivar y simplificar:

$$f(x) = Arctg\frac{1+x}{1-x} - Arctgx \qquad g(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot Arcsenx + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{(1-2x+x^2)+(1+2x+x^2)}{1-2x+x^2}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2(1+x^2)}{1-2x+x^2}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$g'(x) = xarcsenx + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) =$$

$$xarcsenx + \frac{2x^2-1}{4\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{1-x^2}} = xarcsenx + \frac{(2x^2-1)+(1-x^2)-x^2}{4\sqrt{1-x^2}} = xarcsenx$$

8.- Calcular la derivada n-ésima de la función $f(x)=e^{2x}$

Empezamos calculando la primera derivada:

$$f'(x)=2e^{2x}$$

Calculamos la segunda:

$$f''(x)=2e^{2x}\cdot 2=2^2e^{2x}$$

Calculamos la tercera:

$$f'''(x)=2^2e^{2x}\cdot 2=2^3e^{2x}$$

Por lo tanto cabe esperar que la derivada n-ésima sea:

$$f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$$

Vamos a demostrarlo por inducción:

Sea $f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}$, entonces $f^{n+1)}(x)=2^{n+1}\cdot e^{2x}$, vamos a ver:

$$f^{n+1)}(x)=\frac{d}{dx}f^{n)}(x)=\frac{d}{dx}2^ne^{2x}=2^ne^{2x}\cdot 2=2^{n+1}\cdot e^{2x}$$

Por tanto queda demostrado que: $\boxed{f^{n)}(x)=2^n\cdot e^{2x}}$

9.- Hallar un punto del intervalo [0,1], donde la tangente a la curva $f(x)=1+x-x^2$, sea paralela al eje de abscisas.

Si la recta tangente es paralela al eje de abscisas, es porque su pendiente es cero, entonces en ese punto la derivada es cero:

$$f'(c)=0$$

Calculamos la derivada f(x):

$$f'(c)=1-2c$$

Y tiene que ser igual a cero.

$$f'(c)=0 \rightarrow 1-2c=0 \rightarrow c=\frac{1}{2}$$

Vemos que el punto donde la curva de f(x) tiene una tangente de pendiente cero, o paralela al eje OX, es en el x=0,5, que por supuesto pertenece al intervalo [0,1].

10.- Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ sea:

a) Paralela el eje OX
b) Paralela a la recta: $g(x)=5x+3$
c) Perpendicular a la recta: $h(x)=\frac{x}{3}+1$

a) Si la recta tangente es paralela al eje OX, entonces su pendiente es cero. m=0.

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=0 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \rightarrow c^2-2c-c=0 \rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes paralelas al eje Ox en los puntos x=-1 y x=3.

b) Si la recta tangente es paralela a otra, entonces su pendiente es la misma que la de esta otra recta. Por tanto aquí m=5.

Así que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=5 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2-2c-3=5 \Rightarrow c^2-2c-8=0 \Rightarrow \begin{cases} c=4 \\ c=-2 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes paralelas a la recta y=5x+3 los puntos x=-2 y x=4.

c) Si la recta tangente es perpendicular a otra recta, entonces su pendiente es la opuesta de la inversa, es decir: Si como en este caso la pendiente de la recta es $m=\frac{1}{3}$, lo que hacemos es invertirla: $m'=3$, y después le cambiamos el signo: $m''=-3$.

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=-3 \\ f'(c)=c^2-2c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2-2c-3=-3 \Rightarrow c^2-2c=0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ c=2 \end{cases}$$

Entonces la curva de f(x) tiene rectas tangentes perpendiculares a la recta $\frac{x}{3}+1$ en los puntos x=0 y x=2.

11.- Halla el punto de la curva $f(x)=\ln(1+x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa x=1.

En este ejercicio lo primero es calcular la recta tangente en el punto x=1.

Calculamos f'(1): $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow f'(1)=\frac{2}{2}=1$, por tanto la pendiente de la recta tangente en x=1 es m=1.

Como dicen que es perpendicular, la invertimos y le cambiamos el signo: $m'=-1$

Así que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(c)=-1 \\ f'(c)=\dfrac{2c}{1+c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2c}{1+c^2}=-1 \Rightarrow 2c=-1-c^2 \Rightarrow c^2+2c+1=0 \Rightarrow (c+1)^2=0 \Rightarrow c=-1$$

Entonces la curva de f(x) tiene una recta tangente perpendicular a la recta tangente trazada en el punto x=1 en el punto de abscisa x=-1.