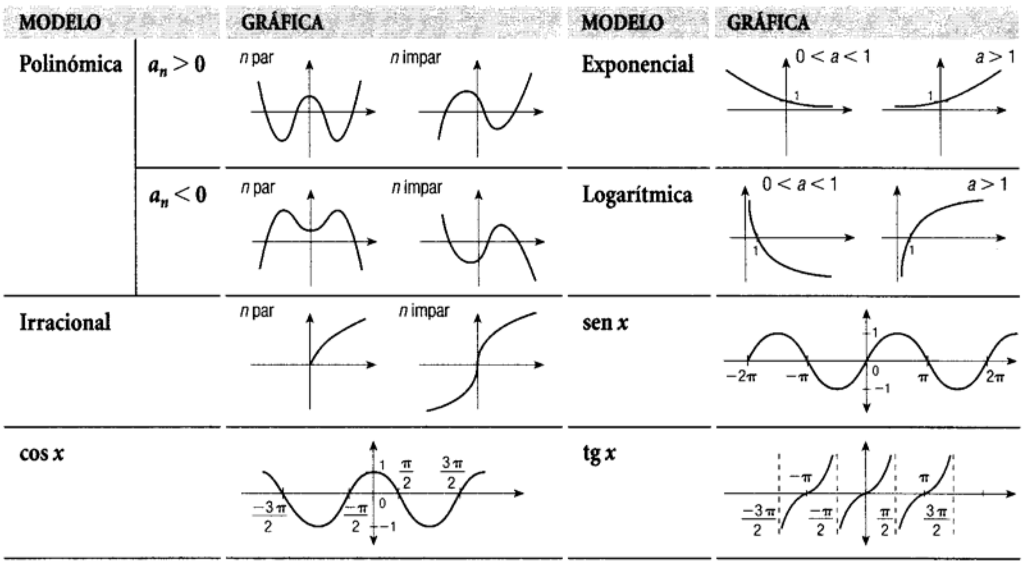
Tema 4: Representación de Funciones

1.- Dominio y recorrido:

Dominio: Valores de x para los que está definida (existe) $f(x)$
Recorrido: Valores que toma $f(x)$



- *Funciones Polinómicas*, son de la forma $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ y su dominio es $\mathbb{R}$.
- *Funciones Racionales*, son de la forma $f(x) = \dfrac{a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n}{b_o x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_{n-1} x + b_n}$ y su dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores que anulan el denominador.
- *Funciones Irracionales*, son del tipo $f(x) = \sqrt[n]{f'(x)}$, siendo su dominio:
  - El mismo que $f(x)$ si n es impar
  - El conjunto de valores reales que hagan $f(x) \geq 0$ si n es par
- *Funciones exponenciales*, son de la forma $f(x) = a^{f'(x)}$, con a>0 y a≠1, su dominio es $\mathbb{R}$.
- *Funciones logarítmicas*, son de la forma $f(x) = \log_a f'(x)$, con a>0 y $f'(x) > 0$
- *Funciones circulares*: $f(x) = senx, f(x) = \cos x$, su dominio es $\mathbb{R}$.

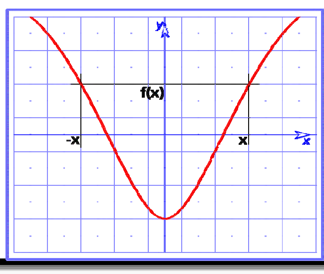
selectividad-cgranada.com

A partir de estas dos, podemos definir el resto de funciones circulares:

$tg(x) = \dfrac{senx}{\cos x}$, $sec(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ sus dominios son $\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z \right\}$

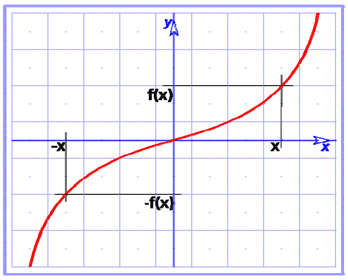
$ctg(x) = \dfrac{\cos x}{senx}$, $\cos ec(x) = \dfrac{1}{senx}$ sus dominios son $\mathbb{R} - \{ k\pi, k \in z \}$

2.- Simetrías:



- La función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ es ***par*** si $\forall x \in A \quad f(-x) = f(x)$

La curva de toda función par es simétrica respecto del eje OY

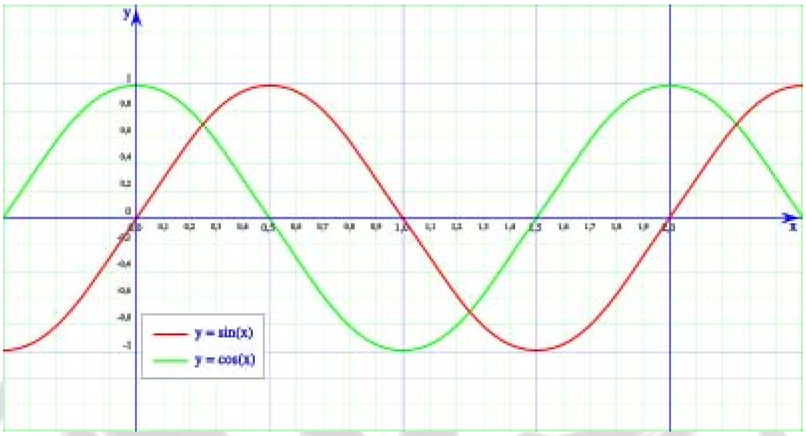


- La función $f: A \mapsto \mathbb{R}$ es ***impar*** si $\forall x \in A \quad f(-x) = -f(x)$

La curva de toda función impar es simétrica respecto del origen de Coordenadas (0,0)

3.- Periodicidad:

- La función $f: A \mapsto \mathbb{R}$ es ***periódica***, si existe un número real T distinto de cero, llamado periodo, tal que: $f(x+T) = f(x)$

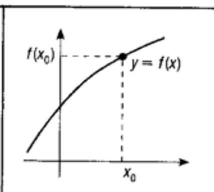
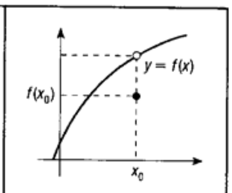
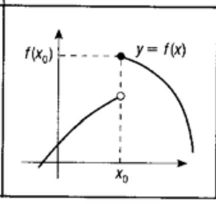
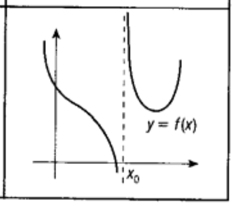


4.- Puntos de discontinuidad:

Son los puntos donde la función no es continua.

Una función es continua en un punto ***a*** cuando se cumple: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \end{cases}$

4.1.- Tipos De discontinuidades:

Continua Existe el límite y coincide con la imagen. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$		**Evitable** Existe el límite, pero no coincide con la imagen. $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$	
De salto Los límites laterales son finitos, pero diferentes. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$		**Asintótica** Los límites laterales son infinitos. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x), \ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$	

5.- Puntos de corte con los ejes:

Para calcular los puntos de corte de la función con el eje x, hacemos $f(x) = 0$ y calculamos las raíces. Luego calculamos $f(0)$, y los puntos de corte son los puntos $(0, f(0))$.

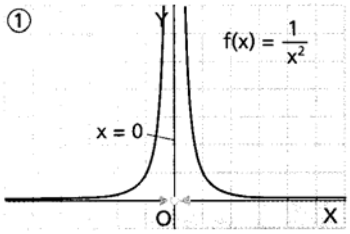
6.- Ramas infinitas:

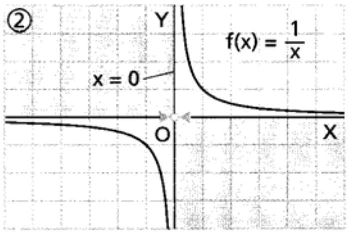
6.1.- Asíntotas Verticales:

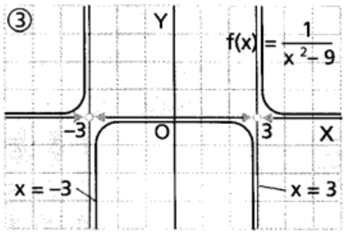
La recta x=a es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de estos límites:

$$1.- \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad 2.- \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad 3.- \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Normalmente las asíntotas verticales se hallan en los valores de x que anulan el denominador.





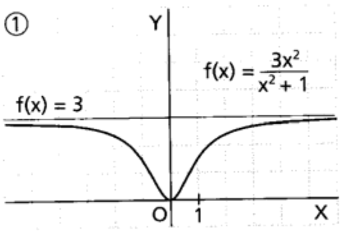


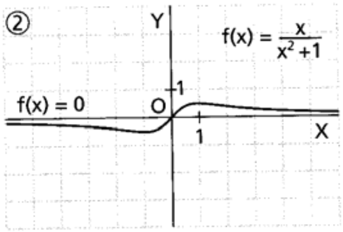
6.2.- Asíntotas Horizontales:

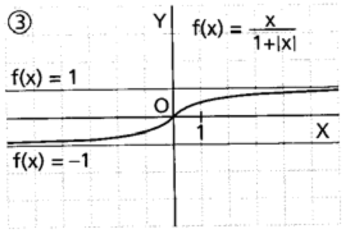
La recta y=k es una ***asíntota horizontal*** de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$1.-\lim_{x\to+\infty} f(x)=k \qquad 2.-\lim_{x\to-\infty} f(x)=k$$

Una función tiene como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a cada uno de los límites en el infinito.





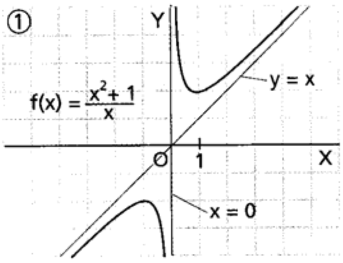


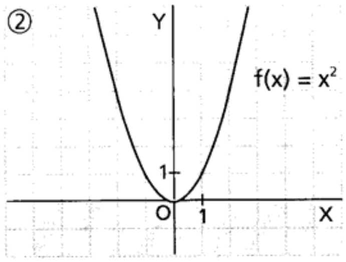
6.3.- Asíntotas Oblicuas y ramas parabólicas:

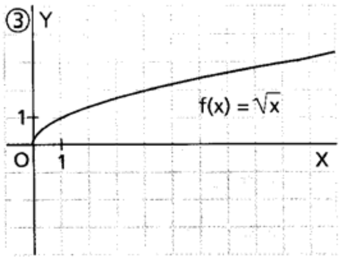
Se estudian solo si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ la curva tiene una ***rama parabólica*** en la dirección del eje OY.
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ la curva tiene una ***rama hiperbólica*** en la dirección OX. (de la forma $y=\sqrt{x}$)
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=m\neq 0$ y $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=b$, la curva tiene la asíntota y=mx+b llamada ***asíntota oblicua.***
- Si $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=m\neq 0$ y $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=\infty$, la curva tiene una ***rama parabólica*** en la dirección de la recta y=mx

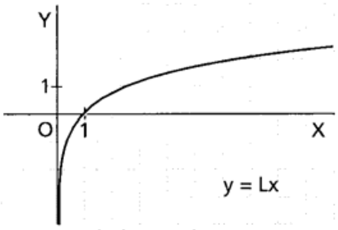
selectividad-cgranada.com



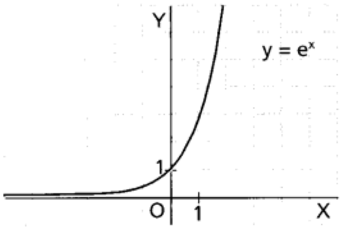




7.- Monotonía y Curvatura:

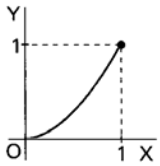
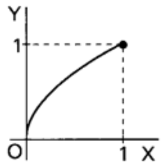
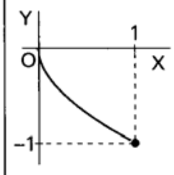
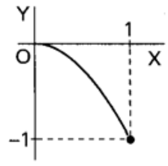


Crecimiento cóncavo

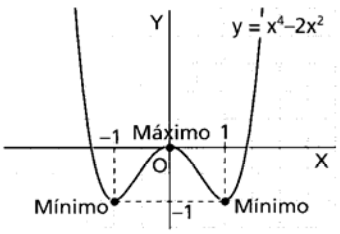


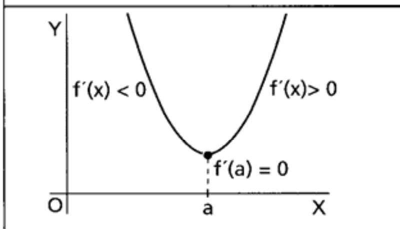
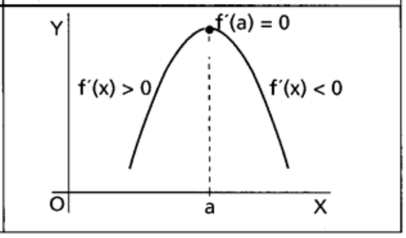
Crecimiento convexo

1. Monotonía y convexidad

Crecimiento convexo	Crecimiento cóncavo	Decrecimiento convexo	Decrecimiento cóncavo
$f(x) = x^2$	$f(x) = +\sqrt{x}$	$f(x) = -\sqrt{x}$	$f(x) = -x^2$
			
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$

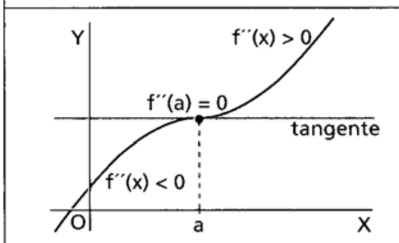
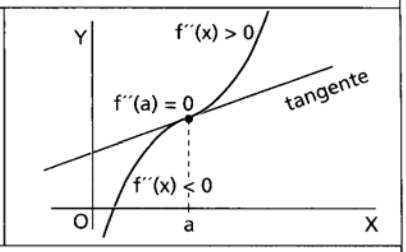
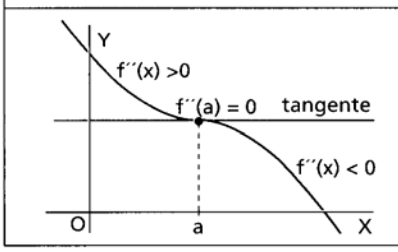
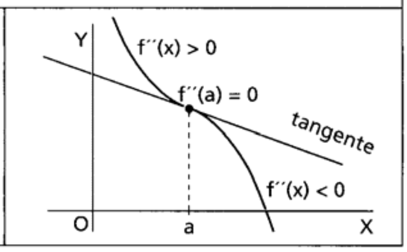
2. Puntos críticos o extremos

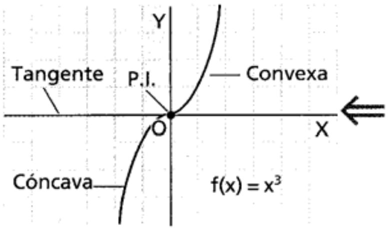


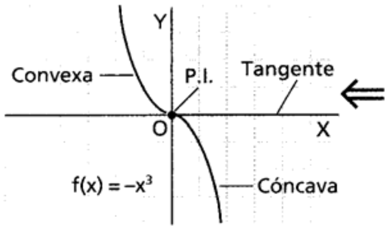
Puntos críticos: $f'(a) = 0$	
Punto **mínimo:** $f''(a) > 0$	Punto **máximo:** $f''(a) < 0$
	

3. Puntos de inflexión

Punto de inflexión: $f''(a) = 0$

Tangente horizontal: $f'(a)=0$	Tangente oblicua: $f'(a)\neq0$
Punto **cóncavo-convexo:** $f'''(a) > 0$	
	
Punto **convexo-cóncavo:** $f'''(a) < 0$	
	





8.- Esquema de para la representación de funciones:

	Propiedades de f(x) obtenidas directamente	Caracterización
1	**Dominio** **Recorrido**	Valores que puede tomar x Valores que puede tomar y
	Regiones gráficas	
	a) Región positiva	$f(x) > 0$ Por encima del eje OX
	b) Cortes con el eje OX	$f(x) = 0$ Raíces de la función
	c) Región negativa	$f(x) < 0$ Por debajo del eje OX
2	**Simetrías**	
	a) Función par	$f(-x) = f(x)$ Eje de simetría del eje OY
	b) Función impar	$f(-x) = -f(x)$ Centro de simetría el origen
3	**Periodicidad**	$f(x + T) = f(x)$ T período mínimo
4	**Puntos de discontinuidad**	$\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ o $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
5	**Ramas infinitas y asíntotas**	
	a) Ramas verticales Asíntotas verticales: $x = u$	$\lim\limits_{x\to u} = \pm\infty$, $(u = a, a^+, a^-)$
	b) Ramas horizontales Asíntotas horizontales: $y = k$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} = k$
	c) Ramas oblicuas Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$	$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) \\ n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \end{cases}$ $m, n \in R;\ m \neq 0$
	d) Ramas parabólicas	$m = \pm\infty$ Rama similar a la de $y = x^2$
	e) Ramas hiperbólicas	$m = 0$ Rama similar a la de $y = \sqrt{x}$
	Propiedades de f(x) obtenidas por las derivadas sucesivas	**Caracterización**
6	**Monotonía**	
	a) Crecimiento	$f'(x) > 0$, Intervalos de crecimiento
	b) Puntos críticos o extremos	$f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ Mínimo $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$ Máximo
	c) Decrecimiento	$f'(x) < 0$, Intervalos de decrecimiento
7	**Curvatura**	
	a) Convexidad	$f''(x) > 0$, Intervalos de convexidad
	b) Puntos de inflexión	$f''(a) = 0$ y $f'''(a) > 0$ Cóncavo-convexo $f''(a) = 0$ y $f'''(a) < 0$ Convexo-cóncavo
	c) Concavidad	$f''(x) < 0$, Intervalos de concavidad

9.- Ejemplo:

Representar la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

1.- Dominio:

La función es un cociente de polinomios, por tanto su dominio es el conjunto de los números reales, menos los valores que anulen el denominador.

$x^2-4=0$ ➔ $x^2=4$ ➔ $x=\pm 2$

$Df(x)=\mathbb{R}-\{2,-2\}$

2.- Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$ ➔ Por tanto la función es impar, es simétrica respecto del origen de coordenadas.

3.- Periodicidad:

La función $f(x)$ no es periódica.

4.- Puntos de discontinuidad:

Como $f(x)$ es un cociente de polinomios, es una función continua excepto donde se anule el denominador.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty\end{cases} \qquad \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$

La función $f(x)$ presenta en x=2 y en x=-2 dos discontinuidades asintóticas.

5.- Puntos de corte con los ejes.

Hacemos $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}=0$ ➔ $\dfrac{x^3}{x^2-4}=0$ ➔ $x^3=0$ ➔ $x=0$

Calculamos $f(0)=0$

Por tanto el punto de corte con el eje X y con el eje Y es el (0,0)

6.- Asíntotas:

Como hemos visto ya, $f(x)$ presenta en x=2 y en x=-2 dos asíntotas verticales.

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$, no presenta asíntotas horizontales, pero si puede presentar alguna asíntota oblicua o rama parabólica.

Calculamos $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^3-4x}=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2-4}=1$

selectividad-cgranada.com

Y ahora calculamos $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{x^2-4}-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}\right] = 0$

Por tanto $f(x)$ presenta una asíntota oblicua en y=x.

7.- Monotonía y curvatura:

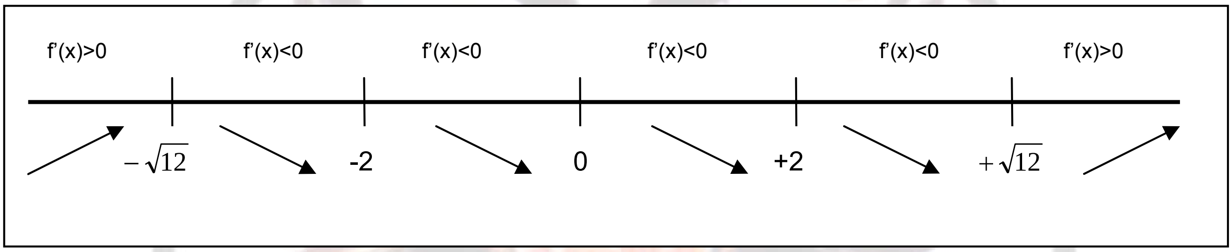
Para ello, lo primero es calcular la derivada de $f(x)$

$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ y la igualamos a cero para calcular los extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x^2(x^2-12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{12} \\ x = -\sqrt{12} \end{cases}$$

Estudiamos ahora el signo de $f'(x)$ para ver los intervalos de monotonía.

Dibujamos una línea recta en la que ponemos los puntos que hacen la derivada 0, los puntos que hacen la función cero, y los puntos donde no es continua.



$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty,-\sqrt{12})\cup(\sqrt{12},+\infty)$

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{12},-2)\cup(-2,2)\cup(+\sqrt{12},+\infty)$

$f(x)$ tiene un máximo en $x=-\sqrt{12}$ $\quad f(-\sqrt{12}) = -3\sqrt{3}$ en el punto $(-\sqrt{12},-3\sqrt{3})$

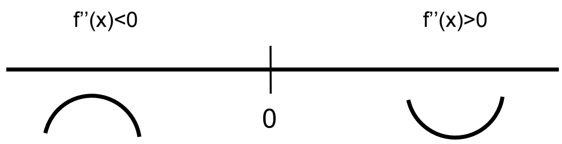
$f(x)$ tiene un mínimo en $x=\sqrt{12}$ $\quad f(\sqrt{12}) = 3\sqrt{3}$ en el punto $(\sqrt{12},3\sqrt{3})$

Vamos a calcular ahora los puntos de inflexión, donde la curva cambia de cóncava a convexa. Para ello trabajamos con la segunda derivada. $f''(x)$

$f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ y la igualamos a cero $f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0 \rightarrow 8x(x^2+12) = 0 \rightarrow \{x = 0$

Obtenemos 1 puntos, vamos a ver donde la función cambia de convexa a cóncava.

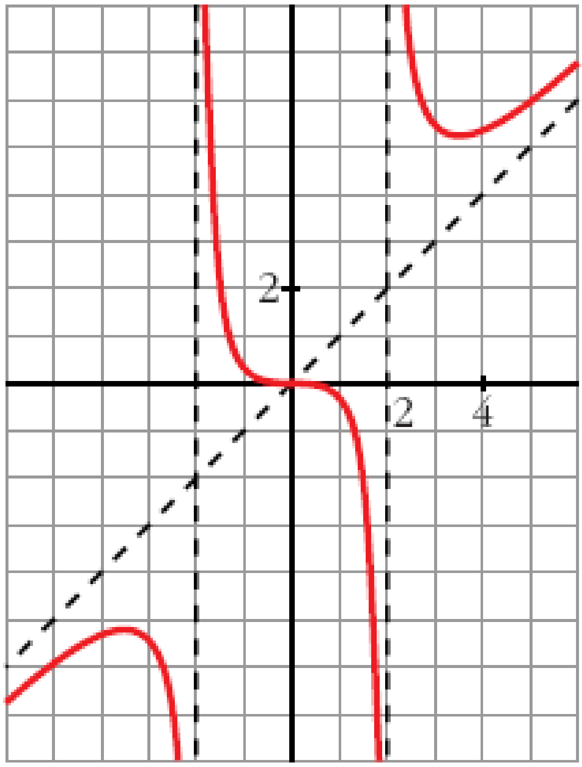
selectividad-cgranada.com

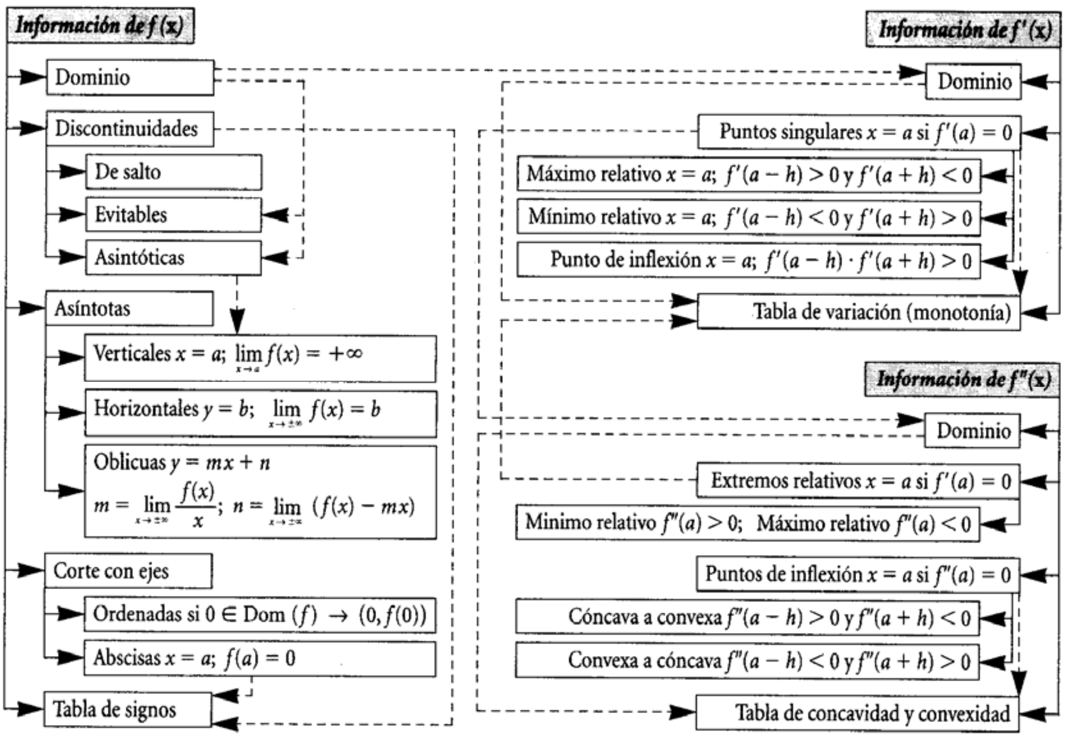


Tenemos un punto de inflexión en el punto (0,0)

8.- Gráfica de la función:

Con todos los datos que ya tenemos de $f(x)$, lo único que nos falta es representarla.





OTRO ESQUEMA

10.- Problemas

1.- Estudiar las asíntotas de la función $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$

2.- De la función $f(x)=x+\frac{4}{(x-1)^2}$ se pide:

a) Dominio de Definición y asíntotas.
b) Máximos y mínimos relativos en intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) Representación Gráfica.

3.- Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$

4.- Sea la función definida por $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

a) Estudiar las asíntotas, las zonas de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las zonas de concavidad y convexidad.
b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, realiza un esbozo de la gráfica de f.

5.- Dada la función $f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, se pide

a) Dominio y asíntotas. Puntos de corte de la gráfica con las asíntotas, si las hay.
b) Crecimiento y decrecimiento.
c) Dibujar la gráfica a partir de los resultados anteriores.

6.- Dada la función $f(x)=x\ln x-1$, x>0, se pide:

a) Explicar de forma razonada por qué la ecuación $x\ln x-1=0$ tiene exactamente una raíz.
b) Representar gráficamente la curva de la función f.

7.- Dada la función $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

a) Determinar su dominio de definición.
b) Calcula sus asíntotas
c) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.
d) Dibuja la gráfica de la función f.

selectividad-cgranada.com

11.- Resolución de Problemas

1.- Estudiar las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=2

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=-\infty\end{array}\right\}$$ La función no presenta Asíntota Horizontal

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-3}{x-2}=+\infty$, calculamos el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-3}{x^2-2x}=1$ ➔ m=1 ➔ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta y=mx+b. Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)=2$$

Por tanto la función presenta una ***Asíntota Oblicua*** en la dirección de la recta $y=x+2$

2.- De la función $f(x)=x+\dfrac{4}{(x-1)^2}$ ***se pide:***

a) Dominio de Definición y asíntotas.
b) Máximos y mínimos relativos en intervalos de crecimiento y decrecimiento
c) Representación Gráfica.

Dominio: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}x+\dfrac{4}{(x-1)^2}=1+\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}x+\dfrac{4}{(x-1)^2}=1+\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=1

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}x+\dfrac{4}{x-2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}x+\dfrac{4}{x-2}=-\infty\end{array}\right\}$$ La función no presenta Asíntota Horizontal

selectividad-cgranada.com

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x+\frac{4}{x-2}=+\infty$, calculamos el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1+\frac{4}{x(x-1)^2}=1$ ➔ m=1 ➔ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta y=mx+b.

Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\frac{4}{(x-1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-4}{(x-1)^2}\right)=0$$

Por tanto la función presenta una ***Asíntota Oblicua*** en la dirección de la recta $y=x$

Máximos y mínimos:

Para calcular los máximos y mínimos necesitamos la derivada.
Calculamos la derivada:

$$f'(x)=1-\frac{8(x-1)}{(x-1)^4}=1-\frac{8}{(x-1)^3}$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los posibles extremos relativos:

$$f'(x)=1-\frac{8}{(x-1)^3}=0\Leftrightarrow 1=\frac{8}{(x-1)^3}\Leftrightarrow (x-1)^3=2^3\Leftrightarrow x-1=2\Leftrightarrow x=3$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'(x)		+		-	0	+	
f(x)		↗	Asíntota Vertical	↘	Mínimo Relativo	↗	
		$+\infty$		$+\infty$	(3,4)		

Intervalos de Crecimiento: $]-\infty,1[\cup[3,+\infty[$

Intervalos de Decrecimiento: $]1,3]$

Máximos y mínimos: Mínimo relativo en (3,4)

Representación Gráfica:

3.- Estudia y representa gráficamente la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

1.- Dominio: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2.- Simetrías:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}$ ➔ Por tanto la función es impar ➔ simétrica respecto al origen de coordenadas.

3.- Periodicidad: La función no es periódica.

4.- Continuidad: La función es contínua en todos los puntos de su dominio, mientras que en los puntos x=-1 y x=1 presenta discontinuidades de segunda especie (Asintóticas).

5.- Puntos de corte con los ejes:

Eje x: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Eje y: $f(0)=0$ Corta a los ejes en el (0,0)

6.- Asíntotas:

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=-1

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=1

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función no presenta Asíntota Horizontal

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\left.\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty\right\}$, calculamos el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1$ ➔ m=1 ➔ Ya sabemos que la función tiene una asíntota oblicua en la dirección de la recta y=mx+b.

Vamos a calcular b haciendo el límite $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x^3-x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x}{x^2-1}\right)=0$$

Por tanto la función presenta una ***Asíntota Oblicua*** en la dirección de la recta $y = x$

7.- Máximos y mínimos:

Para calcular los máximos y mínimos necesitamos la derivada.
Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para encontrar los posibles extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	No Definida	-	0	-	No Definida	-	0	+	
f(x)		$\nearrow$	Máximo Relativo	$\searrow$	Asíntota Vertical	$\searrow$		$\searrow$	Asíntota Vertical	$\searrow$	Mínimo Relativo	$\nearrow$	
			$\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$	$-\infty$		$+\infty$	(0,0)	$-\infty$			$\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$		

<u>Intervalos de Crecimiento:</u> $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$

<u>Intervalos de Decrecimiento:</u> $[-\sqrt{3}, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \sqrt{3}]$

Máximo relativo en $-\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ y mínimo relativo en $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

8.- Concavidad y convexidad. Puntos de Inflexión:

Para ello necesitamos la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

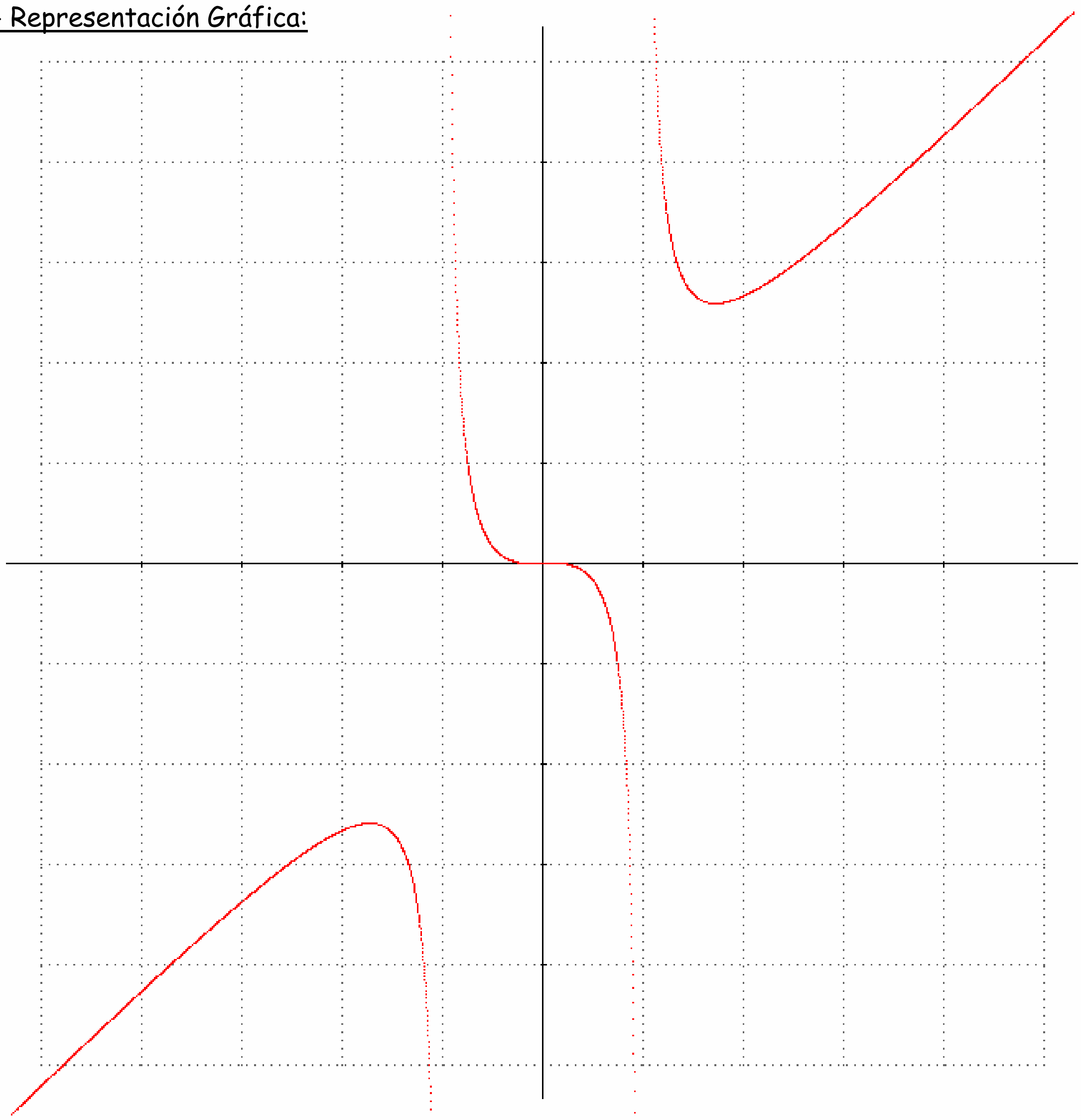
$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

selectividad-cgranada.com

Por tanto en (0,0) tenemos un punto de inflexión:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f''(x)		-	No Definida	+	0	-	No Definida	+	
f(x)		$\cap$	Asíntota Vertical	$\cup$	Punto de Inflexión	$\cap$	Asíntota Vertical	$\cup$	
					(0,0)				

9.- Representación Gráfica:



4.- Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

a) Estudiar las asíntotas, las zonas de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las zonas de concavidad y convexidad.

b) Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, realiza un esbozo de la gráfica de f.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, por tanto no tiene asíntotas verticales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0\end{array}\right\}$$ La función presenta una asíntota horizontal en y=0.

No presenta asíntotas oblicuas ya que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{1+x^2}\neq\pm\infty$

Estudiemos su derivada:

selectividad cgranada.com

$$f(x)=\frac{x}{1+x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{(1+x^2)-x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\ f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

Creamos una tabla:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	
f(x)		↘	Min Absoluto	↗	Max Absoluto	↘	
	0		-1/2		1/2		0

Intervalos de Crecimiento: $[-1,1]$

Intervalos de Decrecimiento: $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

Máximo Absoluto en $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ y mínimo absoluto en $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

Para los intervalos de concavidad y convexidad utilizaremos la segunda derivada:

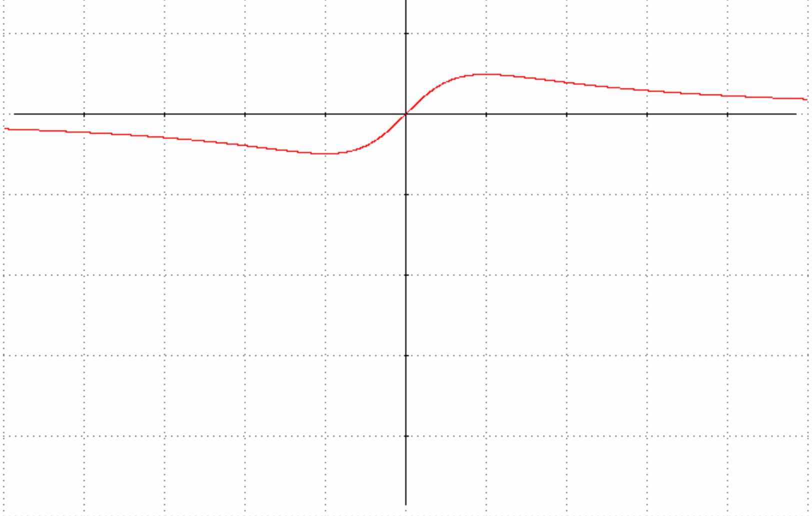
$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\cdot 2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad y \quad x=\pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
f''(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)		$\cap$	Punto de Inflexión	$\cup$	Punto de Inflexión	$\cap$	Punto de Inflexión	$\cup$	
			$\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$		(0,0)		$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$		

El dibujo de la gráfica es:



5.- Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, se pide

a) Dominio y asíntotas. Puntos de corte de la gráfica con las asíntotas, si las hay.
b) Crecimiento y decrecimiento.
c) Dibujar la gráfica a partir de los resultados anteriores.

Dominio de f; $\mathbb{R}^*$.

<u>Asíntotas Verticales:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{+\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right\}\text{La función no tiene asíntota vertical}$$

<u>Asíntota Horizontal:</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\text{La función presenta } \textit{Asíntota Horizontal} \text{ en y = 1/2}$$

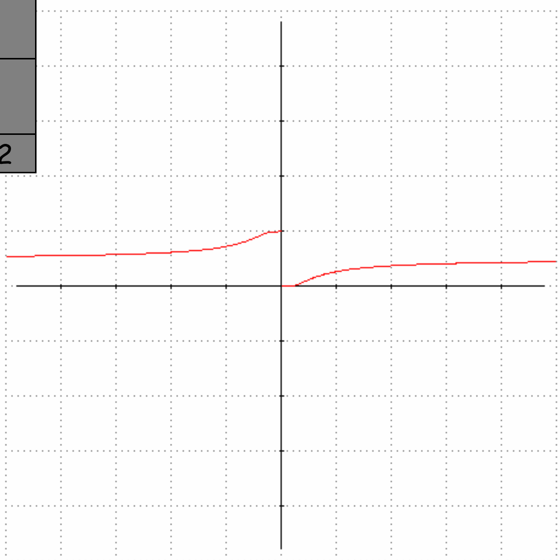
La función no presenta asíntotas oblicuas.

Calculamos la derivada para estudiar los distintos intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}>0$$

Por tanto la función es siempre creciente, Creciente en $]-\infty,0[\bigcup]0,+\infty[$
Creamos una tabla:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	No definida	+	
f(x)		↗	No definida	↗	
	1/2				1/2



La función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

El dibujo de la gráfica es:

6.- Dada la función $f(x)=x\ln x-1$, x>0, se pide:

a) Explicar de forma razonada por qué la ecuación $x\ln x-1=0$ tiene exactamente una raíz.

b) Representar gráficamente la curva de la función f.

Vamos a estudiar la función.

Dominio $]0,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x-1=\lim_{x\to 0^+} x\ln x-\lim_{x\to 0^+}1=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to 0^+}1\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}-\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}-\lim_{x\to 0^+}1=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{x}-\lim_{x\to 0^+}1=-1\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\ln x-1=+\infty\end{array}\right\}$$

Calculamos su derivada: $f'(x)=\ln x+1$; igualamos a cero: $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

Creamos una tabla:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'(x)	No Definida	-	0	+	
f(x)	No Definida	↘	Min Absoluto	↗	
	-1		$-\left(\frac{e+1}{e}\right)$		$+\infty$

<u>Intervalos de Crecimiento:</u> $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$

<u>Intervalos de Decrecimiento:</u> $\left]0,\frac{1}{e}\right]$

Mínimo absoluto en $\left(\frac{1}{e},-\frac{e+1}{e}\right)$

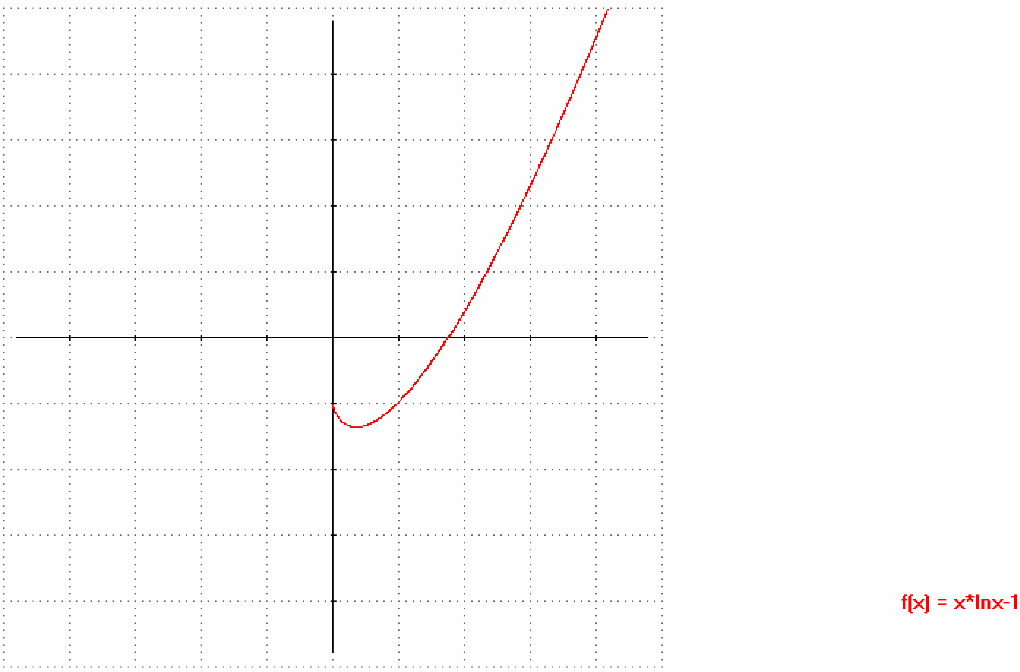
A la pregunta de explicar de forma razonada por qué la ecuación xlnx-1=0 tiene exactamente una raíz diremos que:

La función f es una función definida en X>0, vemos que la función empieza en -1, y es decreciente hasta $\frac{1}{e}$, en el que hay un mínimo absoluto, y a partir de este punto pasa a ser creciente hasta $+\infty$.

Por tanto, tenemos una función que al principio es negativa, cambia de signo a positiva, que es contínua, y que diverge a $+\infty$, entonces corta al eje x una vez sola vez, y la ecuación solo tiene una solución.

selectividad-cgranada.com

Si dibujamos la gráfica:



7.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

a) Determinar su dominio de definición.
b) Calcula sus asíntotas
c) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus máximos y mínimos.
d) Dibuja la gráfica de la función f.

Dominio de f: $]0,1[\cup]1,+\infty[$

Asíntotas Verticales:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{0^-}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to1^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$$ La función presenta una ***Asíntota Vertical*** en el punto x=1

Asíntota Horizontal:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln x}=0\end{array}\right\}$$ La función no presenta Asíntota Horizontal

selectividad-cgranada.com

Asíntotas Oblicuas o Ramas Infinitas:

Como $\left.\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty\right\}$, calculamos el límite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\ln x}=0$$

Por tanto la función presenta una ***Rama hiperbólica*** en la dirección del eje OX.

Para los intervalos de crecimiento de la función necesitamos calcular su derivada:

$$f(x)=\frac{x}{\ln x} \rightarrow f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}; f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0 \Leftrightarrow x=e$$

Creamos una tabla:

x	0		1		e		$+\infty$
f'(x)	No Definida	-	No definida	+	0	-	
f(x)	No Definida	↘	Asíntota Vertical	↘	Mínimo Absoluto	↗	
	0	$-\infty$		$+\infty$	e		$+\infty$

<u>Intervalos de Decrecimiento:</u>]0,1[U]1,e]

<u>Intervalos de Crecimiento:</u> $[e,+\infty[$

Mínimo absoluto en (e,e)

La representación gráfica es: