			Nota
Nombre:			
Curso:	**2º Bachillerato**	**Examen XII**	
Fecha:	***21 de Abril de 2016***	La mala o nula explicación de cada ejercicio implica una penalización de hasta el 25% de la nota.	

Instrucciones: **a)** **Duración:** 1 hora y 30 minutos. CURSO 2013-2014

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [**1'75 puntos**] Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga por ecuación $y = 5 - 6x$.

b) [**0'75 puntos**] Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 2.- Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x) = \frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

a) [**1 punto**] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) [**1'5 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right\}$$

a) [**1'5 puntos**] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) [**1 punto**] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

Ejercicio 4.- Considera la recta r que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$.

a) [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2, 3, 2)$.

b) [**1'5 puntos**] Calcula a y b para que el plano *ax+3y+bz-5=0* contenga a la recta r.

Instrucciones:

a) **Duración:** 1 hora y 30 minutos.

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe ordenadamente y con letra clara.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción B

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$.

Ejercicio 2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) [**0'75 puntos**] Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y = 3 - x$.

b) [**1'75 puntos**] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior.

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z,

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda y + (\lambda+1)z & = & \lambda \\ \lambda x \;+\; z & = & \lambda \\ x \;+\; \lambda z & = & \lambda \end{array}\right\}$$

a) [**1'5 puntos**] Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

b) [**0'5 puntos**] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

c) [**0'5 puntos**] Para $\lambda = 0$, si es posible, da tres soluciones distintas.

Ejercicio 4.- Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.

a) [**1 punto**] Halla la ecuación segmentaria del plano π que contiene al triángulo.

b) [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

c) [**0'5 puntos**] Calcula el área del triángulo ABC.

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo_1 Junio 2014

Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
a) [1'75 puntos] Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 1/2$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de ecuación $y = 5 - 6x$.
a) [0'75 puntos] Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f(abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Solución

Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
a)
Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 1/2$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de ecuación $y = 5 - 6x$.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Esta función es polinómica por tanto continua, derivable e integrable las veces que sean necesarias, en R.

Como tiene un punto de inflexión en $x = 1/2$, sabemos que **$f''(1/2) = 0$**.
Como la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tiene de ecuación $y = 5 - 6x$, tenemos que **$f(0) = 5$**, porque en $x = 0$ la ordenada $f(0)$ y el valor $y(0)$ de la recta tangente coinciden.
Sabemos también que la pendiente de la recta tangente ($y' = -6$) coincide con $f'(0)$ (por la interpretación geométrica de la derivada en un punto), por tanto **$f'(0) = -6$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$.
De $f(0) = 5$, tenemos $5 = c$, por tanto **$c = 5$**
De $f'(0) = -6$, tenemos $-6 = b$, de donde **$b = -6$.**
De $f''(1/2) = 0$, tenemos $0 = 6(1/2) + 2a$, por tanto **$a = -3/2$.**

La función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2/2 - 6x + 5$.
a)
Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f(abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Nuestra función es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$.
Estudiamos la monotonía, es decir su primera derivada $f'(x)$.
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$; $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.
De $f'(x) = 0$, tenemos $3x^2 + 6x - 9 = 0 \to x^2 + 2x - 3 = 0$, de donde $x = -3$ y $x = 1$ que serán los posibles extremos relativos.
Como $f'(-4) = 3(-4)^2 + 6(-4) - 9 = 15 > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-3)$.
Como $f'(0) = 3(0)^2 + 6(0) - 9 = -9 < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-3,1)$.
Como $f'(2) = 3(2)^2 + 6(2) - 9 = 15 > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(1,+\infty)$.
Por definición en $x = -3$ hay un máximo relativo que vale $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 8 = 35$.
Por definición en $x = 1$ hay un mínimo relativo que vale $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 8 = 3$.

Ejercicio 2 opción A, modelo_1 Junio 2014

Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$ las funciones definidas respectivamente por $f(x) = |x|/2$ y $g(x) = 1/(1 + x^2)$.
a) [1 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
a) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por $f(x) = |x|/2$ y $g(x) = 1/(1 + x^2)$.

a)

Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

Recordamos que la gráfica del valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ es la de **dos semirrectas que coinciden en (0,0)** porque |x| es continua en R por compuesta de continuas, **es simétrica respecto al eje OY** porque |-x| = |x|, por tanto la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ es muy parecida a la de |x| pero **pasa por los puntos (-1,1/2) y (1,1/2)**.

La gráfica de $g(x) = 1/(1 + x^2)$, al ser una función racional podemos obtenerla calculando sus asíntotas y su corte con los ejes.

No tiene asíntotas verticales, porque ningún valor de "x" anula el denominador.

Vemos que $\mathbf{g(0) = 1/(1 + 0^2) = 1}$, y que $\mathbf{g(x) > 0}$. Como al aumentar el denominador disminuye el cociente, **el valor (0,1) el máximo relativo y absoluto** pues se alcanza para x = 0.

Como $\lim_{x\to\pm\infty} 1/(1 + x^2) = 1/(1 + (\pm\infty)^2) = 1/+\infty = 0^+$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de g en** $\pm\infty$, y además g está por encima de la asíntota horizontal y = 0 en $\pm\infty$.

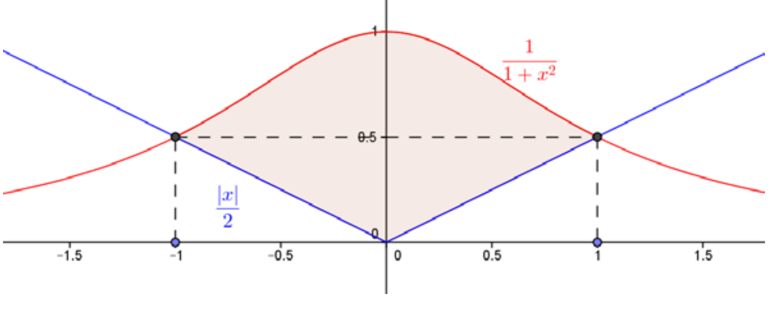
Como g(-x) = g(x), **la gráfica de g es simétrica respecto al eje OY**.

Veamos los puntos de corte de f y g. Lo estudiamos sólo para x > 0, por simetría.

De f(x) = g(x), tenemos (x > 0) $x/2 = 1/(1 + x^2) \to x(1+ x^2) = 2 \to x + x^3 = 2 \to x^3 + x - 2 = 0$.

Vemos que x = 1 es solución, porque $(1)^3 + 1 – 2 = 0$. Y ya no hay mas cortes entre las gráficas para x > 0, luego los punto de corte son (-1,1/2) y (1,1/2).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



a)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Para calcular el área observando la figura vemos que es simétrica respecto al eje OY, luego:

Área $= 2\cdot\int_0^1 (1/(1+x^2) – x/2)dx = 2\cdot[\text{artag}(x) – x^2/4]_0^1 =$

$= 2\cdot(\text{artag}(1) – 1/4 - \text{artag}(0))$ $\mathbf{= 2\cdot(\pi/4 – 1/4 – 0) = \pi/2 – 1/2 \cong 1'0708\ u^2}$.

Si no te das cuenta que es simétrica tienes que calcular el área como suma de dos integrales:

Área $= \int_{-1}^0 (1/(1+x^2) – (-x/2))dx + \int_0^1 (1/(1+x^2) – x/2)dx$ y se obtiene el mismo resultado.

Ejercicio 3 opción A, modelo_1 Junio 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 2y - 3z = 3$$
$$2x + 3y + z = 5$$

a) [1'5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.
b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 2y - 3z = 3$$
$$2x + 3y + z = 5$$

a)
Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

Observamos que **el sistema** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$ tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, y al nos ser los coeficientes de las incógnitas proporcionales (podemos reducir por Gauus, o bien obtener un menor de orden 2 distinto de cero) **tiene de rango 2**, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.

Si le añadimos la ecuación $\alpha x + y - 7z = 1$ al sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$, **para que tenga las mismas soluciones que el original la matriz de las coeficientes A del nuevo sistema** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + y - 7z = 1 \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{pmatrix}$ **tiene que tener rango 2,** para lo cual **su determinante det(A) tiene que ser cero.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(-21-1) - (2)(-14-\alpha) + (-3)(2-3\alpha) = -22 + 28 + 2\alpha - 6 + 9\alpha = 0 =$$

$= 0+11\alpha=0$, **de donde $\alpha = 0$, para que ambos sistemas ténganlas mismas soluciones**.

b)
Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

El sistema que me piden resolver es $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$. Lo haremos por Gauss. También se puede resolver por Cramer.

Su matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

, por tanto nuestro sistema asociado es $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ \quad -y + 7z = -1 \end{cases}$, de donde **z = -2/3.**

L**a solución es (x,y,z) = (25/3,-11/3,-2/3)**, y es un sistema compatible y determinado con solución única.

Ejercicio 4 opción A, modelo_1 Junio 2014

Considera la recta r que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(-1,1,0).
(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pase por C(-2,3,2).
(b) [1'5 puntos] Calcula a y b para que el plano ax+3y+bz-5=0 contenga a la recta r.

Solución

Considera la recta r que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(-1,1,0).
(a)
Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pase por C(-2,3,2).

Para la recta s tengo el punto C(-2,3,2), y como las rectas son paralelas me sirve como vector director de s el de la recta r, es decir el **u** = **AB** = (-2,1,1).

La recta s en forma paramétrica es : $s \equiv \begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, con $\lambda \in$ R.

b) Si la recta está contenida en el plano, entonces los puntos A y B pertenecen al plano. Si los sustituimos en el plano, obtenemos un sistema:

- Si A(1,0,-1) pertenece a π ➔ $a - b - 5 = 0$
- Si B(-1,1,0) pertenece a π ➔ $-a + 3 - 5 = 0$

$$\begin{cases} a - b - 5 = 0 \\ -a + 3 - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ -a = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - b = 5 \\ a = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a - 5 = b \\ a = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = -7 \\ a = -2 \end{cases}$$

Por tanto los valores de a y b son: **a=-2; b=-7**

Opción B

Ejercicio 1 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

[2’5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x) - \mathrm{sen}(x)}{x - \mathrm{sen}(x)}$.

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \mathrm{sen}(x)}{x - \mathrm{sen}(x)} = \frac{\tan(0) - \mathrm{sen}(0)}{0 - \mathrm{sen}(0)} = \frac{0}{0}.$$

Le aplicamos la regla de L’Hôpital-L’H- (si “f” y “g” son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\to\infty$), con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \mathrm{sen}(x)}{x - \mathrm{sen}(x)} = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - \cos(x)}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3(x)}{\cos^2(x) - \cos^3(x)} = \frac{0}{0} = (L'H) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2(x)\mathrm{sen}(x)}{-2\cos(x)\mathrm{sen}(x) + 3\cos^2(x)\mathrm{sen}(x)} = \{\text{simplifico sen(x)}\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2(x)}{-2\cos(x) + 3\cos^2(x)} = \frac{3\cos^2(0)}{-2\cos(0) + 3\cos^2(0)} = \frac{3}{-2+3} = 3.$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) [0’75 puntos] Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y=3-x$.

b) [1’75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior

Solución

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a)

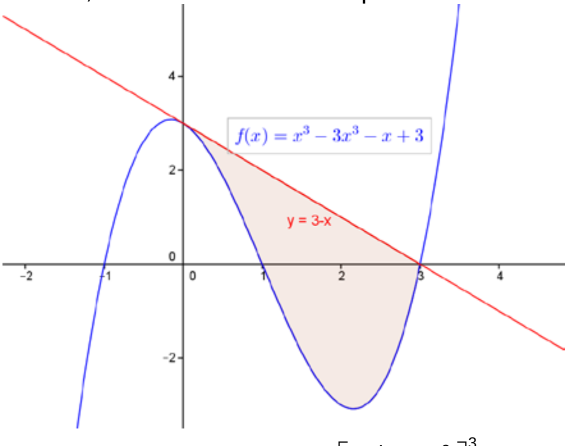
Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente (R.T.) es $y = 3 - x$.

Si existe dicho punto, en él la función f(x) y la recta tangente coinciden, es decir $f(x) = y$.
Resolvemos la ecuación $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 3 - x$, es decir $x^3 - 3x^2 = 0$ $x^2\cdot(x - 3) = 0$, de donde $x^2 = 0$ y $x - 3 = 0$, con lo cual $x = 0$ y $x = 3$.
Calculamos la recta tangente en $x = 0$ y $x = 3$, para ver cuál es:
De $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$
R.T. en $x = 0 \to y - f(0) = f'(0)(x - 0)$. Como $f(0) = 3$ y $f'(0) = -1$, R.T. $y - 3 = -1(x) \to y = 3 - x$.
R.T. en $x = 3 \to y - f(3) = f'(3)(x - 3)$. Como $f(3) = 0$ y $f'(3) = 8$, R.T. $y - 0 = 8(x - 2)$, de donde $y = 8x - 16$.

Con lo cual el punto de la gráfica de f(x) donde la R.T. es y = 3 - x, es el punto (0,3).

b)
Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior

La grafica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Es una función polinómica, su dominio es R, y es continua y derivable en R las veces que necesitemos.
Vemos que f(1) = 1 – 3 – 1 + 3 = 0, y hemos visto que f(3) = 0, luego los cortes con los ejes son (0,3), (1,0) y (3,0).
Como $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$, cuando x se acera a $-\infty$, f(x) se acerca a $-\infty$.
Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$,cuando x se acera a $+\infty$, f(x) se acerca a $+\infty$.
Los extremos relativos anulan la 1ª derivada.
$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$; $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{36+12}}{6} = \frac{6\pm\sqrt{48}}{6}$, de donde los posibles extremos son $x = \frac{6-\sqrt{48}}{6} \cong -0'15$ y $x = \frac{6+\sqrt{48}}{6} \cong 2'15$.
Como f'(-1) = 8 > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-0'15)$
Como f'(0) = -1 < 0, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (-0'15,2'15)
Como f'(3) = 8 > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(2'15,\infty)$
Por definición $x = \frac{6-\sqrt{48}}{6}$ es un máximo relativo y $x = \frac{6+\sqrt{48}}{6}$ es un mínimo relativo.
Aproximadamente los puntos son (-0'15, 3'08) y (2'15,-3'08).
Para dibujar la recta y = 3 – x con dos puntos es suficiente, y vemos que pasa por (0,3) y (3,0).
Vemos que ambas gráficas coinciden en x = 0 y x = 3, que serán los límites de integación.
Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo del recinto pedido es:



Área = $\int_0^3((3-x)-(x^3-3x^2-x+3))dx = \int_0^3(-x^3+3x^2)dx = \left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}\right]_0^3$ = -81/4+27-0=27/4=**6'75 u²**.

Ejercicio 3 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\lambda y + (\lambda+1)z = \lambda$$
$$\lambda x + z = \lambda$$
$$x + \lambda z = \lambda$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro λ.
b) [0'5 puntos] Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.
c) [0'5 puntos] Para $\lambda = 0$, si es posible, da tres soluciones distintas.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\lambda y + (\lambda+1)z = \lambda$$
$$\lambda x + z = \lambda$$
$$x + \lambda z = \lambda$$

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro λ.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \lambda+1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = -(\lambda)\cdot(\lambda^2 - 1)$.

Resolviendo la ecuación $-(\lambda)\cdot(\lambda^2-1) = 0$, obtenemos $\lambda = 0$ y $\lambda^2 - 1 = 0$, de donde $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$.

Si $\lambda \neq -1$, $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$, $\det(A) = |A| \neq 0$, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si **$\lambda = -1$**

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{columna} \end{matrix} = -(-1)\cdot(1 + 1) = 2 \neq 0$, tenemos rango(A*) = 3.

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A^*) = 3. **El sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si **$\lambda = 0$ (Apartado (c))**

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener una columna de ceros, tenemos rango(A*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

z = 0
x = 0
Tomo **y = b** $\in$ R, y las soluciones del sistema son **(x,y,z) = (0, b, 0)** con b $\in$ R.
Como me piden tres soluciones le doy a “b” tres valores distintos tengo tres soluciones distintas. Tomando b = 1, b = 2 y b = 3 las soluciones son **(0, 1, 0), (0, 2, 0) y (0, 2, 0)**

Si λ **= 1 (Apartado (b))**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener una columna de unos, tenemos rango(A*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 1ª y 2ª ecuación, pues con ellas he formado el menor de la matriz A distinto de cero.

y + 2z = 1
x + z = 1
Tomo **z = b** $\in$ R, tenemos x = 1 – b e y = 1 – 2b, y las infinitas soluciones del sistema son **(x,y,z) = (1 - b, 1 - 2b, b)** con b $\in$ R.

Ejercicio 4 opción A, modelo 5 Septiembre Reserva_1 2014

Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) los vértices de un triangulo.
a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.
b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
c) [0’5 puntos] Calcula el área del triángulo ABC.

Solución

Sean A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C (−1, 2, 1) los vértices de un triangulo.
a)
Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

Para un plano necesito un punto el A(−3,4,0), y dos vectores independientes, el **AB** = (6,2,3) y el **AC** = (2,-2,1)
La ecuación general del plano pedida es det(**AX,AB,AC**) = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX},\mathbf{AB},\mathbf{AC}) = 0 = \begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z-0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x+3)(2+6) - (y-4)(6-6) + (z)(-12-4) =$$

= 8x + 24 - 16z = 0 = x - 2z + 3 = 0.

Por tanto, la ecuación segmentaria del plano π es $\pi \equiv \dfrac{x}{-3} + \dfrac{z}{\frac{3}{2}} = 1$

b)
Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.

Para una recta "r" necesitamos un punto, el O(0,0,0), y un vector de dirección, el **u**, nos sirve el vector normal del plano $\pi \equiv x - 2z + 3 = 0$, el **n** = (1,0,-2).
Pongo **la ecuación vectorial de la recta "r" es $(x,y,z) = (0+1\cdot\lambda,0+0\cdot\lambda,0-2\cdot\lambda) = (\lambda,0,-2\cdot\lambda)$,** con $\lambda \in R$, y X(x,y,z) un punto genérico de la recta "r".
c)
Calcula el área del triángulo ABC.

Sabemos que el área de un triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan sus vectores **AB** y **AC**, es decir 1/2 módulo (|| ||) del producto vectorial (x) de dichos vectores.

$$\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(2+6) - \mathbf{j}(6-6) + \mathbf{k}(-12-4) = (8,0,-16).$$

Área triángulo = $(1/2)\cdot||\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|| = \mathbf{(1/2)\cdot\sqrt{(8^2 + 16^2)} = (1/2)\cdot\sqrt{(320)}\ u^2 \cong 8'944\ u^2}$.