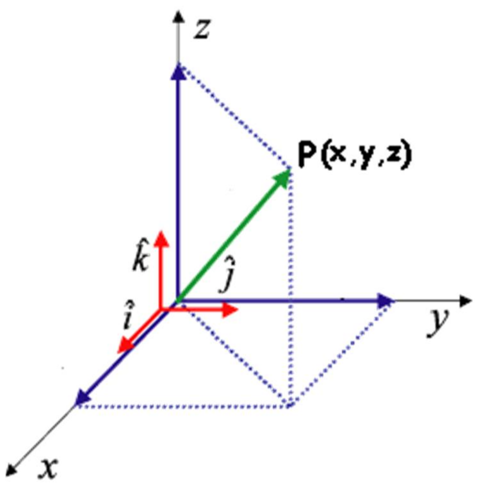
Departamento de Matemáticas
I.E. JUAN RAMÓN JIMÉNEZ
Casablanca (Marruecos)

Tema 10

Vectores en el Espacio



Raúl González Medina
I.E. Juan Ramón Jiménez
Tema 10

9.0.- Introducción

El concepto de vector fue utilizado desde finales del siglo XVII para representar y componer magnitudes con dirección y sentido, como son la fuerza y la velocidad. A finales del siglo XVIII, *Joseph Louis Lagrange* introdujo las coordenadas, con lo que aritmétizo las magnitudes vectoriales. *Gauss* utilizó los vectores para representar los números complejos. *Möbius* (en 1827) se valió de los vectores para resolver problemas geométricos, dando también sentido a las coordenadas. Entre 1832 y 1837, *Bellavitis* desarrolló un álgebra de vectores, equivalente al actual cálculo vectorial. *Hamilton,* (1805-1865) utiliza por primera vez el nombre del vector. Finalmente, *Grassmann*, entre 1844 y 1878, amplió la teoría de vectores, generalizándola a espacios n-dimensionales y definiendo los productos interno y externo de vectores.

Cuando queremos referirnos al tiempo que demanda un suceso determinado, nos basta con una magnitud (se demoró 3 segundos, saltó durante 1 minuto, volverá el próximo año, etc.). Existen muchas magnitudes físicas que pueden describirse perfectamente de esta manera simple, y que reciben el nombre de **escalares**.

Son escalares el tiempo, la masa, la densidad, el volumen, la temperatura y otras muchas más.

También existen magnitudes como el desplazamiento, la fuerza, la aceleración y otras, que para quedar perfectamente descritas necesitan dirección, además de la magnitud (¡camine 5 metros!, es una solicitud muy ambigua que puede conducir a una posición final distinta para cada persona que la reciba; en cambio, ¡ camine 5 metros por Alameda hacia el Este ! producirá exactamente el efecto requerido). Estas magnitudes se denominan **vectoriales**, y operan según el Álgebra Vectorial que veremos a continuación.

9.1.- Vectores en el espacio

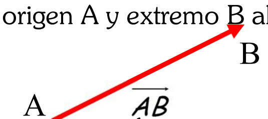
Existen magnitudes, como la temperatura, que quedan perfectamente determinadas completamente dando un valor, o un escalar. Decimos que son *magnitudes escalares*.

Sin embargo, existen otras muchas magnitudes físicas, como la fuerza, que para determinarlas completamente ha de indicarse su módulo, su sentido y su dirección. Estas magnitudes se llaman *magnitudes vectoriales*.

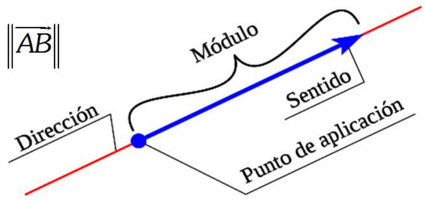
Las magnitudes vectoriales se representan mediante vectores: $\vec{F}, \vec{V}, \vec{a}...$

9.1.1.- Vectores fijos.

Dados dos puntos A y B del espacio vectorial R^3, se denomina vector fijo de origen A y extremo B al par ordenado (A,B). Se le representa por $\overrightarrow{AB}$.



Así pues, todo vector fijo viene caracterizado por una longitud (módulo), una dirección y un sentido.



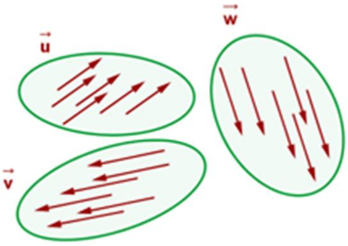
- ***Módulo:*** Es la distancia entre los puntos A y B, lo representaremos por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
- ***Dirección:*** Es la dirección de la recta que pasa por A y B y la de todas las rectas paralelas a ella.
- ***Sentido:*** Es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B. (Vemos que en cada recta hay dos sentidos, el que va de A a B y el que va de B a A.)

Decimos que dos vectores fijos son ***equipolentes*** si tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.

Se dice entonces que $\overrightarrow{AB}$ es equipolente con $\overrightarrow{CD}$ y se representa por $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$

9.1.2.- Vectores libres.

Llamamos ***vector libre***, al conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí. Cada **vector fijo** es un representante del **vector libre.**



Se denomina **dirección, módulo y sentido** de un ***vector libre***, a la dirección, el modulo y el sentido de uno cualquiera de sus representantes.

Si $\overrightarrow{AB}$ es un vector libre del espacio y O un punto cualquiera del espacio, existe un único representante de ese vector que tienen origen en el punto O.

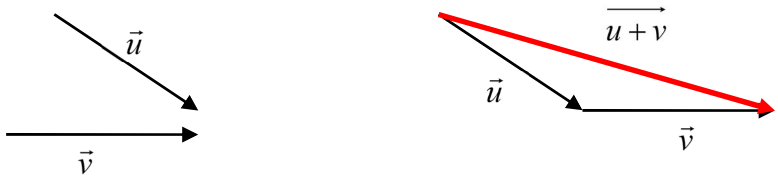
9.1.3.- Operaciones con Vectores libres.

En el conjunto de vectores libres del plano, que designaremos con R^3 se definen las dos operaciones siguientes:

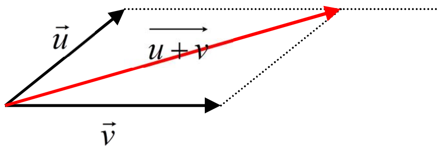
9.1.3.1.- Suma de Vectores:

Llamamos suma de los vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y la representaremos por $\overrightarrow{u+v}$, al vector libre que se obtiene de dos formas:

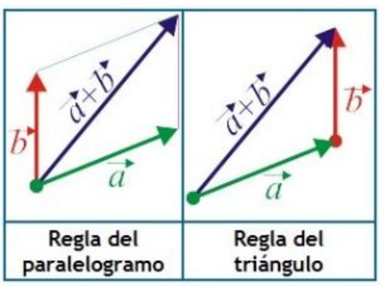
a) Regla del Triángulo: Tomamos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de forma que el origen del representante de $\vec{v}$, coincida con el extremo del representante de $\vec{u}$, de forma que el vector suma es aquel cuyo origen es el de $\vec{v}$ y cuyo extremo es el de $\vec{u}$.



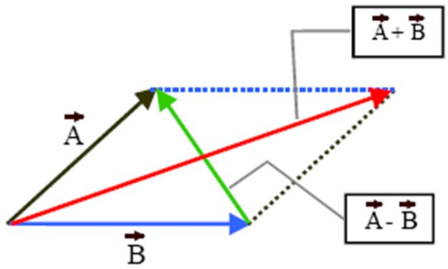
b) Regla del Paralelogramo: Si tomamos representantes de forma que $\vec{v}$ y $\vec{u}$ tengan origen común, trazando líneas paralelas a ambos vectores desde sus extremos, la diagonal del paralelogramo será el vector suma.



Propiedades de la suma de vectores:
$$\begin{cases} \bullet \text{ Asociativa:} (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \\ \bullet \text{ Elemento neutro: es el vector nulo, que representaremos por } \vec{0} \\ \qquad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u} \\ \bullet \text{ Elemento Opuesto: } (-\vec{u})+\vec{u}=\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0} \\ \bullet \text{ Conmutativa: } \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u} \end{cases}$$



La existencia de un elemento opuesto para la suma de vectores, permite ***restar vectores***. Así, dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para obtener $\overrightarrow{u-v}$ basta con sustituir el vector $\vec{v}$, por el vector $-\vec{v}$ y sumárselo al $\vec{u}$ tal y como se indica en la figura de la derecha.



Suma y resta gráfica de vectores.

Sean $\vec{u}(x,y,z)$ y $\vec{v}(x',y',z')$ dos vectores, la suma matemática de ambos da como resultado otro vector $\overrightarrow{u+v}$ de componentes: $\overrightarrow{u+v} = (x+x', y+y', z+z')$

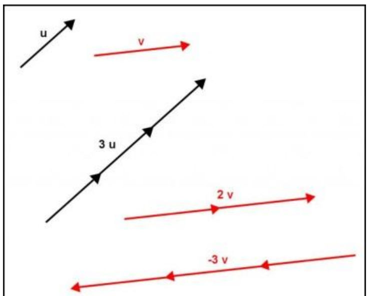
Ejemplo: (2,1,-3)+(3,-6,1)=(5,-5,-2)

9.1.3.2.- Producto por un escalar:

El producto de un escalar K, distinto de cero, por un vector libre $\vec{u}=(x,y,z)$ es otro vector libre $\overrightarrow{ku}$ con: $k\cdot\vec{u}=(kx,ky,kz)$ y que verifica:

- ***Dirección:*** La misma que $\vec{u}$
- ***Sentido:*** el mismo que $\vec{u}$ o su opuesto dependiendo del signo de k.
- ***Módulo:*** Proporcional al de $\vec{u}$.

$$\|k\cdot\vec{u}\| = |k|\cdot\|\vec{u}\|$$



Productos de vectores por escalares

***Propiedades** del producto de un vector por un escalar:*

$$\begin{cases} \bullet\ k\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = k\cdot\vec{u}+k\cdot\vec{v} \\ \bullet\ (k_1+k_2)\vec{u} = k_1\cdot\vec{u}+k_2\cdot\vec{u} \\ \bullet\ (k_1\cdot k_2)\cdot\vec{u} = k_1\cdot(k_2\cdot\vec{u}) \\ \bullet\ 1\cdot\vec{u}=\vec{u} \end{cases}$$

Ejemplo: 3·(2,-1,5)=(6,-3,15)

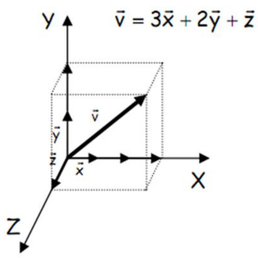
9.2.- Base de un espacio Vectorial

El conjunto de los vectores libres del espacio V^3 con las operaciones de vectores y el producto de un vector por un escalar, por cumplir las propiedades enunciadas respecto de estas operaciones tiene estructura de espacio vectorial.

9.2.1.- Combinación lineal de Vectores libres.

Dada una familia de vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots..$, se dice que un vector cualquiera $\vec{u}$ es ***combinación lineal*** de los vectores de la familia $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots..$, si existen los números reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ tales que:

$$\boxed{\vec{u} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\cdot\vec{v}_3 + \ldots\ldots}$$



***Ejemplo:* Expresar el vector (6,-1,2) como combinación lineal de los vectores (2,1,3), (3,-2,0) y (-1,1,-7)**

Para ello debemos encontrar los números reales α, β, λ , que verifiquen: $(6,-1,2) = \alpha(2,1,3) + \beta(3,-2,0) + \lambda(-1,1,-7)$

Escribimos el sistema correspondiente, y lo resolvemos:

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta-\lambda=6 \\ \alpha-2\beta+\lambda=-1 \\ 3\alpha-7\lambda=2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \left\{\alpha=\frac{5}{4} \quad \beta=\frac{5}{4} \quad \lambda=\frac{1}{4}\right\}$$

Y echo esto al final tenemos:

$$(6,-1,2) = \frac{5}{4}(2,1,3) + \frac{5}{4}(3,-2,0) + \frac{1}{4}(-1,1,-7)$$

Se dice que el conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots..\}$ de un espacio vectorial V, es ***sistema de generadores de V***, si cualquier vector $\vec{u}$ de V se puede escribir como combinación lineal de los vectores.

Ejemplo: **A) Comprobar si los vectores (3,1) y (-2,-1) forman un sistema de generadores de R^2**

Para que seas Sistema de Generadores tienen que existir $\alpha, \beta \in \Re$ que verifiquen: $(x, y) = \alpha(3,1) + \beta(-2,1)$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x = 3\alpha - 2\beta \\ y = \alpha + \beta \end{cases}$ ➔ $M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & x \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix}$

Rang(M)=Rang(M*)=2 ➔ S.C.D. ➔ Por tanto $\{(3,1);(-2,-1)\}$ es sistema de generadores de R^2

B) Comprobar si $\{(-2,1);(2,-1)\}$ es sistema de generadores de R^2

Para que sea Sistema de Generadores tienen que existir $\alpha, \beta \in \Re$ que verifiquen: $(x, y) = \alpha(-2,1) + \beta(2,-1)$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} x = -2\alpha + 2\beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases}$ ➔ $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & x \\ 1 & -1 & y \end{pmatrix}$

Rang(A)=1, Rang(B)=2 ➔ S.I. ➔ Por tanto $\{(3,1);(-2,-1)\}$ ***NO es Sistema de generadores*** de R^2

3.1.5.- Bases de un espacio vectorial

En general, se dice que un conjunto ordenado B es base de un espacio vectorial V si se cumplen las siguientes condiciones:

- Todos los elementos de B pertenecen al espacio vectorial V.
- Los elementos de B son linealmente independientes.
- Todo elemento de X se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base B (es decir, B es un sistema generador de V)

3.1.5.1.- Dependencia e independencia lineal de vectores.

- Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots, \vec{v}_n\}$ se dice que son ***linealmente independientes (l.i.)*** (o que el sistema es libre), si dada la siguiente expresión:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0$$

Se verifica que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots = \alpha_n = 0 \qquad \forall \alpha \in R$$

- Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots, \vec{v}_n\}$ se dice que son ***linealmente dependientes (l.d.)*** (o que el sistema es ligado), si dada la siguiente expresión:

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0$$

existe algún escalar no nulo. ($\exists \alpha_i \in R / \alpha_i \neq 0$)

3.1.5.2.- Base.

Un conjunto de vectores $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots, \vec{v}_n\}$ se dice que es una ***base de un espacio vectorial***, si es Sistema de generadores de dicho espacio vectorial y además los vectores son linealmente independientes.

Hemos visto que, dados tres vectores no nulos $\vec{x}$, $\vec{y}$ y $\vec{z}$ de diferente dirección y cualquier otro vector, $\vec{v}$, podemos encontrar siempre tres números reales k_1, k_2 y k_3, de manera que:

$$\vec{v} = k_1\vec{x} + k_2\vec{y} + k_3\vec{z}$$

Diremos que el conjunto $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ constituye una base de V^3.

- ***Los vectores $\vec{u}, \vec{v}$, y $\vec{w}$ forman una base de R^3 si y solo sí:*** $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

Ejemplo: ¿Forman los vectores (1,1,1),(2,1,-1) y (1,0,5) una base de R^3?

Para que 3 vectores de R^3 formen una base, tiene que ocurrir que sean l.i. Para comprobarlo, calculamos su determinante. (no es necesario que sean S.G.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Los vectores son l.i. y forman una base de } R^3$$

9.3.- Producto escalar

Se denomina *producto escalar* de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al ***número*** que resulta de multiplicar el módulo de $\vec{A}$ por el módulo de $\vec{B}$ y por el coseno de ángulo que forman sus líneas de acción. Matemáticamente:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot \text{Cos}(AB)$$

Propiedades:

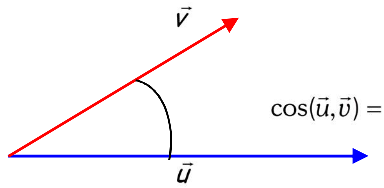
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$
- $(\lambda\cdot\vec{u})\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares (u ortogonales) o alguno de ellos es nulo.

$\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V^2$ y $\lambda \in R$

9.3.1.- Aplicaciones del producto escalar:

- Calculo del ángulo entre dos vectores:

$$Cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \;\Rightarrow\; \alpha = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

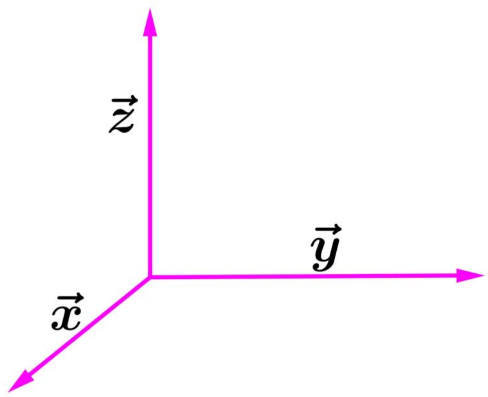


$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

- Comprobar si dos vectores, no nulos, son ortogonales. $\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- Calculo del módulo de la proyección de un vector sobre otro: $|proy_v\vec{u}| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

9.4.- Bases ortogonales y ortonormales. Base Canónica

9.4.1.- Base Ortogonal:



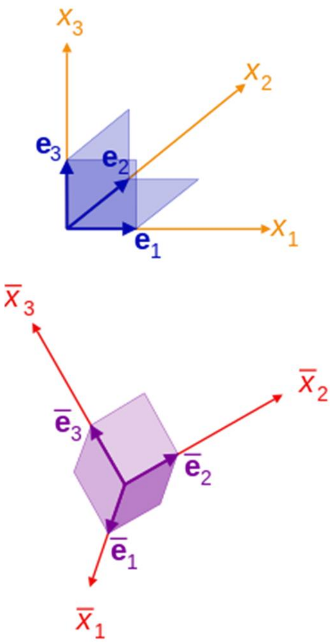
Un conjunto de vectores forman una ***base ortogonal***, cuando dichos vectores forman una base y además son ortogonales dos a dos.

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\vec{z} = \vec{y}\cdot\vec{z} = 0$$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$$

$$\boxed{B_{ortogonal} = Base \; + \; \perp}$$

9.4.2.- Base Ortonormal:



✓ Un vector $\vec{u}$ se dice ***normado*** o unitario si $\|\vec{u}\| = 1$

✓ Dado un vector cualquiera no nulo $\vec{v}$, podemos obtener un vector unitario con la misma dirección y sentido que éste, simplemente dividiéndolo por su módulo:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Un conjunto de vectores forman una ***base ortonormal***, cuando dichos vectores forman una base, son ortogonales dos a dos y además son **unitarios.**

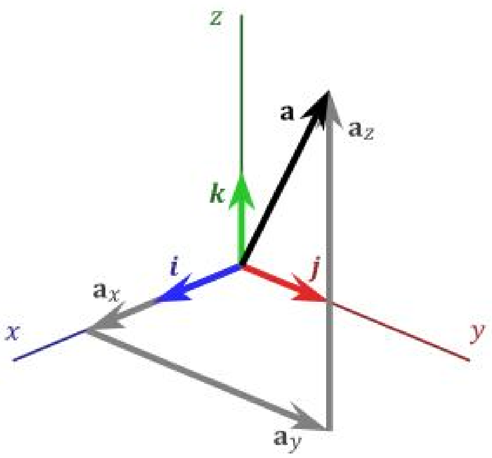
$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = 0$$

$$\det\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right) \neq 0$$

$$\left\|\overrightarrow{e_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{e_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{e_3}\right\| = 1$$

$$\boxed{B_{ortonormal} = Base + \perp + Unitarios}$$

9.4.3.- Base Canónica de R^3



La ***base ortonormal canónica*** de R^3 es la formada por los vectores:

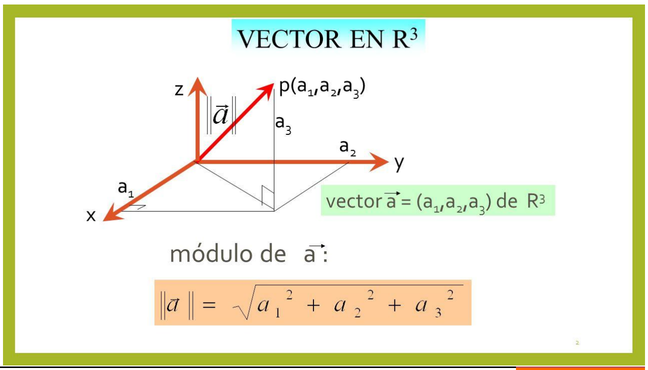
$$B_C\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \qquad B_c = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$$

Por tanto, cualquier vector $\vec{a} = \left(\overrightarrow{a_x}, \overrightarrow{a_y}, \overrightarrow{a_z}\right)$ de R^3 se puede escribir como combinación lineal de los versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ de la base canónica:

$$\vec{a} = a_x \cdot (1,0,0) + a_y \cdot (0,1,0) + a_z \cdot (0,0,1) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

9.5.- Módulo de un vector

De la definición de producto escalar se deducía que $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, por tanto: ***El módulo de un vector*** es la raíz cuadrada positiva del producto escalar del vector por sí mismo: $\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$



Sea $B = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, una base ortonormal de V^3, y $\vec{u}$ un vector cualquiera de V^3. Podemos expresar dicho vector de la forma:

$$\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Así resulta:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2$$

Y de aquí la expresión del módulo del vector $\vec{u}$ en función de sus componentes cartesianas:

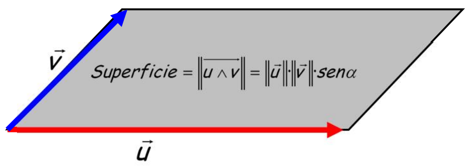
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

9.6.- Producto Vectorial

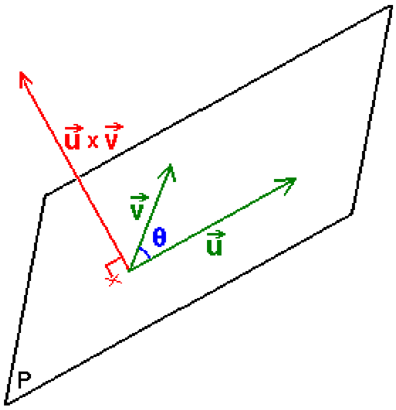
El producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es otro vector que lo representaremos por $\overrightarrow{u \wedge v}$ y que está caracterizado por:

a) Su módulo es el producto de los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ multiplicado por el seno del ángulo que forman sus líneas de acción:

$$\left\|\overrightarrow{u \wedge v}\right\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot sen\alpha$$

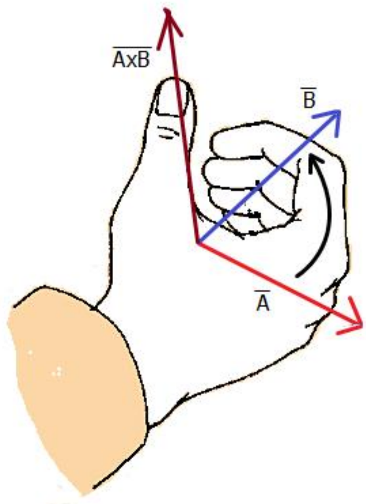


y es igual al área del paralelogramo formado por ambos vectores.



b) Su dirección es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Su sentido viene dado por la regla de Maxwell en el supuesto de que el primer vector vaya hacia el segundo por el camino más corto.



Si los vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ están referidos a una base ortonormal B, el vector $\overrightarrow{u \wedge v}$ viene dado por la expresión:

$$\overrightarrow{u \wedge v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

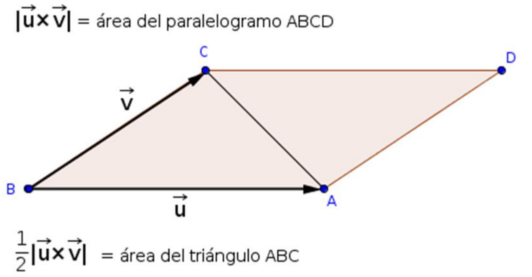
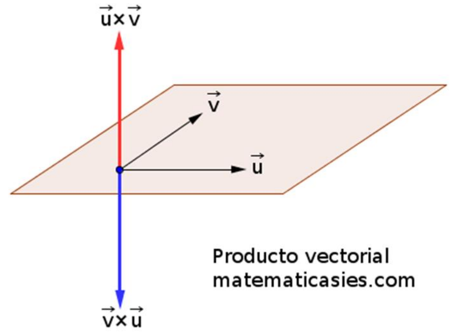
Propiedades:

- $\overrightarrow{u \wedge v} = -\overrightarrow{v \wedge u}$
- No cumple en general la propiedad asociativa.
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $\lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v})$ con $\lambda \in R$

Producto vectorial de vectores unitarios

$$\hat{i} \wedge \hat{i} = \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{k} = \vec{0}$$
$$i \wedge \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \wedge \hat{i} = -\hat{k}$$
$$\hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \wedge \hat{j} = -\hat{i}$$
$$\hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j} \qquad \hat{i} \wedge \hat{k} = -\hat{j}$$

9.6.1.- Aplicaciones del Producto vectorial:

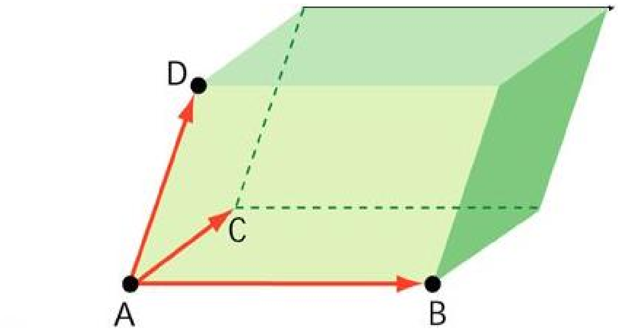
<table>
<tr><th>Cálculo del área de un triángulo de vértices A, B, C.</th><th>Obtención de un vector perpendicular a otros dos</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$A_T = \frac{1}{2}\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|$$</td><td>los vectores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$ son perpendiculares a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ simultáneamente</td></tr>
</table>

9.7.- Producto Mixto

Se llama producto mixto de 3 vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y se designa por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ al escalar que se obtiene al operarlos de la siguiente forma:

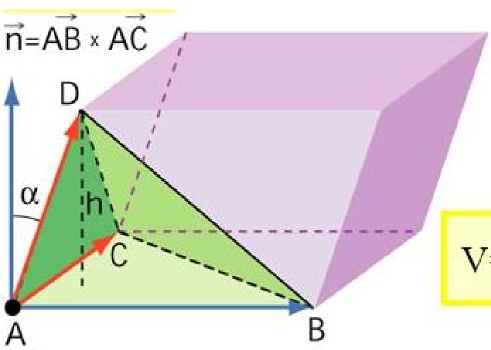
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}\cdot(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

- El valor absoluto del producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.



$$\boxed{V = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}$$

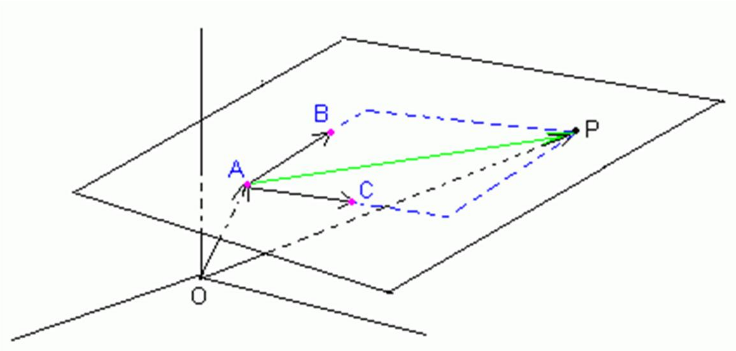
- El Volumen del tetraedro ABCD es igual a: $V = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$



$$\text{Base} = S(ABC) = \frac{1}{2}\ \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\text{Altura} = h = \left|\overrightarrow{AD}\right| \cos(\widehat{\overrightarrow{AD}, \vec{h}}) \quad \text{Por tanto:}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}$$



Como consecuencia, los puntos OABC son ***coplanarios***, si y solo si, el volumen del paralelepípedo es nulo, es decir, el producto mixto de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es cero.

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$$

9.8.- Ejercicios Resueltos

1.- ¿Para qué valores de α son linealmente independientes los vectores (2,-3,1);(-4,6,-2) y (α ,1,2)?.

3 Vectores son linealmente independientes (l.i.) cuando su determinante es distinto de cero. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \\ \alpha & 1 & 2 \end{vmatrix} = (24-4+6\alpha)-(6\alpha-4+24)=20+6\alpha-6\alpha-20=0$$

Por tanto, como el determinante es 0, son linealmente dependientes. Por lo que no existe ningún valor de α para que sean linealmente independientes.

Si observamos el vector (2,-3,1) y el (-4,6,-2) vemos que ambos son proporcionales, y por tanto linealmente dependientes. Así que estos vectores no serán nunca l.i.

2.- Considera estos 3 vectores u(1,1,1); v(2,2,a) y w(2,0,0).
a) Halla los valores de a para los que los vectores anteriores son linealmente independientes.

Igual que en el ejercicio anterior, para que sean l.i. su determinante ha de ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2a-4 \neq 0; \Rightarrow a \neq 2$$

Por tanto si $a \neq 2$ entonces los vectores son l.i.

Y Si a=2, los vectores u y v son proporcionales, y por tanto linealmente dependientes (l.d.).

b) Determina los valores de a para que los vectores u+v y u-w sean ortogonales.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es igual a cero. Por tanto:
$(u+v)\cdot(u-w)=(-3+3+1+a)=1+a=0$ ➔ de donde a=-1

Por lo que si a= -1, entonces (u+v) y (u-w) son ortogonales.

3.- Determina los valores de a y b, con a>0, para que los vectores $v_1(a,b,b)$; $v_2(b,a,b)$ y $v_3(b,b,a)$ sean unitarios y ortogonales dos a dos.

Para que un vector sea unitario, tiene que ocurrir que su módulo sea la unidad, o sea, que su módulo sea igual a 1.
Haciendo que los 3 vectores sean unitarios, obtenemos la misma ecuación:

$$a^2 + 2b^2 = 1$$

Y para que sean ortogonales dos a dos, los productos escalares $v_1 \cdot v_2=0$, $v_1 \cdot v_3=0$ y $v_2 \cdot v_3=0$. De donde obtenemos la misma ecuación:

$$2ab + b^2 = 0$$

Si resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones: $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 1 \\ 2ab + b^2 = 0 \end{cases}$ obtenemos: (b=0, a=±1, pero como a>0, entonces a=1) y (b=2/3 y a=1/3)

4.- Encuentra el valor del parámetro a para que los vectores $v_1(1,a,2)$, $v_2(2,a,1)$ y $v_3(1,1,1)$ formen una base.

Para que un conjunto de vectores formara una base, tenia que ocurrir que los vectores fueran linealmente independientes (l.i.) y además sistema de generadores (S.G.). Como en este caso nos dan 3 vectores y estamos en el espacio vectorial R^3, es suficiente con que estos 3 vectores sean l.i., y para ello su determinante ha de ser distinto de cero.

$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+4+a)-(2a+a+2a) = 2a+4-4a-1 = 3-2a$ ➔ Si igualamos a cero obtenemos $a = \frac{3}{2}$,

Por tanto si $a \neq \frac{3}{2}$, entonces los vectores son l.i. y forman una base.

Si a=1, escriba el vector w(6,0,2) como combinación lineal de los vectores anteriores.

Si a=1 ➔ $w(6,0,2) = \alpha(1,1,2) + \beta(2,1,1) + \gamma(1,1,1)$, de donde: $\begin{cases} 6 = \alpha + 2\beta + \gamma \\ 0 = \alpha + \beta + \gamma \\ 2 = 2\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$.

Resolviendo el sistema obtenemos: $\alpha = 2, \beta = 6, \gamma = -8$

Por tanto: $w = 2v_1 + 6v_2 - 8v_3$

5.- Dado el vector u(-2,2,-4), hallar las coordenadas de los siguientes vectores:
a) Unitarios y de la misma dirección que u.

Un vector es unitario si su módulo es igual a uno, por tanto para calcular un vector unitario con la misma dirección de otro, lo único que tenemos que hacer es dividir el vector por su módulo:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(-2,2,-4)}{\sqrt{24}} = \frac{(-2,2,-4)}{2\sqrt{6}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right)$$

b) Paralelos a u y de módulo 6

Para que sean paralelos y de módulo 6, lo que tenemos que hacer es multiplicar el vector unitario por 6, y tenemos un vector paralelo (con la misma dirección) y de módulo 6·1=6.

$$\vec{w} = 6\hat{u} = \left(\frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-12}{\sqrt{6}}\right)$$

6.- Dados los vectores $u_1(2,0,0)$; $u_2(0,1,-3)$ y $u_3=a\cdot u_1+b\cdot u_2$, ¿Qué relación deben satisfacer a y b para que el módulo de u_3 valga la unidad?.

Para que el módulo de u_3 sea la unidad:

$u_3(x,y,z) = a(2,0,0) + b(0,1,-3)$ de donde: $\begin{cases} x = 2a \\ y = b \\ z = -3b \end{cases}$, el módulo tiene que se 1:

$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{4a^2+b^2+9b^2} = 1$ ➔ $\boxed{4a^2+10b^2=1}$ y esta es la relación entre a y b.

7.- Determina un vector v de R^3, sabiendo que:

- ***La suma de sus coordenadas es 3.***
- ***V es combinación lineal de los vectores (2,2,2) y (-1,1,0)***
- ***Los vectores (1,0,1);(0,1,0) y v son linealmente independientes.***

Si la suma de sus coordenadas es tres, tenemos : $x+y+z=3$

Si es combinación lineal: $v(x,y,z) = \alpha(2,2,2)+\beta(-1,1,0)$

Y si son linealmente dependientes, entonces: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ de donde $z-x=0$ y de donde Z=X.

Si metemos esto en la primera ecuación y despejamos y obtenemos $y = 3-2x$

Y sustituyendo en la combinación lineal, obtenemos:
$v(x,3-2x,x) = \alpha(2,2,2)+\beta(-1,1,0)$, sistema que resolviendo nos da como solución:

$(z=1, \alpha=\frac{1}{2}, \beta=0)$, por tanto el vector pedido es: $\boxed{V=(1,1,1)}$

8.- Hallar los valores de x que hacen que los siguientes vectores constituyan una base del espacio vectorial R^3: u(x,0,1); v(1,x,2) y w(x,1,1). Expresar el vector t = (-1,0,3) como combinación lineal de $\{u,v,w\}$ para x=0.

Para que 3 vectores de R^3 formen una base, lo único que tengo que hacer comprobar que son l.i., y si lo son pues "safi", es suficiente.

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x^2+1)-(x^2-2x) = 2x+1 = 0 \text{ ➔ } x = \frac{1}{2}$$

Así que para que estos 3 vectores formen una base ha de ocurrir que x sea distinto de ½: $x \neq \frac{1}{2}$.

Si x=0, entonces $(-1,0,3) = \alpha(0,0,1)+\beta(1,0,2)+\gamma(0,1,1)$, de donde:

$$\begin{cases} -1 = \beta \\ 0 = \gamma \\ 3 = \alpha + 2\beta + \gamma \end{cases} \quad \text{y resolviendo obtenemos: } \alpha = 5$$

Así que:

$$\boxed{(-1,0,3)=5\vec{v}_1-\vec{v}_2}$$

9.- Hallar el área del triángulo de vértices A(1,1,1), B(0,2,5) y C(4,0,2)

Para hallar el área de un triángulo lo hacemos con: $S_T=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$. Lo primero es calcular los vectores $\overrightarrow{AB}=(-1,1,4)$ y $\overrightarrow{AC}=(3,-1,1)$ ➔ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=5\hat{i}+13\hat{j}-2\hat{k}$ y de aquí calculamos la superficie: $S_T=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{25+169+4}=\frac{\sqrt{198}}{2}$

10.- Hallar un vector que sea perpendicular, a la vez, a los vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$ y $\vec{v}=(2,3,1)$

Para hallar un vector perpendicular a ambos, hemos de hacer el producto vectorial.

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=-3\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}=(-3,-3,3)$$

11.- Dada la base $B=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(0,\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)\right\}$ comprobar si es normada, ortogonal u ortonormal.

Para que sea ortogonal, tiene que ocurrir que sus vectores sean perpendiculares, y para ello el producto escalar de todos los vectores ha de ser nulo.

$$\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(0,\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, como este producto no es nulo, los vectores no son perpendiculares y por tanto no son ortogonales. Si no son ortogonales, tampoco son ortonormales.

Vamos a ver si la base es normada, para que sea normada, sus vectores han de ser unitarios, o sea, tiene que tener todos módulo uno.

$$\left.\begin{array}{l} \left|\vec{b}_1\right|=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}}=\sqrt{5}=1 \\ \left|\vec{b}_2\right|=\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}=\sqrt{5}=1 \\ \left|\vec{b}_3\right|=\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}=\sqrt{5}=1 \end{array}\right\}$$ ➔ por tanto la base B es normada.

12.- Hallar un vector perpendicular a $\vec{v}=(2,3,4)$ y $\vec{w}=(-1,3,-5)$ y que sea unitario.

Para encontrar un vector que sea perpendicular a otros dos, lo que hacemos es calcular su producto vectorial.

$$\vec{u}=\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 3 & -5\end{vmatrix}=\hat{i}(-15-12)-\hat{j}(-10+4)+\hat{k}(6+3)=-27\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k}$$

Como lo que nos piden es un vector unitario perpendicular a ambos, lo que vamos a hacer es normalizar este vector.

$$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{-27\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k}}{\sqrt{729+36+81}}=\frac{-27\hat{i}+6\hat{j}+9\hat{k}}{\sqrt{846}}=\frac{-9\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{94}}=\frac{-9\sqrt{94}}{94}\hat{i}+\frac{2\sqrt{94}}{94}\hat{j}+\frac{3\sqrt{94}}{94}\hat{k}$$

13.- Sean los vectores $\vec{v}_1(0,1,0)$; $\vec{v}_2(2,1,-1)$ y $\vec{v}_3(2,3,-1)$:

a) ¿Son los vectores linealmente independientes?

Para que tres vectores sean linealmente dependientes, su determinante tiene que ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0$$

Por tanto son linealmente dependientes.

a) ¿Para qué valores de a el vector (4,a+3,-2) puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$?.

$$(4,a+3,-2)=\alpha(0,1,0)+\beta(2,1,-1)+\gamma(2,3,-1)$$

De donde: $\begin{cases}4=2\beta+2\gamma\\ a+3=\alpha+\beta+3\gamma\\ -2=-\beta-\gamma\end{cases}$

Este sistema es S.C.I. porque la primera y la tercera ecuación son proporcionales.

$\begin{cases}\beta=2-\gamma\\ a+3=\alpha+2-\gamma+3\gamma=\alpha+2+2\gamma\end{cases}$ ➔ $a=\alpha+2\gamma-1$

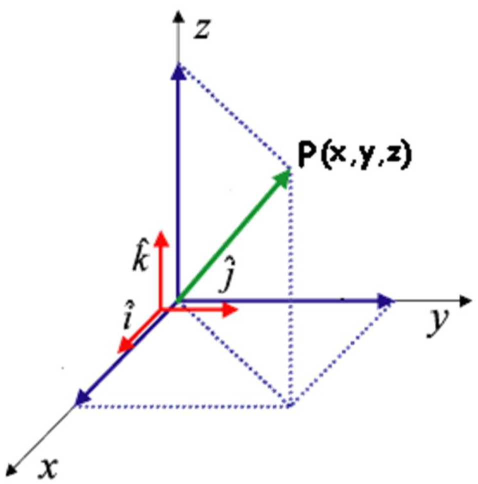
Pero como α,γ tienen infinitos valores, entonces a también.

De donde a puede ser cualquier número real.

Departamento de Matemáticas
I.E. JUAN RAMÓN JIMÉNEZ
Casablanca (Marruecos)

Tema 10

Anexo



Raúl González Medina

I.E. Juan Ramón Jiménez

Tema 10

Definición: Coordenadas.

En un espacio vectorial V, fijada una base $\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$, todo vector $u\in V$ puede ponerse de forma única como combinación lineal de dicha base:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots \alpha_n v_n$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se llaman coordenadas del vector u en la base $\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$.

Ejemplos de coordenadas.

1. Coordenadas en distintas bases.

En $\Re^2$ fijemos la base canónica, { (1,0), (0,1) }. Consideremos el vector **v**=(1,2). Para hallar sus coordenadas en esta base, ponemos u como combinación lineal de la misma:

$$(1,2)=\mathbf{1}\cdot(1,0) + \mathbf{2}\cdot(0,1)$$

Por tanto, (1,2) son las coordenadas de **v** en base canónica.

Cuando se utiliza la base canónica, obtenemos el sentido usual de "coordenadas".

Pero cuando se utiliza otra base no es así.

Por ejemplo, en $\Re^2$ fijemos ahora la base **B** = { (2,3), (1,–1) } y consideremos el mismo vector **v**=(1,2). Hallemos sus coordenadas en la base **B**. Para poner **v** como combinación lineal de dicha base, planteamos el sistema

$(1,2)= \alpha\,(2,3)+\beta\,(1,-1)$ cuya solución es $\alpha = \frac{3}{5}$, $\beta = -\frac{1}{5}$. Así pues,

$$\mathbf{v} = \frac{3}{5}\,(2,3) - \frac{1}{5}\,(1,-1)$$

Por tanto, $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son las coordenadas de **v** en base **B**.

No debe confundirse el vector con sus coordenadas; aquí el vector sigue siendo **v**=(1,2), y las coordenadas $\left(\frac{3}{5}\ ,\ -\frac{1}{5}\right)$ son un par de números que indican cómo expresar **v** en combinación lineal de la base B.

2. Si u es el vector que tiene como coordenadas (5, –6) en la base (1,2) (3,4), ¿cuál es el vector u?

Según la definición de coordenadas,

$$u = 5\,(1,2) + (-6)\,(3,4) = (-13, -14).$$

3. El vector cero tiene coordenadas (0, . . . ,0) en cualquier base.

4. Coordenadas en un subespacio.

En $\Re^3$, sea el subespacio S generado por los vectores (1,1,0) y (0,0,1). (Se trata del plano **x=y** en $\Re^3$). Los dos vectores son independientes, por tanto forman base de S.

Consideremos el vector **v** = (2,2,3) perteneciente a S. Hallemos las coordenadas de este vector respecto a la base (1,1,0), (0,0,1) de S. Para ello expresamos **v** como combinación lineal de dicha base:

$$(2,2,3)= \mathbf{2}\cdot(1,1,0) + \mathbf{3}\cdot(0,0,1)$$

Así pues, las coordenadas de **v** en esta base de S son (2,3).

No debe sorprendernos que **v** tenga sólo 2 coordenadas. El vector **v** ciertamente tendría 3 coordenadas como elemento de $\Re^3$, pero tiene 2 coordenadas como elemento del plano S, que es un subespacio de dimensión 2.

Definición: Matriz del cambio de base.

En un espacio vectorial V, dadas dos bases B y B' , se llama matriz de cambio de base (o de cambio de coordenadas) de B a B' a la matriz que contiene en sus columnas las coordenadas de los vectores de la base B expresados en función de la base B'.

Su utilidad es la siguiente: Conocidas las coordenadas de un vector en base B, nos permitirá hallar las coordenadas de dicho vector en base B'.

En efecto, sean $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ las coordenadas de un vector en base B, y sea P la matriz de cambio de base de B a B'. Entonces:

$$P\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{o lo que es lo mismo,} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

obteniéndose así $(b_1, b_2, \ldots b_n)$ las coordenadas del vector en base B'.

Ejemplo.

Consideremos en $\Re^2$ las dos bases siguientes:

la base del ejemplo (1) anterior, B ={ (2,3), (1, –1) }

la base canónica B' ={ (1,0), (0,1) }

- Vamos a construir la matriz de cambio de base de B a B'.

Para ello debemos expresar los vectores de la base B en función de la base canónica B'.

$(2,3) = \mathbf{2}\cdot(1,0) + \mathbf{3}\cdot(0,1)$ → coordenadas (2,3)

$(-1,1)= \mathbf{1}\cdot(1,0) - \mathbf{1}\cdot(0,1)$ → coordenadas (1, –1)

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B a B':

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Del mismo modo podemos construir la matriz de cambio de base de B' a B.

Para ello expresamos los vectores de la base canónica B' en función de la base B. Podemos hallarlo planteando dos sistemas de ecuaciones, de los cuales se obtendrá

$$(1,0) = \frac{1}{5}(2,3) + \frac{3}{5}(1,-1) \rightarrow \text{coordenadas } \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$(0,1) = \frac{1}{5}(2,3) - \frac{2}{5}(1,-1) \rightarrow \text{coordenadas } \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

Introduciendo estas coordenadas en las columnas de una matriz, tendremos la matriz de cambio de base de B' a B.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar estas matrices para hallar las coordenadas en base B del vector **v**=(1,2). Tenemos sus coordenadas en la base canónica B' que son (1,2). Utilizamos la matriz Q de cambio de base de B' a B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Así hemos obtenido $\left(\frac{3}{5} \quad , \quad -\frac{1}{5}\right)$, las coordenadas de v en base B. Comprobar que son las mismas que se obtuvieron en el ejemplo (1) anterior.

Podemos volver a las coordenadas en base B' utilizando la matriz P de cambio de base de B a B':

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices de cambio de base.

1. Toda matriz de cambio de base es cuadrada nxn, donde n es la dimensión del espacio al que se refieren las bases.

2. Toda matriz de cambio de base es inversible (es decir, con determinante no nulo).

Además, la matriz de cambio de B a B' es inversa de la matriz de cambio de B' a B.

- Comprobar en el ejemplo anterior que P y Q son inversas entre sí. Por tanto, después de hallar P, podríamos haber hallado Q como P^{-1}.

3. La matriz de cambio de una base B a la misma base B, es la matriz identidad.

- Observar en el ejemplo anterior que la matriz más fácil de obtener es la **P**, que pasa de una base B a la base canónica, pues basta escribir en las columnas la base B.

$$\begin{tikzcd} \text{Base B} \arrow[r, bend left, "P"] & \text{Base canónica} \arrow[l, bend left, "Q"] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\textbf{P= base B en columnas; Q=P}^{-1}}$

Ejemplo 1: *En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases*

$$\mathscr{B}_1 = \{(5,3,1),(1,-3,-2),(1,2,1)\}, \quad \mathscr{B}_2 = \{(-2,1,0),(-1,3,0),(-2,-3,1)\}$$

calcule la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$.

Para calcular la matriz asociada debemos calcular las coordenadas de los vectores de la base $\mathscr{B}_2$ respecto de los vectores de la base $\mathscr{B}_1$, es decir, debemos calcular los $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned}
(-2,1,0) &= a_{11}(5,3,1)+a_{21}(1,-3,-2)+a_{31}(1,2,1) = (5a_{11}+a_{21}+a_{31}, 3a_{11}-3a_{21}+2a_{31}, a_{11}-2a_{21}+a_{31}) \\
(-1,3,0) &= a_{12}(5,3,1)+a_{22}(1,-3,-2)+a_{32}(1,2,1) = (5a_{12}+a_{22}+a_{32}, 3a_{12}-3a_{22}+2a_{32}, a_{12}-2a_{22}+a_{32}) \\
(-2,-3,1) &= a_{13}(5,3,1)+a_{23}(1,-3,-2)+a_{33}(1,2,1) = (5a_{13}+a_{23}+a_{33}, 3a_{13}-3a_{23}+2a_{33}, a_{13}-2a_{23}+a_{33})
\end{aligned}$$

Esto se reduce a la resolución de tres sistemas de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcl} -2 &=& 5a_{11}+a_{21}+a_{31} \\ 1 &=& 3a_{11}-3a_{21}+2a_{31} \\ 0 &=& a_{11}-2a_{21}+a_{31} \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{rcl} -1 &=& 5a_{12}+a_{22}+a_{32} \\ 3 &=& 3a_{12}-3a_{22}+2a_{32} \\ 0 &=& a_{12}-2a_{22}+a_{32} \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{rcl} -2 &=& 5a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ -3 &=& 3a_{13}-3a_{23}+2a_{33} \\ 1 &=& a_{13}-2a_{23}+a_{33} \end{array}\right\}$$

Los tres tienen en común la matriz de coeficientes, de forma que podemos resolverlos simultáneamente sin más que encontrar la matriz escalonada reducida de:

$$\left(\begin{array}{rrr|r|r|r} 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Las columnas 4, 5 y 6 de la escalonada reducida será la matriz buscada.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-4F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 0 & -17 & -36 & 46 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -5 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -17 & -36 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{-F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -5 & -10 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 36 & -45 \end{array}\right)$$

Hemos resuelto los tres sistemas simultáneamente, las soluciones serían:

$$\begin{array}{lll} a_{11}=-5 & a_{21}=6 & a_{31}=17 \\ a_{12}=-10 & a_{22}=13 & a_{32}=36 \\ a_{13}=12 & a_{23}=-17 & a_{33}=-45 \end{array}$$

por lo que la matriz de cambio de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ es $P = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 12 \\ 6 & 13 & -17 \\ 17 & 36 & -45 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2: *En el $\mathbb{R}-$espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, se consideran dos bases:*

$$\mathscr{B}_1 = \{\vec{u}_1 = (1,0,1), \vec{u}_2 = (1,1,0), \vec{u}_3 = (0,0,1)\}$$
$$\mathscr{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$$

Si la matriz de cambio de base, tomando como base nueva la base $\mathscr{B}_2$ y como base antigua $\mathscr{B}_1$ es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

¿Puedes calcular los vectores de la base $\mathscr{B}_2$?

Las columnas de la matriz P son las coordenadas en la base antigua de los vectores de la base nueva, es decir,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 = (1,0,1)+2(1,1,0)-(0,0,1) = (3,2,0) \\
\vec{v}_2 &= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 = (1,0,1)+(1,1,0)-(0,0,1) = (2,1,0) \\
\vec{v}_3 &= 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = 2(1,0,1)+(1,1,0)+(0,0,1) = (3,1,3)
\end{aligned}$$