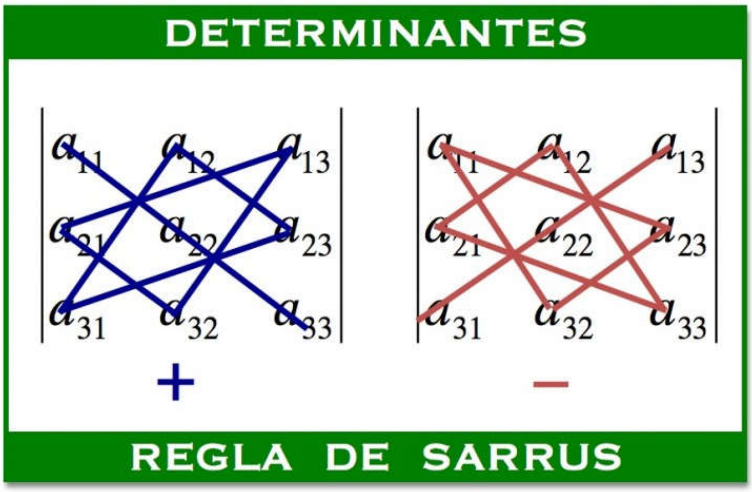
Departamento de Matemáticas
I.E. JUAN RAMÓN JIMÉNEZ
Casablanca (Marruecos)

Tema 8

Determinantes



Raúl González Medina

I.E. Juan Ramón Jiménez

Tema 8

8.0.- Introducción

El concepto de determinante de una matriz cuadrada tiene una gran relevancia dentro de la teoría de matrices. Los determinantes resultan de gran utilidad a la hora de resolver determinados sistemas de ecuaciones lineales (los llamados *sistemas de Cramer*), discutir la existencia de solución de sistemas de ecuaciones lineales generales (mediante el concepto de rango de una matriz y del ***Teorema de Rouché Frobenious***), y analizar la dependencia lineal de un conjunto de vectores (lo cual, entre otras cosas, nos permitirá identificar posibles bases de un espacio vectorial). Además, la interpretación geométrica de los determinantes nos permite calcular, de forma sencilla, áreas y volúmenes de determinadas figuras geométricas, realizar productos vectoriales, y hallar las ecuaciones de un plano en el espacio. Los campos de aplicación de la teoría de los determinantes y, en general, de la teoría de matrices son muy amplios, y abarcan desde las más clásicas aplicaciones en las áreas de física, economía, e ingeniería hasta aplicaciones más recientes como la generación de gráficos por ordenador, la teoría de la información, y la criptografía.

8.1.- Determinantes

El determinante de una matriz cuadrada A es un número que se obtiene a partir de los elementos de la matriz. El determinante de la matriz A de orden n se simboliza por $|A|$ y se representa:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

8.1.1.- Cálculo de Determinantes de Segundo Orden

Un determinante de segundo orden es igual ***al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.***

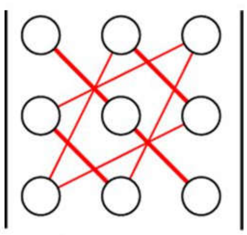
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

<u>Ejemplos:</u> $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 14 = 26$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$

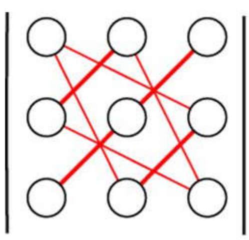
8.1.2.- Cálculo de Determinantes de Tercer Orden

Para calcular el determinante de una matriz de orden 3, utilizamos la regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33})$$

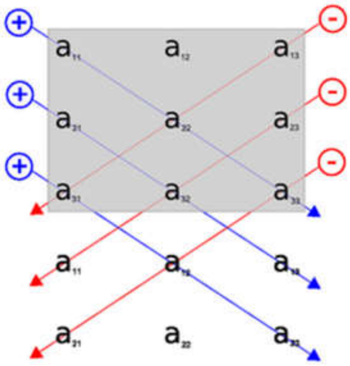


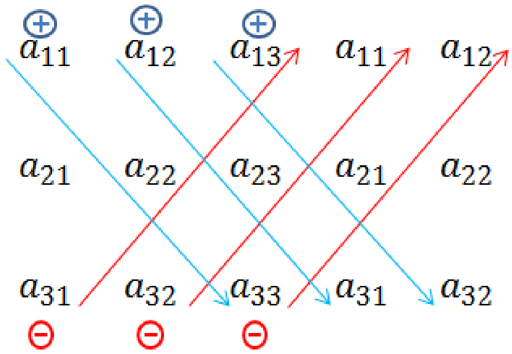
Factores con su signo



Factores con el signo cambiado

Existen otras formas de hacer la regla de Sarrus, ya sea repitiendo las dos primeras filas (caso de la izquierda) o repitiendo las dos primeras columnas, caso de la derecha.





Ejemplos: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-6+0+126)-(162+0-10) = 120-152 = -32$ $\quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $\quad |C| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$

8.2.- Propiedades de los Determinantes

Las más importantes, que conviene destacar son las siguientes:

1.- *Un determinante que tiene todos los elementos de una línea (fila o columna) iguales a 0, es igual a cero.*

Ejemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$

2.- *Un determinante que tiene dos líneas paralelas iguales es nulo.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ Porque la línea 1 y la 3 son iguales.

3.- *Un determinante en el que los elementos de una línea son múltiples de los elementos de una paralela a ella es nulo.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$ Porque la línea 3 es la línea 1 multiplicada por 2.

4.- *Un determinante en el que los elementos de una línea son combinación lineal de los de otras líneas paralelas a ella es nulo.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 0$ Porque la columna 3 es la suma de la 1 y la 2.

5.- *El determinante de una matriz cuadrada es igual al de su transpuesta.* $|A| = |A|^t$

Ejemplos: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

6.- *Si se intercambian entre si dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.*

Ejemplos: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $\quad$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$

Si el cambio es un número par de veces, el determinante no cambia de signo.

7.- *Si se multiplican todos los elementos de una línea (fila o columna) por un mismo número α, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 18 = -6 = 3\cdot(-2)$

8.- *El determinante de una matriz triangular, es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$

9.- *El valor de un determinante no varía, si a una línea le sumamos una combinación lineal de otras líneas paralelas a ella.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 30 = -2$

10.- *Sean A y B matrices de orden n, el determinante del producto, es el producto de los determinantes.*

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$$

11.- *Sea A una matriz de orden n, y sea k un número natural, entonces:* $|A^k| = |A|^k$

12.- *Si todos los elementos de una fila (o columna) están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes en los que las demás filas (o columnas) permanecen invariantes.*

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a+b & a+c & a+d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & a & a \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ b & c & d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

Una matriz cuadrada se llama ***regular*** si su determinante es no nulo. En caso contrario se llama ***singular***.

8.3.- Matriz Adjunta

8.3.1.- Menor complementario

Dada una matriz cuadrada de orden n, se llama ***menor complementario*** del elemento a_{ij} al determinante de orden n-1, que se obtiene al suprimir la fila i, y la columna j (o la fila y la columna que se cruzan en a_{ij}). Lo representaremos por α_{ij}

Ejemplo: Calcular los menores complementarios de los elementos a_{13} , a_{32} y a_{22} de la siguiente matriz.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 19$

8.3.2.- Adjunto de un elemento

Se llama ***adjunto de un elemento*** a_{ij} de una matriz, al valor del menor complementario precedido del signo más o menos según sea par o impar la suma de los subíndices $i+j$. Se representará por A_{ij} y se suele escribir como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

Los sucesivos adjuntos de los elementos de una matriz tienen signos alternativamente (tanto por filas como columnas) positivos y negativos empezando por el primero que es siempre positivo, esto es:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

8.3.3.- Matriz Adjunta

Se llama ***matriz adjunta*** de A, y se representa por *Adj(A) ó* A^+, a la matriz que obtiene cambiando cada uno de sus elementos por su adjunto.

Ejemplo: Calcula la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Los adjuntos o cofactores de los nueve elementos de A son:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -17$ $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$ $A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11$ $A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$ $A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$ $A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$

Por tanto la matriz adjunta será: $A = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 6 \\ -11 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

8.4.- Método de los Adjuntos

El *método de los adjuntos*, es un método para resolver determinantes de cualquier orden, y se enuncia: "*el determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (ya sea fila o columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos*".

Para facilitar los cálculos buscamos la línea que más ceros contenga, y si no los hay, utilizaremos el ***método de Chio*** para conseguirlos.

El *método de Chio* consiste en utilizar las propiedades de los determinantes para conseguir dichos ceros, sobre todo aquella que decía que *al sumar a los elementos de una línea una combinación lineal de otras líneas el determinante no cambia.*

De esta forma: $$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots.. + a_{in}A_{in}$$

Utilizando el *método de los adjuntos* conjuntamente con el *método de Chio*, podemos convertir el cálculo de determinantes complicados, en otros determinantes mucho más sencillos.

***Ejemplo 7.1:* Calcular el determinante:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Este determinante es de orden 4, aplicando directamente el método de los adjuntos por la fila 1, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Tendríamos que calcular 3 determinantes de orden 3, en los que es muy fácil cometer algún error.

Pero si intentamos buscar ceros combinando filas o columnas, podemos hacer que el determinante sea de muy fácil resolución.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1)'=(1) \\ (2)'=(2)-3\cdot(1) \\ (3)'=(3)-(1) \\ (4)'=(4)-6(1) \end{Bmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -12 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} (1)'=(1) \\ (2)'=(2) \\ (3)'=(3)+2(1) \end{Bmatrix} =$$

$$= 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 18(-4+1) = 18\cdot(-3) = -54$$

Hemos convertido un determinante de orden 4 en uno de orden 2 que se resuelve de manera mucho más sencilla.

8.5.- Inversa de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada *A*. ***Se llama inversa de A y se representa por A^{-1}*** a la matriz que multiplicada por la matriz *A* da como resultado la matriz identidad, es decir:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

La matriz A tendrá inversa si y solo sí es cuadrada y su determinante es distinto de cero, o lo que es lo mismo si A es una matriz regular. En la práctica, para hallar la matriz inversa de la matriz A, se siguen los siguientes pasos:

- Se halla el determinante de A.
  - Si $|A| = 0$, decimos que no existe la matriz inversa, A^{-1}.
  - Sí $|A| \neq 0$ continuamos.
- Calculamos la matriz transpuesta de A. A^t.
- Calculamos la matriz adjunta de A^t y se divide por $|A|$.

La inversa de una matriz A, viene dada por la expresión: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A^t) = \dfrac{\left(A^t\right)^+}{|A|}$

<u>Ejemplo</u> ***Calcular la inversa de la matriz*** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo primero es calcular su determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, como es distinto de cero, calculamos la matriz traspuesta. $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

, y ahora la adjunta la transpuesta: $adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Y por último, dividimos por su determinante:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj(A^t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8.6.- Ecuaciones Matriciales

La matriz inversa facilita la resolución de las ecuaciones matriciales del tipo: $\boldsymbol{AX+B=C}$, cuando A es una matriz es Regular. Si pasamos B al otro lado, pasa restando:

$$AX = C - B$$

Y multiplicando por la izquierda por A^{-1} en ambos lados de la igualdad tenemos:

$$A^{-1}AX = A^{-1}(C-B)$$

Operando:

$$\left(A^{-1}\cdot A\right)X = A^{-1}(C-B)$$

De donde:

$$IX = X = A^{-1}(C-B)$$

Ejemplo: ***Resolver la ecuación matricial*** $XA = B + C$ ***, siendo:***

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

Despejando X en la ecuación dada, tenemos: $XA = B + C$

Multiplicando en ambos lados de la igualdad por la derecha por A^{-1} : $\left(XA\right)A^{-1} = \left(B+C\right)A^{-1}$

De donde: $X(A\cdot A^{-1}) = (B+C)A^{-1}$

Y operando: $X = (B+C)\cdot A^{-1}$

Veamos ahora si A admite inversa: $|A| = \begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Por tanto existe la inversa de A.

La inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, y la solución de la ecuación es:

$$X = (B+C)A^{-1} = \left[\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&2\\2&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&-2&2\\1&1&1\\2&-1&4\end{pmatrix}$$

Ejercicio: *Despeja X en las siguientes ecuaciones suponiendo que las matrices que intervienen son todas cuadradas del mismo orden y poseen matriz inversa:*

XA=AB	2AXAB=AB	AXA+AB=C	$AXB=A^2$	XA+3X=AB	$XA^t+B^t=(AB)^t$
5XA+2I-6B=C	Ax+Bx=AB	$XA^2=BA$	A(X+B)=CX		

8.7.- Rango de una Matriz

- **Definición 1º** :RANGO de una matriz es el orden del mayor de los menores distintos de cero. Por tanto, el rango no puede ser mayor al número de filas o de columnas.

- **Definición 2º** :RANGO de una matriz es el número de líneas de esa matriz (filas o columnas) que son linealmente independientes.

Una línea es *linealmente dependiente* de otra u otras cuando se puede establecer una combinación lineal entre ellas.

Ejemplo: si $f_1 = 2\cdot f_3 - 3\cdot f_4$, entonces decimos que f_1 es linealmente dependiente de f_3 y f_4.

Una línea es *linealmente independiente* de otra u otras cuando no se puede establecer una combinación lineal entre ellas.
El rango o característica de una matriz A se simboliza del siguiente modo: ***rang(A)*** o ***r(A)***

- **Operaciones elementales que pueden realizarse con una matriz para calcular su rango sin que éste varíe**
    1. **Intercambiar dos líneas entre sí.**
    2. **Suprimir una línea que tenga todos sus elementos nulos.**
    3. **Suprimir una línea que sea proporcional a otra.**
    4. **Suprimir una línea que sea combinación lineal de otra/s**
    5. **Multiplicar o dividir una línea por un número distinto de cero.**
    6. **Sustituir una línea i de este modo : $L_i = a \cdot L_i + b \cdot L_j$**
    7. **Sustituir una línea i de este modo : $L_i = L_i + a \cdot L_j$**

Las propiedades anteriores NO pueden ser aplicadas en el cálculo de determinantes, pues alterarían el valor de los mismos, excepto en el caso 7. Sin embargo, todas ellas pueden utilizarse para averiguar el rango de una matriz sin que se modifique el valor de éste.

- Como mínimo, el rango de una matriz siempre será 1, salvo para la matriz nula, cuyo rango es cero.
- Para poder calcular el rango de una matriz ésta no tiene por qué ser necesariamente cuadrada.
- Una matriz cuadrada de orden "n", como máximo su rango es n.
- Una matriz cuadrada de orden "n" es inversible (regular) si el rango es n. Es decir, cuando las filas (columnas) son linealmente independientes.
- Diremos que dos matrices A y B son equivalentes (A~B) si tienen el mismo rango.

8.7.1.- Cálculo del Rango de una Matriz

8.7.1.1.- Método basado en el cálculo de menores

- Comenzando por el orden $k=2$, se realiza el proceso siguiente (para una etapa k cualquiera)
- Se busca un menor $\alpha \neq 0$ de orden k, entonces el rango será $\geq k$
- Se añade a dicho menor una fila i , y cada una de las columnas que en él no figuran, obteniéndose así menores de orden $k+1$. Si todos estos menores son nulos, significa que la fila i es combinación lineal de las k filas del menor anterior, por lo que podemos eliminar esa fila.
- Seguimos probando con las restantes filas, si todos los menores así formados son nulos, entonces la matriz tiene sólo k filas linealmente independientes, que son las que aparecen en el menor, y por tanto su rango es k.
- Si alguno de los menores $k+1$ es distinto de cero, el rango es $\geq k+1$ y repetimos el proceso para otro orden k superior.

Ejemplo: ***Calcular el rango de la matriz*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Elegimos un menor de orden 2, por ejemplo $\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$ ➔ Rang(A)≥2

Elegimos otro menor de orden 3, $\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0+2+0) - (0+18+2) = -18 \neq 0$ ➔ Rang (A)≥3

Elegimos uno de orden 4:

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -12 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -12 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

➔ Rango (A)=3

Si al elegir un menor de orden 2 nos da 0, elegimos otro, y así sucesivamente hasta elegir todos, si todos son 0, el rango es 1. De la misma forma, cuando elegimos menores de orden 3.

8.7.1.1.- Método de Gauss

Se utiliza con frecuencia en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Vamos a describir el método por filas (de igual forma sería por columnas). Básicamente consiste en hacer nulos los elementos que hay debajo de los a_{ii} con i= 1, 2, 3, ..., m-1 ; y el rango final será el ***número de filas distintas de cero.***

- El método consta de m-1 etapas, siendo m el número de filas.
- En una etapa *i* cualquiera se deja fija la fila *i* , y tomando como referencia el elemento a_{ii} , por medio de operaciones elementales (nombradas anteriormente) se hacen cero todos los elementos de su columna que estén por debajo de él.
- Si el elemento a_{ii} es igual a cero, es preciso intercambiar previamente esa fila por alguna otra *fila de debajo*, y si no es posible (porque también sea cero) con alguna *columna de la derecha*, hasta conseguir que a_{ii} sea distinto de cero (es conveniente, para evitar cálculos tediosos que sea 1).

Ejemplos: ***a) Calcular el rango de la matriz*** $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{(1)}{=} r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{=} r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{(3)}{=} r\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1) f_2 = f_2 - 3f_1; f_3 = f_3 - 2f_1 \quad (2) f_2 \leftrightarrow f_4 \quad (3) f_3 = f_3 - 7f_2$ ➔ Por tanto Rang(A)=3

b) Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$

$$Rang\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \underset{(1)}{=} Rang\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(2)}{=} Rang\begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$(1) f_5 = f_5 - f_4; f'_4 = f_4 - f_3; f'_3 = f_3 - f_2 \quad (2) f'_2 = f_2 - f_1$

El cálculo del rango será fundamental para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el *Teorema de Rouché-Fröbenius* que veremos en el tema siguiente.

Ejemplo:

¿Para qué valores de k la matriz $A=\begin{pmatrix} k & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ***no admite inversa?.***

La matriz A no tiene inversa si $|A|=0$, por tanto calculamos su determinante y lo igualamos a cero: $|A|=3k+2$, $3k+2=0$ ➔ $k=-\frac{2}{3}$

8.8.- Ejercicios Resueltos

1.- Demuestra que si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$***, verifica que*** $A^2-(a+d)A+|A|I=0$***, donde*** $|A|$ ***es el determinante de A,*** $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***y*** $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$***.***

$$A^2-(a+d)A+|A|I=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(a+d)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+(ad-cb)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-cb & 0 \\ 0 & ad-cb \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.- Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ ***es nulo.***

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

3.- Calcular:

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$$ Porque la primera fila por 2 es igual a la tercera.

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}=(x+1)^4$$

Hemos sumado a todas las filas la primera.

4.- Obtener en función de a,b,c el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=-(a\cdot b\cdot c)$$

Donde hemos usado el método del adjunto, usando la columna 4ª porque es la me mas ceros tiene.

5.- Contestar razonadamente si es posible resolver las siguientes ecuaciones, y en caso afirmativo, resolverlas:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \right|$

a) Si es posible: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & -x \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow x^2 + x + 5 = 7 \rightarrow$

$x^2 + x - 2 = 0$ De donde X=1, Y=-2

b) $\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \right| =$ No se puede calcular, porque antes de calcular el determinante tenemos que sumar las matrices, y para poder sumar dos matrices, ambas tienen que ser de la misma dimensión.

6.- Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$***, calcular el valor de los siguientes determinantes:***

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} = (9) = \begin{vmatrix} m+3n-3n & p+3q-3q \\ n & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} = (5) = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} = (5) = \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} = (6) = -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} = (6) = 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} = (6) = -3\cdot(-1)\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3\cdot(-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} = (6) = 2\cdot\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} = (5) = 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} = (6) = -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{n}{m} \\ mp & mq \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ p & q \end{vmatrix} = \frac{m}{m}\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} m & m \\ p & p \end{vmatrix} = 0$ Porque se repiten dos filas.

7.- a) Definir el concepto de matriz inversa. Dar un criterio para expresar que una matriz es inversible.

La matriz inversa es la matriz por la que hay que multiplicar otra para obtener la matriz identidad. Sea la matriz A, entonces la inversa de A es la matriz A^{-1}, de forma que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

Para que una matriz sea inversible ha de tener su determinante no nulo.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$***, determinar para que valores de m existe*** A^{-1}***.***

Para que exista su inversa, su determinante ha de ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto el determinante es distinto de cero para todo valor de m.

Entonces A es invertible $\forall m \in \Re$.

c) Para m=-1, resolver $\left|A^{-1} - xI\right|$***, siendo I la matriz I_3.***

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t = -1\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ -1-x & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = (-x)\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} +$$

$$+(1+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (-x)(x^2-1) + (x+1)(-x-1) = (x+1)\left[(-x)\cdot(x-1) - (x+1)\right] = -x^3 - x^2 - x - 1$$

8.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ***y*** $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$***, encontrar una matriz simétrica P no singular tal que B=P^{-1}AP.***

Como P tiene que ser simétrica y no singular (regular) cogemos $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Si en la ecuación ***B=P^{-1}AP*** multiplico a ambos lados de la igualdad por P. (obsérvese que he de multiplicar por P por el mismo sitio (izquierda) en ambas partes)

PB=PP^{-1}AP ➔ PB=IAP ➔ PB=AP

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4a+6b & -3a-5b \\ 4b+6c & -3b-5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a-6b & 4b-6c \\ 3a-5b & 3b-5c \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales, si todos sus elementos son iguales, por tanto:

$$\left.\begin{aligned} 4a+6b &= 4a-6b \\ -3a-5b &= 4b-6c \\ 4b+6c &= 3a-5b \\ -3b-5c &= 3b-5c \end{aligned}\right\} \text{Resolviendo el sistema tenemos: } \left.\begin{aligned} b &= 0 \\ a &= 2c \\ 2c &= a \\ b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$P = \begin{pmatrix} 2c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Como nos dicen que P es no singular, C no puede valer 0. Si tomamos c=1, entonces P queda de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a comprobarlo.

Tiene que ocurrir que: $B = P^{-1}AP$

Lo primero es calcular P^{-1}.

$|P| = 2$, por tanto existe P^{-1}. $P^{-1} = \frac{1}{|P|}(adjP)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = B$$

9.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ***Demostrar que la inversa de*** A^n ***es*** $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo primero es calcular A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, parece que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos a demostrarlo (No olvidar)

Supongamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces ***por inducción*** tiene que ocurrir que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto se cumple que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para ver si A es invertible, tiene que ocurrir que su determinante sea no nulo. $|A^n| = 1$, por tanto es distinto de cero.

Pues entonces $(A^n)^{-1} = \frac{1}{|A^n|}(adjA^n)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c.q.d.

10.- En el supuesto que exista, calcular la matriz X ***tal que*** AX=B, ***en los siguientes casos:***

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ A simple vista, como A=B, tiene que ocurrir que $X=I_3$

$$A\cdot I=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\5&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\5&1&3\end{pmatrix}=B$$

b) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\\0&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\5&1&3\end{pmatrix}$

$A\cdot X=B$ entonces, si multiplicamos por A^{-1} a ambos lados de la igualdad y por la izquierda, tenemos:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

Como A no es invertible, entonces no existe la matriz X buscada.

11.- Las matrices X e Y son las soluciones del sistema de ecuaciones matriciales:

$$2X-Y=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-5\end{pmatrix} \qquad X+2Y=\begin{pmatrix}1&-4\\3&0\end{pmatrix}$$

a) Hallar X e Y.
b) Calcular si tiene sentido la inversa de ambas.

a) Si multiplico la 1ª ecuación por 2 y las sumo:

$4X-2Y=\begin{pmatrix}4&-6\\2&-10\end{pmatrix}$ + $X+2Y=\begin{pmatrix}1&-4\\3&0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $5x=\begin{pmatrix}5&-10\\5&-10\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ de donde: $X=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\end{pmatrix}$

Si despejamos la matriz Y de la 1ª ecuación: $Y=2X-\begin{pmatrix}2&-3\\1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$

b) La inversa de X no existe puesto que su determinante es nulo.

La inversa de Y es: $Y^{-1}=\dfrac{1}{|Y|}adjY^{t}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$

12.- Dada la identidad matricial $X\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$

a) ¿Cuáles son las dimensiones de de una matriz solución de la identidad anterior?

La matriz X tiene que tener una dimensión de 3X2.

b) Calcular su solución:

Sean $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$, entonces: X·A=B, para calcular X, multiplico en ambos lados de la igualdad (y por la derecha) por A^{-1}.

$$X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

Pues vamos a calcular la matriz inversa de A. Lo primero es ver si su determinante es no nulo. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$ ➔ Por tanto la matriz A es invertible. (si A no es invertible, no existe la matriz X)

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Y por tanto :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \\ 13 & -7 \end{pmatrix}$$

Vamos a comprobarlo: $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -5 \\ 13 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, Por tanto X es correcta.

c) ¿Es única la solución?. Razonar la respuesta.

Si. Es única porque la matriz inversa es única.

13.- Obtén razonadamente una matriz A que verifique la siguiente igualdad.

$$3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Sean $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $Z = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$, la ecuación matricial queda de la forma:

$$3 \cdot X + Y \cdot A = Z$$

Como lo que quiero es calcular A:

$$Y \cdot A = Z - 3 \cdot X \Rightarrow Y^{-1} \cdot Y \cdot A = Y^{-1}(Z - 3 \cdot X) \Rightarrow A = Y^{-1}(Z - 3 \cdot X)$$

Calculamos la inversa de Y:

$$Y^{-1} = \frac{1}{|Y|} Adj(Y^t) = \frac{1}{5} Adj\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$A = Y^{-1}(Z - 3 \cdot X) = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

14.- Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa. $A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$

La función $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y la función $|x-2| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < -2 \\ x+2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Por tanto, de la definición de valor absoluto: $|a| = +\sqrt{a^2}$ donde a es un número Real.

Tenemos que para que la matriz A no sea inversible, su determinante tiene que ser nulo. Por tanto:

$2|x| - |x-2| = 0$ ➔ $2|x| = |x-2|$ ➔ $2\sqrt{x^2} = \sqrt{(x-2)^2}$ ➔ $\sqrt{4x^2} = \sqrt{(x-2)^2}$ de donde:

$4x^2 = x^2 - 4x + 4$ ➔ $3x^2 + 4x - 4 = 0$ y resolviendo obtenemos $\begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Vamos a Comprobar:

Para x=-2, tenemos: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y para x=2/3, tenemos: $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & 2 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto es correcto.

15.- Se dice que una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su transpuesta, esto es, si $A^{-1} = A^t$. Comprobar que la matriz A es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} senx & -\cos x \\ \cos x & senx \end{pmatrix}, \qquad A^t = \begin{pmatrix} senx & \cos x \\ -\cos x & senx \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa, y para ello, calculamos primero su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} senx & -\cos x \\ \cos x & senx \end{vmatrix} = sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$Adj(A)^t = \begin{pmatrix} senx & \cos x \\ -\cos x & senx \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t = \begin{pmatrix} senx & \cos x \\ -\cos x & senx \end{pmatrix}$$

Por tanto $A^{-1} = A^t$ ➔ A es ortogonal.

16.- Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Como el rango es el orden del mayor menor no nulo, tenemos que calcular los determinantes de todos los menores y ver cual de ellos es distinto de cero, y tiene mayor orden.

Vamos a calcular los determinantes de orden 2 que se pueden extraer de esta matriz. Cuando uno de ellos sea distinto de cero, entonces diremos que su rango es como mínimo 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto, la matriz A tiene de rango, como mínimo, el 2. r(A)=2

Ahora calculamos todos los determinantes de orden 3 que se puedan extraer de ella, e igual que en el caso anterior, cuando uno de ellos sea distinto de cero, diremos que el rango de A es como mínimo 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{porque la 1ª fila - la 2ª fila = 3ª fila}$$

Si observamos la matriz A, la 1ª fila - la 2ª fila = 3ª fila , entonces cualquier determinante de orden 3 que obtengamos de dicha matriz va a ser nulo.

Por tanto el Rang(A)=2

17.- Estudiar el rango de A para los diferentes valores de t. $A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{pmatrix}$

Vamos a calcular el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t & 1-t & t \\ t & 1-t & 3-t \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} 1-t & t \\ 1-t & 3-t \end{vmatrix} = t(1-t)(3-2t)$$

Si igualamos a cero, tenemos que t=1, que t=0 y que t=3/2.

Por tanto si t≠1, t≠0 y t≠3/2 el rango de A es 3.

Si t=1 ➔ $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ➔ Rang(A)=2

Si t=3/2 ➔ $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 3/2 & 0 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix} = 7/2$ ➔ Rang(A)=2

Si t=0 ➔ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ ➔ Rang (A) = 2

18.- Determina el rango de la siguiente matriz según los valores de t. $A = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

Si calculamos el determinante de esta matriz, tenemos que $\begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = (t^3 + 4t) - (2t + 4t) = t^3 - 2t$

Por tanto si igualamos a cero, tenemos que si t≠0, t≠ $\sqrt{2}$ t≠- $\sqrt{2}$ entonces rango de la matriz es 3.

Si t=0 ➔ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ➔ $|A| = 0$ ➔ $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$ ➔ Rang(A)=2

Si t=$\pm\sqrt{2}$ ➔ $A=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \pm\sqrt{2} & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ➔ $|A|=0$ ➔ $\begin{vmatrix} \pm\sqrt{2} & 2 \\ 2 & \pm\sqrt{2} \end{vmatrix}=-2$ ➔ Rang(A)=2

19.- Determina la relación que deben cumplir los parámetros de a,b,c para que las matrices tengan ambas rango 2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Resolvemos ambos determinantes y los igualamos a cero.

Para que A sea de rango 2, tiene que ocurrir que: a-c=0. ➔ a=c

Para que B sea de rango 2, tiene que ocurrir que: 3a-2b-2c=0

Para que ambas sean de rango 2, se ha de cumplir el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a=c \\ 3a-2b-2c=0 \end{cases} \text{ ➔ } c-2b=0 \text{ ➔ c=2b ➔ a=2b, c=2b, b=b}$$

20.- Considera la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$***, donde a es no nulo.***

a) Calcular A^2
b) Calcular A^{-1}
c) Calcula razonadamente A^{20}
d) Calcula razonadamente $|A^{19}|$

a) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}=a^2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Lo primero es calcular el determinante: $|A|=a^3$, la transpuesta $A^t=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \\ 2a & 0 & -a \end{pmatrix}$

la adjunta: $Adj(A)^t=\begin{pmatrix} -a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ a^2 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ Por tanto la inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/a & 0 & 2/a \\ 0 & 1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 1/a \end{pmatrix}$

c) Calculamos A^3 y luego A^4 y vemos que $A^4=a^4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=a^4\cdot I$

Como: $A^{20}=(A^4)^5=(a^4\cdot I)^5=a^{20}\cdot I^5=a^{20}\cdot I=a^{20}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{20} & 0 & 0 \\ 0 & a^{20} & 0 \\ 0 & 0 & a^{20} \end{pmatrix}$

c) De la propiedad de los determinantes $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, tenemos que:

$$\left|A^{19}\right|=\left|A^{20}\cdot A^{-1}\right|=\frac{\left|A^{20}\right|}{|A|}=\frac{a^{60}}{a^{3}}=a^{57}$$

21.- Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) Comprueba que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, de aquí $(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ por tanto se verifica la igualdad.

c) Hallar una matriz X que verifique: $ABX=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

$$A\cdot B\cdot X=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix};(A\cdot B)\cdot X=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix};(A\cdot B)^{-1}(A\cdot B)\cdot X=(A\cdot B)^{-1}\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

De donde $X=(A\cdot B)^{-1}\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -5\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

22.- Hallar una matriz X que cumpla la condición $XB+B=B^{-1}$***, siendo*** $B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Tenemos que $XB+B=B^{-1}$; entonces $(X+I)B=B^{-1}$; multiplicando en ambas partes (a la derecha) por B^{-1}, tenemos: $X+I=B^{-2}$, de donde despejando X:

$$X=\left(B^{-1}\right)^2-I$$

Para calcular la inversa de B, lo primero es hacer si determinante.

$$|B|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

Después hacemos su transpuesta, y luego su adjunta, y por fin escribimos su inversa:

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot Adj(B)^t=\frac{1}{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Elevamos al cuadrado:

$$\left(B^{-1}\right)^2=B^{-1}\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Y ahora calculamos X:

$$X=\left(B^{-1}\right)^2-I=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}$$

23.- a) Calcula todas las matrices diagonales de orden 2 que coinciden con su inversa.

Una matriz cualquiera diagonal de orden dos, es por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, pues, para que A coincida con su inversa, calculamos la inversa e igualamos ambas:

$$A^{-1}=\frac{1}{ab}\begin{pmatrix}b&0\\0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

Igualamos ambas

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&0\\0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

Y resolvemos:

$$\begin{matrix}a=\frac{1}{a}\\ b=\frac{1}{b}\end{matrix}\ \Rightarrow\ \begin{matrix}a=\pm1\\ b=\pm1\end{matrix}$$

Entonces las matrices A son:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

b) Si A es una de estas matrices, calcula A^2.

Para cada una de ellas, su cuadrado es la matriz identidad I.

$$\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2&0\\0&b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ \text{Si } a=\pm1 \text{ y } b=\pm1$$

24.- Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M.

a) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ y que $|A|=4$ Calcula los siguientes determinantes:

$$\left|-3A^t\right|=(-3)^2|A|=9\cdot4=36\ \ y\ \ \begin{vmatrix}2b&2a\\-3d&-3c\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}b&a\\d&c\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=24$$

b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3=I$. Calcula $|B|$

$$|I|=1=\left|B^3\right|=|B|^3\ \Rightarrow\ |B|=\sqrt[3]{1}=1$$

c) Sea C una matriz Cuadrada tal que $C^{-1}=C^t$. ¿Puede ser $|C|=3$? Razonar la respuesta.

Si $C^{-1}\cdot C=I$ ➔ $\left|C\cdot C^{-1}\right|=|I|=1$ ➔ $\left|C\cdot C^{-1}\right|=|C|\cdot\left|C^{-1}\right|=1$ ➔ pero si $C^{-1}=C^t$ ➔ $|C|\cdot\left|C^t\right|=1$ y como $|C|=\left|C^t\right|$ ➔ $|C|\cdot|C|=1$; si $|C|=3$ ➔ 9=1, cosa que es imposible. Por tanto no puede ser $|C|=3$

25.- Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & k & t\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & k & t\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Hallar A^{10}

Lo primero es como siempre $A^2=\begin{pmatrix}0 & k & t\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & k & t\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & k^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, después:

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & k & t\\ 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad A^{10}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b) Hallar la matriz inversa de B.

$$B^{-1}=\frac{1}{|B|}Adj(B^t)=Adj(B^t)=Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ k & 1 & 0\\ t & k & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -k & k^2-t\\ 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) En el caso particular k=0, Hallar B^{10}

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^4=B^3\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & nt\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Supongamos que $B^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & nt\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$***,***

entonces por inducción, ha de ocurrir que $B^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & (n+1)t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$***.***

Calculamos $B^{n+1}=B^n\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & nt\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & (n+1)t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Entonces $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***. Y de aquí:*** $B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.- Demostrar que: $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$

Si desarrollamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ b^2c & -b^2 & 3ab \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot c\cdot b\cdot c\cdot b\cdot a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ b & -b & 3b \end{vmatrix} = a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2a^2b^4c^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)\cdot(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c+a-b-a) = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$