Carlos González García
Profesor de Enseñanza Secundaria,
especialidad de Matemáticas
Jesús Llorente Medrano
Profesor de Enseñanza Secundaria,
especialidad de Matemáticas
María José Ruiz Jiménez
Profesora de Enseñanza Secundaria,
especialidad de Matemáticas

MATEMÁTICAS II

2° Bachillerato
Ciencias de la Naturaleza
y la Salud
Tecnología

Guía Didáctica

EDITEX

Fotocomposición, maquetación y realización de gráficos:
M. Color, S. L.
Fotografías: Archivo Editex.
Dibujos: Archivo Editex.
Diseño de portada: Pachi Larrosa.
Fotografías de portada: Archivo Editex.
Coordinación y supervisión pedagógica y técnica:
Equipo Editex.

De acuerdo a la legislación vigente sobre uso y supervisión de materiales curriculares, en el ámbito de gestión del territorio MEC (RD 1744/1998, de 31 de julio), este material, que corresponde a la materia de **Matemáticas** y dirigido al alumnado de 2.º curso de Bachillerato, ha sido elaborado atendiendo a las exigencias curriculares establecidas en los Reales Decretos de enseñanzas mínimas y demás normativa académica.

Asimismo, el proyecto editorial de la citada materia ha sido remitido a las administraciones educativas de las Comunidades Autónomas con competencias.

Aprobaciones:

Andalucía: Orden: 20-12-95. BOJA: 06-02-96.
Canarias: Resolución: 02-02-98. BOC: 02-01-99.
Galicia: Orden: 27-04-98. DOG: 28-05-98.
País Vasco: Autorización: 29-02-96.

El presente material didáctico ha sido creado por iniciativa y bajo la coordinación de Editorial EDITEX, S. A., conforme a su propio proyecto editorial.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La intencionalidad de esta Guía Didáctica es la de complementar nuestro libro de texto **Matemáticas II,** correspondiente a la asignatura del mismo título de los Bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnológico.

El profesorado podrá encontrar en esta guía:

- Orientaciones-guía o pautas para trabajar con el grupo-clase.
- La resolución de las Actividades Iniciales y las Actividades de Enseñanza-Aprendizaje.
- Los Criterios y Actividades resueltas de Evaluación.
- La resolución de los problemas propuestos en las páginas que desarrollan el bloque de contenidos denominado *Resolución de Problemas*, los cuales figuran propuestos en el libro de texto al final de cada una de las Unidades Didácticas.

Queremos agradecer desde aquí a nuestros compañeros su colaboración en forma de opiniones, críticas, sugerencias y todo aquello que consideren oportuno para mejorar nuestros materiales en posteriores ediciones.

1 - INTRODUCCIÓN

METODOLOGÍA

Concebimos la metodología como la forma concreta en la que se organizan, regulan y se relacionan entre sí los diversos componentes que intervienen en el proceso de aprendizaje: objetivos, contenidos, actividades, evaluación, recursos y medios didácticos; y, especialmente, alumnado, profesorado y comunidad educativa. Se identifica en nuestro Proyecto con la concepción curricular que desarrollamos, siendo para nosotros esencial la consecución de las metas educativas propuestas.

La metodología implícita en estos materiales curriculares se explica en las respuestas que damos a las siguientes preguntas:

¿Cómo vamos a intervenir con nuestro grupo-clase?

1. A través de actividades dirigidas a:

- Conocer las ideas previas de los alumnos/as y su grado de elaboración.
- Modificar sus ideas iniciales, construyendo de forma significativa nuevos conocimientos.

El profesor/a es mediador y plantea actividades de aprendizaje para modificar las concepciones iniciales, para que el alumno/a dé pasos progresivos en cuanto a identidad y elaboración personales, abriendo la posibilidad de llevar a cabo una reflexión crítica sobre ellos.

- Fomentar el rigor en el uso de lenguajes (algebraico, geométrico, gráfico y probabilístico).
- Potenciar los siguientes aspectos:
  - ▶ La reflexión sobre lo realizado.
  - ▶ La recogida de datos.
  - ▶ Elaboración de conclusiones.
  - ▶ Recopilación de lo que se ha aprendido.
  - ▶ Analizar el avance en relación con las ideas previas (punto de partida).
  - ▶ Facilitar al alumno/a la reflexión sobre: habilidades de conocimiento, procesos cognitivos, control y planificación de la propia actuación, la toma de decisiones y la comprobación de los resultados.

2. La intervención en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje requiere:

- Una actividad previamente diseñada (trabajo prospectivo del profesor).
- Negociación de los objetivos concretos de aprendizaje (trabajo del profesor como orientador).
- Toma de decisiones acerca de los métodos de trabajo y la evaluación del proceso de aprendizaje. Valoración por parte del profesor de este proceso de aprendizaje (trabajo del profesor como asesor e investigador).

3. Esta metodología permite el establecimiento de redes conceptuales, exigiendo, como consecuencia, un marco interactivo más abierto e interdisciplinar en su caso.

¿Qué pautas metodológicas seguiremos?

Para la aplicación, seguimiento y observación sistemática de nuestra intervención en el aula, proponemos y sugerimos las pautas siguientes:

- Promover el **aprendizaje significativo**, ya que para conseguir verdaderos aprendizajes escolares es necesaria la actividad constructiva por parte del alumno y de la alumna. Desde esta perspectiva planteamos las **Actividades de Enseñanza-Aprendizaje**, con una intención clara, dentro de unas tareas que tienen sentido para el alumno/a y que así hemos experimentado en nuestra actividad docente, consideradas de manera que éstos/as puedan adquirir, por sí solos, su sentido, significación y utilización para otros contextos diferentes.
- Considerar el **tratamiento de atención a la diversidad** como esencial en todo el desarrollo del currículo. Para ello, proponemos actividades directas, guiadas, contextualizadas, de análisis, síntesis, etc., que refuercen y amplíen los aprendizajes.
- Potenciar la **globalización**, a través de lo que denominamos *contenidos mínimos*, considerados éstos como un conjunto de los diferentes contenidos y capacidades a desarrollar, atendiendo con este planteamiento a la diversidad curricular y a la heterogeneidad de las capacidades cognitivas de los alumnos/as.
- Practicar el **aprendizaje interactivo**, básico para la construcción del conocimiento, pero sin caer en el activismo, sino fomentando la participación de nuestros alumnos/as en las tareas de aula.
- Propiciar la **motivación**, organizando una secuencia clara, sencilla y asequible que conecte a los alumnos/as con la realidad y el entorno en el que se desenvuelven.

¿Cómo planteamos la Evaluación?

Consideramos que para realizar una adecuada intervención educativa es necesario plantear una evaluación amplia y abierta a la realidad de las tareas de aula, y de las características de los alumnos/as, con especial atención al tratamiento a la diversidad.

Nuestros referentes están en los objetivos generales de ciclo y curso, contenidos y criterios prescriptivos de evaluación, que responden al *qué evaluar*, teniendo en cuenta, para ello, la diversidad de tareas de evaluación de conceptos, procedimientos y actitudes.

Partimos para ello, en cada Unidad Didáctica, de una **evaluación inicial**, que nos permite conocer el nivel de aprendizaje del que parten nuestros alumnos/as. Al final del aprendizaje de cada Bloque Temático proponemos una serie de actividades que sirven para evaluar objetivos y contenidos, incluidos en las distintas Unidades Didácticas que ahí se estructuran.

Consideramos que estamos en la línea de una **evaluación formativa** (véase la incidencia en las actividades de refuerzo y ampliación), que nos proporciona una mayor información sobre cuál es la situación de cada alumno/a en su proceso de enseñanza. Por supuesto, también de una **evaluación continua**, que realizamos a lo largo de todo el proceso de enseñanza y aprendizaje, y no sólo al final del mismo.

Al evaluar de esta manera, reflexionamos sobre la práctica educativa. Luego, cada profesor/a planteará los correctores adecuados, individuales y grupales, para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Este proceso de evaluación debe ser entendido como construcción conjunta, en el que consideramos al profesor/a como un mediador que debe ofrecer la ayuda necesaria y oportuna, en relación con las demandas de necesidades que plantee el grupo-clase.

Los **Criterios de Evaluación** que proponemos responden al modo de comprobar los objetivos de curso proyectados a través de los objetivos didácticos, que constituyen las metas de las distintas Unidades Didácticas. Estos criterios los planteamos por Bloques Temáticos, ya que entendemos que esta agrupación curricular es más coherente, teniendo en cuenta que vienen a ser complemento y señal del resto del conjunto de actividades planteadas en cada Unidad Didáctica, herramienta imprescindible para la evaluación continua.

TRATAMIENTO A LA DIVERSIDAD

Este aspecto conlleva el planteamiento de todo el proceso de actividades de enseñanza y aprendizaje que planteamos a lo largo de todo el desarrollo curricular del curso. La gradación de estas actividades implica una metodología de la tipología que nosotros concebimos.

En primer lugar, partimos de lo que el alumno/a sabe (conocimientos previos) y, para ello, establecemos unas **Actividades iniciales o de Diagnóstico** (en todas las Unidades). Así, podremos establecer una especie de *puente didáctico*, entre lo que el alumno/a sabe y lo que queremos que aprenda.

Al finalizar cada epígrafe principal o secundario, dentro de cada Unidad Didáctica establecemos otro tipo de actividades denominadas **Actividades Desarrolladas**. Por último, como sistemática globalizada de trabajo, proponemos una especie de banco global de **Actividades de Enseñanza-Aprendizaje** (Actividades de Refuerzo y de Ampliación), relacionadas con el trabajo desarrollado en cada contenido.

La finalidad de las primeras es la potenciación y valoración del proceso de enseñanza-aprendizaje, así como del carácter globalizador de los conceptos y destrezas aparecidas en la Unidad. Con las segundas, se pretende reforzar y/o ampliar el nivel de actividad y de aprendizaje del alumno/a. Es decir, o bien consolidan directamente el conocimiento alcanzado, o bien profundizan en él, ampliándolo. Estas últimas aparecen en las Unidades Didácticas remarcadas dentro de un cuadrado.

La **resolución de problemas**, al ser un Bloque Temático más del currículo y un eje vertebrador del área a lo largo de todo su desarrollo en el transcurrir de los cursos, está integrada en cada una de las Unidades Didácticas. Aparece al final de cada una de ellas, bajo el título de **Resolución de Problemas**. Aquí se ponen de manifiesto los tópicos de la misma: modelos de resolución, estrategias, bloqueos, protocolos, etc.

La resolución de problemas es un instrumento metodológico importante, en tanto que proporciona a los alumnos/as herramientas, técnicas específicas y pautas generales de aprendizaje. Al ser los problemas de investigación abiertos, el tratamiento a la diversidad queda ampliamente satisfecho con ellos.

Al final de cada Bloque Temático se formulan las **Actividades de Evaluación**, cuya finalidad es desarrollar el alcance de los criterios formulados, y comprobar si se cumplen los objetivos didácticos diseñados. La comprobación de su desarrollo permitirá al profesor/a saber cuál es el logro alcanzado, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, entre las Actividades Iniciales y estas últimas de Evaluación.

2 - OBJETIVOS DEL CURSO

Tomando como referencia los Objetivos Generales de las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II, expresados en los Reales Decretos 1178/1992 y 1179/1992, de 2 de octubre, por los que se establecen, respectivamente, las enseñanzas mínimas y el currículo del Bachillerato, y teniendo en cuenta las capacidades generales y específicas que los alumnos/as han adquirido en el Segundo Ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y en Primer Curso de Bachillerato, concretamos y formulamos los siguientes **Objetivos Generales para el Segundo Curso de Bachillerato** correspondientes a las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnológico en el área de Matemáticas:

RESOLUCION DE PROBLEMAS

En el Segundo Ciclo de la ESO y Primer Curso de Bachillerato, el alumno/a ha alcanzado estrategias y recursos técnicos sencillos en la resolución de problemas. Estos recursos están relacionados con las fases de comprensión del enunciado y búsqueda de estrategias, así como en la puesta en práctica de alguna estrategia (simplificar el problema, particularizar, etc.) en la resolución de un problema.

En Segundo Curso de Bachillerato, el alumno/a deberá ser capaz de:

- Alcanzar estrategias y recursos más generales para resolver problemas, poner en práctica la estrategia elegida en la fase de búsqueda de estrategias, analizar los resultados obtenidos y validar o no las estrategias utilizadas. En determinados casos debe generalizar las situaciones que haya solucionado.
- Elaborar, de forma precisa y clara, el protocolo de resolución, ser capaz de modificar su punto de vista y perseverar en la búsqueda de las soluciones a los problemas.
- Iniciarse en algunos de los métodos propios de validación matemática: demostración directa, reducción al absurdo, inducción infinita, etc.

Este objetivo general se trata en todas las Unidades Didácticas, en las dos páginas finales de cada Unidad que se desarrollan bajo el título *Resolución de Problemas*, siendo este tratamiento una continuación del desarrollo efectuado en los cursos 3º y 4º de ESO y Primer Curso de Bachillerato, en las páginas que respondían al título de *Diviértete Pensando* y *Problemas de Investigación*.

(Este objetivo está relacionado con los Objetivos Generales de la asignatura números 3, 4, 5, 6 y 8.)

LENGUAJES MATEMÁTICOS

En el Segundo Ciclo de la ESO y Primer Curso de Bachillerato, el alumno/a se ha familiarizado con el uso de los distintos lenguajes matemáticos.

En el Segundo Curso de Bachillerato, el alumno/a deberá ser capaz de:

- Utilizar correctamente los números enteros, fraccionarios, decimales e irracionales, así como los complejos en diferentes contextos y situaciones de la vida real. Además, utilizará los diferentes números en el manejo de los nuevos conceptos que aparecen en esta asignatura: matrices, determinantes, ecuaciones, sistemas de ecuaciones y expresiones cualesquiera.

- Incorporar los lenguajes simbólico y gráfico, y, en particular, el lenguaje algebraico a la resolución de ecuaciones, sistemas y, en definitiva, a la resolución de problemas.
- Consolidar el lenguaje gráfico, tanto en aspectos relacionados con la Geometría como con el Análisis.

Este objetivo general se trata, en su contexto más amplio, en todas las Unidades Didácticas, y, en particular, en las Unidades Didácticas siguientes:

— Número 1: Matrices.
— Número 2: Determinantes.
— Número 3: Sistemas de ecuaciones lineales.
— Número 9: Números reales. Funciones reales.

(Este objetivo está relacionado con los Objetivos Generales de la asignatura números 3, 4, 5, 6, y 7.)

FORMAS DE HACER PROPIAS DE LAS MATEMÁTICAS

En el Segundo Ciclo de la ESO y Primer Curso de Bachillerato, el alumno/a ha interpretado funciones dadas por medio de su gráfica, que responden a fenómenos reales y a situaciones próximas a su entorno. Asimismo, ha entrado en contacto con el tratamiento estadístico, mediante la recogida de datos relativos también a su propio entorno, construyendo con ellos algunas tablas, diagramas y gráficas estadísticas, y calculando los parámetros asociados a variables estadísticas unidimensionales y bidimensionales.

En Segundo Curso de Bachillerato, el alumno/a deberá ser capaz de:

- Organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana, obteniendo las expresiones analíticas en los fenómenos en los que aparecen funciones polinómicas de primer y segundo grado, así como funciones exponenciales, logarítmicas o trigonométricas.
- Utilizar la representación de funciones basada en los diversos conceptos asociados al cálculo infinitesimal.

Este objetivo general se trata en las Unidades Didácticas:

— Número 9: Números reales. Funciones reales.
— Número 10: Límites de funciones.
— Número 11: Continuidad de las funciones.
— Número 12: Derivadas.
— Número 13: Aplicaciones de las derivadas.
— Número 14: Representación gráfica de funciones.
— Número 15: Integrales indefinidas.
— Número 16: Integrales definidas. Aplicaciones.

(Este objetivo está relacionado con los Objetivos Generales de la asignatura números 1, 2, 3, 5, 7 y 8.)

VALORACIÓN Y ACTITUD

Al ser éste un objetivo general actitudinal, es válido para todo el Bachillerato y, en particular, para Segundo Curso.

En éste, el alumno/a deberá ser capaz de:

- Conocer y valorar las propias habilidades matemáticas para afrontar las situaciones que requieran su empleo o que permitan disfrutar con los aspectos creativos, manipulativos o utilitarios de las Matemáticas.

Este objetivo general se trata en todas las Unidades Didácticas.

(Este objetivo coincide con los Objetivos Generales de la asignatura números 2, 3, 6, 8 y 9.)

IDENTIFICACIÓN DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS Y SU CUANTIFICACIÓN

En el Segundo Ciclo de la ESO y en Primer Curso de Bachillerato, el alumno/a ha identificado, interpretado y utilizado elementos geométricos, regularidades y propiedades en las figuras planas y en las formas espaciales. Ha aprendido a medir longitudes y áreas de figuras planas por medio de métodos empíricos. Además conoce la resolución de triángulos.

En Segundo Curso de Bachillerato, el alumno/a deberá ser capaz de:

- Interpretar y calcular aspectos relacionados con figuras planas y formas espaciales presentes en la realidad, basándose en las propiedades y relaciones geométricas existentes en ellas, siendo sensible a la belleza que generan.
- Formalizar la precisión en situaciones relacionadas con la medida y comprobar propiedades geométricas asociadas a las figuras y formas planas más usuales. Iniciarse en los mismos aspectos sobre formas espaciales.
- Utilizar las herramientas que proporciona la geometría analítica en la resolución de los problemas asociados a los elementos usuales en el plano: puntos y rectas. De igual forma utilizarán los mismos instrumentos para resolver problemas relacionados con los elementos del espacio: puntos, rectas y planos.

Este objetivo general se trata en las Unidades Didácticas:

— Número 4: Vectores en el espacio.
— Número 5: Puntos, rectas y planos en el espacio.
— Número 6: Problemas métricos en el espacio.
— Número 7: Lugares geométricos. Cónicas.
— Número 8: Curvas y superficies.

(Este objetivo está relacionado con los Objetivos Generales de la asignatura números 1, 2, 4, 5 y 9.)

Estos objetivos de curso se concretan en cada Unidad Didáctica dentro de lo que llamamos **Objetivos Didácticos**. Éstos aparecen descritos en las páginas posteriores, correspondientes a cada una de las Unidades Didácticas.

CONEXIONES CON EL PRIMER CURSO DE BACHILLERATO Y EL SEGUNDO CICLO DE LA ESO

El currículo oficial determina las enseñanzas mínimas relativas a contenidos, así como los objetivos generales y los criterios de evaluación para la materia de Matemáticas II correspondiente a los Bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología. Partiendo de este marco, hemos construido los materiales curriculares de Matemáticas para el Segundo Curso de Bachillerato. Para ello, hemos tenido muy presente los conceptos y capacidades que el alumno/a ha adquirido en el Primer Curso de Bachillerato y en el Segundo Ciclo de la ESO.

A continuación, describimos y comentamos, para cada Bloque Temático que contempla el currículo oficial, la conexión existente entre las capacidades y contenidos ya adquiridos en el Primer Curso de Bachillerato y en el Segundo Ciclo de la ESO con las **capacidades y contenidos** que deben adquirir en Segundo Curso de Bachillerato, aludiendo así, obviamente, a nuestra consideración sobre la recurrencia y el tratamiento en espiral de los contenidos. Éstos a su vez servirán, en algún caso, de punto de partida en estudios posteriores a los de Bachillerato.

1. Bloque Temático I: Álgebra lineal

En el Primer Curso del Bachillerato y en Segundo Ciclo de la ESO, los alumnos/as han aprendido a:

- Manejar los números naturales, enteros, decimales y fraccionarios. Estableciendo relaciones de ordenación, expresión de cantidades y medidas, cálculo de razones y porcentajes y relaciones de divisibilidad.
- Utilizar la calculadora con las operaciones elementales, y también en relación con el cálculo con paréntesis, notación científica, jerarquía de las operaciones y cálculos con las funciones elementales.
- Iniciarse en el manejo de las operaciones con polinomios, en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer y segundo grado, y en pasar al lenguaje algebraico enunciados literales y de otro tipo. Asimismo, han sido capaces de resolver problemas sencillos mediante el empleo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Además, se han iniciado en el estudio y en la resolución de desigualdades e inecuaciones.
- Asimismo, serán capaces de resolver problemas mediante el empleo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Se iniciarán en el manejo de nuevos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, como el método de Gauss.

En el Segundo Curso de Bachillerato, los alumnos/as:

- Adquirirán la soltura necesaria para realizar las operaciones existentes con matrices, así como el correcto desarrollo de los determinantes, en particular los de tercer orden.
- Utilizarán el teorema de Rouché-Fröbenius en el estudio y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales. Más adelante, interpretarán las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales a la luz de los conocimientos geométricos que vayan adquiriendo.
- Se iniciarán en nuevos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones (regla de Cramer, matriz inversa), sin olvidar los procedimientos ya conocidos de cursos precedentes (método de Gauss, método de eliminación).
- Serán capaces de estudiar un sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro y, con posterioridad, resolverlo en las situaciones que sea posible.

2. Bloque Temático II: Geometría

En el Primer Curso de Bachillerato y en el Segundo Ciclo de la ESO, los alumnos/as han aprendido a:

- Iniciarse en el estudio de las razones trigonométricas, en su significado, en las relaciones entre ellas y en su aplicación a la resolución de triángulos rectángulos.
- Completar el estudio de las razones trigonométricas para ángulos cualesquiera. Aplicar sus definiciones y relaciones en la resolución de triángulos.
- Ser capaces de utilizar las múltiples relaciones entre las razones trigonométricas referidas a la suma y diferencia de ángulos, a los ángulos dobles, a los ángulos mitad, etc. Iniciarse en la resolución de ecuaciones trigonométricas.
- Utilizar los conceptos asociados a la geometría cartesiana del plano para resolver problemas de incidencia y métricos entre los elementos del plano: puntos y rectas.
- Iniciarse en el estudio de los vectores, así como en las diferentes operaciones que pueden realizarse con ellos.

En el Segundo Curso de Bachillerato, los alumnos/as:

- Completarán el estudio de los vectores en el espacio, realizando las posibles operaciones con ellos y su aplicación a problemas de índole geométrica.
- Serán capaces de describir los elementos geométricos del espacio: puntos, rectas y planos. A su vez, estudiarán y formularán las relaciones de tipo afín entre ellos.

- Utilizarán los conceptos asociados a la geometría cartesiana del plano y del espacio para resolver problemas métricos entre los elementos del plano.
- Completarán el estudio de los lugares geométricos en el plano y, en particular, estudiarán el mundo de las cónicas más significativas: circunferencia, elipse,. hipérbola y parábola.
- Se iniciarán en el estudio de familias de curvas planas de gran interés: espirales, catenarias, cicloides, cisoides, concoides, óvalos, etc.
- Resolverán situaciones geométricas, utilizando diferentes herramientas que vienen dadas por la trigonometría, la geometría vectorial, la geometría afín o la geometría métrica.

3. Bloque Temático III: Análisis

En el Primer Curso de Bachillerato y en el Segundo Ciclo de la ESO, los alumnos/as han aprendido a:

- Ser capaces de interpretar y manejar funciones dadas por medio de su gráfica, tabla, expresión algebraica sencilla o descripción verbal. Asimismo, a analizar las gráficas, atendiendo a nuevos conceptos: acotación, crecimiento, máximos y mínimos, etcétera.
- Conceptualizar las funciones constantes, lineales o de proporcionalidad directa y afines, así como los elementos asociados a ellas. Serán capaces de identificar estas relaciones funcionales con problemas y fenómenos reales.
- Iniciarse en el estudio de las principales familias de funciones: polinómicas de primer y segundo grado, de proporcionalidad inversa, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, así como las principales propiedades asociadas a ellas. Deberán identificar estas funciones en situaciones de resolución de problemas y fenómenos reales.
- Saber interpretar y manejar funciones dadas por medio de su gráfica, tabla, expresión algebraica o descripción verbal. Asimismo, analizarán las gráficas atendiendo a nuevos conceptos: continuidad, crecimiento, extremos, etc.

En el Segundo Curso de Bachillerato, los alumnos/as:

- Serán capaces de interpretar y utilizar los conceptos básicos del cálculo infinitesimal: límite, continuidad, derivabilidad e integrabilidad.
- Manejarán con soltura el cálculo de límites sencillos y las reglas de derivación de las operaciones con funciones y de las funciones elementales, además de la regla de derivación para las funciones compuestas.
- Completarán el estudio de las funciones, calculando los elementos más relevantes y realizando su representación gráfica en un diagrama cartesiano.
- Utilizarán la derivada en la resolución de problemas de optimación sencillos.
- Se iniciarán en el significado de la integral definida de funciones sencillas, así como en el cálculo de primitivas por los procedimientos más elementales que se conocen.

4. Bloque Temático: Resolución de problemas

En el Primer Curso de Bachillerato y en el Segundo Ciclo de la ESO, los alumnos/as han aprendido a:

- Conseguir recursos técnicos sencillos en la resolución de problemas. Estos recursos están relacionados con las fases de comprensión del enunciado y búsqueda de estrategias.
- Alcanzar estrategias y recursos más generales para resolver problemas, poner en práctica la estrategia elegida en la fase de búsqueda de estrategias, analizar los resultados obtenidos y validar o no las estrategias utilizadas.
- Iniciarse en poner por escrito, de manera ordenada, el protocolo de la resolución de un problema.

- Poner en práctica alguna de las herramientas heurísticas más simples: simplificación, particularización, ensayo y error, experimentación y modificar el problema.

En el Segundo Curso de Bachillerato, los alumnos/as:

- Utilizarán alguno de los modelos descritos en la resolución de problemas. Pondrán en práctica las estrategias más habituales en la resolución de problemas.
- Elaborarán, de forma precisa y clara, el protocolo de resolución de un problema, serán capaces de modificar su punto de vista y perseverar en la búsqueda de las soluciones a los problemas.
- Se iniciarán en algunos de los modos propios de demostración matemática: demostración directa, reducción al absurdo, inducción infinita, proceso diagonal de Cantor, etc.

3 - ESTRUCTURA GLOBAL

CONTENIDOS

BLOQUE I: Álgebra lineal

		CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Matrices	UNIDAD DIDÁCTICA 1	**1.** Matrices. Conceptos asociados. **2.** Tipos de matrices. **3.** Operaciones con matrices **3.1.** Suma de matrices. **3.2.** Producto por un número (escalar). **4.** Producto de matrices. **5.** Algunas clases de matrices. **6.** Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss. **7.** Matriz inversa. **8.** Rango de una matriz.	• Identificación de los diferentes tipos de matrices más habituales. • Realización de las diferentes operaciones entre matrices y entre números y matrices. • Utilización de los procesos de reducción en el cálculo de la matriz inversa de una dada, así como en el cálculo del rango de una matriz. • Revisión de las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.	• Valorar las matrices para describir situaciones numéricas complejas. • Mostrar gusto y precisión en la presentación tabulada y clara de números. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto, así como corrección y pulcritud en el desarrollo de las actividades. • Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos.
Determinantes	UNIDAD DIDÁCTICA 2	**1.** Determinantes de orden dos y tres. **2.** Permutaciones. Definición de un determinante. **3.** Propiedades de los determinantes. **4.** Cálculo de un determinante por los elementos de una línea. **5.** Matriz inversa. **6.** Rango de una matriz.	• Cálculo del valor del determinante de una matriz mediante diversos métodos: Sarrus, Gauss, por adjuntos. • Desarrollo del determinante de una matriz a través de las propiedades de aquéllos. • Utilización de los determinantes para encontrar la matriz inversa de una dada, así como para el cálculo del rango de una matriz.	• Confianza en las capacidades propias y gusto en el desarrollo de estrategias de cálculo. • Curiosidad e interés por explorar regularidades que aparecen en las tablas numéricas. • Corrección y pulcritud en el desarrollo de las actividades. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto.

CONTENIDOS

BLOQUE I: Álgebra lineal

Sistemas de ecuaciones lineales — UNIDAD DIDÁCTICA 3

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clases. **2.** Existencia de soluciones. **3.** Métodos de resolución. **4.** Regla de Cramer. **5.** Sistemas homogéneos. **6.** Eliminación de parámetros.	• Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales. • Estudio de la existencia de soluciones (compatibilidad o incompatibilidad) de un sistema de ecuaciones lineales, mediante el teorema de Rouché-Fröbenius. • Estudio de un sistema de ecuaciones lineales que dependa de un parámetro. • Resolución de un sistema de ecuaciones lineales de diferentes formas: regla de Cramer, método de Gauss y método matricial.	• Perseverancia en la busqueda de soluciones de los sistemas de ecuaciones compatibles. • Sentido crítico ante las soluciones intuitivas de los sistemas de ecuaciones. • Gusto por la presentación ordenada de los procesos y resultados obtenidos en el estudio y resolución de sistemas de ecuaciones. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto.

BLOQUE II: Geometría

Vectores en el espacio — UNIDAD DIDÁCTICA 4

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
1. Vector libre. **2.** Operaciones con vectores libres. **3.** Dependencia de vectores. Bases. **4.** Producto escalar de dos vectores libres. **4.1.** Interpretación geométrica del producto escalar. **4.2.** Expresión analítica del producto escalar. **5.** Consecuencias del producto escalar. **6.** Producto vectorial de dos vectores libres. **6.1.** Interpretación geométrica del producto vectorial. **6.2.** Expresión analítica del producto vectorial. **7.** Producto mixto de vectores libres. **7.1.** Interpretación geométrica del producto mixto. **7.2.** Expresión analítica del producto mixto.	• Cálculo de los valores de las diferentes operaciones entre dos vectores. • Interpretación geométrica de cada una de las operaciones con vectores. • Estudio mediante el rango de matrices de la dependencia de vectores. • Cálculo de las coordenadas de un vector respecto de una base dada. • Aplicación de las propiedades de los productos escalar, vectorial y mixto a problemas geométricos.	• Reconocimiento de la utilidad de los vectores para interpretar resultados geométricos. • Corrección y pulcritud en el desarrollo de las actividades. • Valoración de los útiles geométricos para resolver problemas de la vida real. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto. • Valoración del cálculo vectorial en la resolución de resultados de la geometría clásica: área de un rectángulo, volumen de un tetraedro.

CONTENIDOS

BLOQUE II: Geometría

		CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Puntos, rectas y planos en el espacio	UNIDAD DIDÁCTICA 5	**1.** Ecuaciones de la recta. **2.** Ecuaciones del plano. **2.1.** Ecuación normal del plano. **3.** Posiciones relativas de dos y tres planos. **4.** Posiciones relativas de una recta y un plano. **5.** Posiciones relativas de dos rectas.	• Determinación de una recta. Utilización de sus diferentes ecuaciones. • Determinación de un plano. Utilización de sus diferentes ecuaciones. • Resolución de problemas de incidencia, intersección y paralelismo en el espacio. • Aplicación de los conceptos de álgebra lineal a la resolución de problemas de intersección y paralelismo.	• Reconocimiento de la utilidad de conceptos como vectores y matrices para interpretar resultados geométricos. • Corrección y pulcritud en el desarrollo de las actividades. • Valoración de los útiles geométricos para resolver problemas de la vida real. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto. • Sentido crítico ante las soluciones obtenidas.
Problemas métricos en el espacio	UNIDAD DIDÁCTICA 6	**1.** Ángulos entre elementos del espacio. **2.** Proyecciones entre elementos del espacio. **3.** Rectas que se apoyan sobre otras dos rectas dadas. **4.** Distancias en el espacio. **4.1.** Distancia de un punto a un plano. **4.2.** Distancia de un punto a una recta. **4.3.** Otras distancias. **5.** Otras medidas en el espacio: áreas y volúmenes.	• Determinación de rectas y planos a través de alguna condición métrica conocida. • Identificación y medida de ángulos entre rectas y planos. • Cálculo de distancias entre los elementos del espacio. • Cálculo de áreas y volúmenes en el espacio. • Determinación de puntos y rectas proyección de otras. Aplicación al cálculo de elementos simétricos en el espacio.	• Reconocimiento de la utilidad de conceptos como vectores y operaciones entre ellos para interpretar resultados geométricos. • Corrección y pulcritud en el desarrollo de las actividades. • Valoración de los útiles geométricos para resolver problemas de la vida real. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto. • Sentido crítico ante las soluciones obtenidas.

CONTENIDOS

BLOQUE II: Geometría

	CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Lugares geométricos. Cónicas — UNIDAD DIDÁCTICA 7	**1.** Lugares geométricos. **2.** Circunferencia. **3.** Elipse. **4.** Hipérbola. **5.** Parábola. **6.** Clasificación de las cónicas.	• Obtención de las ecuaciones de lugares geométricos planos sencillos como la mediatriz de un segmento o la bisectriz de un ángulo. • Obtención de las ecuaciones reducidas de todas las cónicas. • Determinación de la incidencia de puntos y rectas con cónicas. • Estudio de posiciones relativas entre cónicas. • Obtención de las rectas tangente y normal a una cónica en un punto.	• Reconocimiento de la utilidad de los conceptos geométricos para analizar y describir las formas planas y espaciales que nos rodean. • Corrección y pulcritud en el desarrollo de las actividades. • Aprecio por el mundo real que nos rodea. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto. • Tenacidad y constancia en el estudio de los lugares geométricos, y sentido crítico ante las soluciones obtenidas.
Curvas y superficies — UNIDAD DIDÁCTICA 8	**1.** Coordenadas paramétricas en el plano. **2.** Coordenadas polares en el plano. **3.** Espirales. **4.** Curvas hiperbólicas. **5.** Cicloides. **6.** Otras familias de curvas. **7.** Coordenadas en el espacio. **8.** La esfera. **9.** Cuádricas.	• Expresión de curvas planas en diferentes sistemas de coordenadas. • Obtención de la representación gráfica, así como las ecuaciones de algunas espirales. • Obtención de la ecuación y trazado de la cicloide y de alguna otra curva de su misma familia. • Obtención de la ecuación de la superficie esférica. • Análisis de las ecuaciones y de las secciones planas de las cuádricas más significativas.	• Gusto por estudiar las curvas y superficies que se presentan en la naturaleza, el arte y la arquitectura. • Reconocimiento del papel de las nuevas tecnologías en la representación de curvas y superficies. • Aprecio por el mundo real que nos rodea. • Disposición favorable hacia el trabajo propuesto. • Tenacidad y constancia en el estudio de curvas y superficies, y sentido crítico ante las soluciones obtenidas.

CONTENIDOS

BLOQUE III: Análisis

	CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Números reales. Funciones reales — UNIDAD DIDÁCTICA 9	**1.** El conjunto de los números reales. **2.** Orden en el conjunto de los números reales. Intervalos en la recta real. **3.** Entornos de un punto. **4.** Conjuntos acotados en la recta real. **5.** Funciones reales de variable real. Dominio de una función. **6.** Funciones simétricas y funciones periódicas. **7.** Funciones acotadas. Extremos absolutos. **8.** Monotonía. **9.** Extremos relativos. **10.** Composición de funciones. Propiedades. **11.** Función inversa.	• Representación de intervalos y entornos en la recta real, y estudio de su acotación. • Cálculo del dominio de las funciones elementales. • Utilización de las gráficas de funciones dadas para realizar el estudio de sus características. • Estudio de las características de una función dada mediante su expresión analítica. • Saber encontrar la función inversa de una función dada y aplicar las propiedades de la composición de funciones.	• Valorar la utilidad de la equivalencia de la recta real y del conjunto de los números reales. • Sensibilidad y gusto por la precisión y el cuidado en la representación gráfica de las funciones y en el análisis de las mismas. • Gusto por la claridad y el rigor matemático en los procesos de resolución de actividades. • Reconocimiento de la gran utilidad del lenguaje funcional y gráfico como potente herramienta del Análisis Matemático.
Límites de funciones — UNIDAD DIDÁCTICA 10	**1.** Límite de una función. Funciones convergentes. **2.** Límites laterales. **3.** Propiedades de las funciones convergentes. **4.** Límites infinitos cuando **x** tiende a un número real. **5.** Límites finitos en el infinito. **6.** Límites infinitos en el infinito. **7.** Ramas infinitas y asíntotas de una función. **8.** Operaciones con límites de funciones. **9.** Cálculo de límites sencillos. **10.** Límites de funciones polinómicas y resolución de indeterminaciones.	• Interpretar gráficamente el límite de una función en un punto, los límites laterales de una función en un punto y el límite de una función en el infinito. • Encontrar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función. • Calcular límites utilizando las propiedades relativas a las operaciones con funciones convergentes y con funciones que tienden a infinito. • Utilizar con corrección los procedimientos que resuelven las indeterminaciones más usuales.	• Valorar la gran utilidad de la representación gráfica de funciones en el cálculo de límites y asíntotas. • Gusto por la precisión y rigor en los procesos que nos permiten calcular límites. • Valorar la utilidad de la regla de Ruffini y del número **e** en la resolución de algunos tipos de indeterminaciones.

CONTENIDOS

		CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES

BLOQUE III: Análisis

		CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Continuidad de las funciones	UNIDAD DIDÁCTICA 11	**1.** Funciones continuas. **2.** Continuidad lateral. **3.** Discontinuidad de una función. Tipos. **4.** Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas. **5.** Propiedades de las funciones continuas.	• Utilización de la representación gráfica de las funciones en el estudio de la continuidad de las mismas. • Estudio de la continuidad de las funciones dadas analíticamente, mediante el cálculo de límites. • Clasificación de las distintas discontinuidades que presenta una función dada por medio de su gráfica. • Uso de la continuidad de las funciones elementales y de las operaciones con funciones continuas en el estudio de la continuidad de las funciones dadas analíticamente.	• Valorar la gran utilidad de la representación gráfica de una función para el estudio de su continuidad. • Apreciar la utilidad del cálculo de límites en el estudio de la continuidad. • Rigor y claridad en los procesos que nos permite estudiar la continuidad de funciones dadas.
Derivadas	UNIDAD DIDÁCTICA 12	**1.** Tasa de variación media e instantánea. **2.** Derivada de una función en un punto. **3.** Interpretación geométrica de la derivada. **4.** Derivadas laterales. **5.** Función derivada. **6.** Derivadas sucesivas. **7.** Operaciones con funciones derivadas. **8.** Derivadas de las funciones elementales. **9.** Diferencial de una función.	• Saber determinar las rectas tangente y normal a una curva en un punto dado. • Calcular la función derivada de cualquier función dada usando la tabla de derivadas. • Hacer uso de las derivadas laterales para el estudio de la derivabilidad. • Encontrar las derivadas sucesivas de una función dada en casos sencillos. • Utilizar la diferencial en cálculos aproximados.	• Valorar la utilidad del límite en el cálculo de derivadas de una función en un punto y de funciones derivadas. • Apreciar la importancia que tiene el concepto de derivada en el cálculo de rectas tangentes a una curva dada. • Reconocimiento de la importancia de los conceptos de derivada y diferencial en el Análisis Matemático y en sus aplicaciones en otras ciencias.

CONTENIDOS

BLOQUE III: Análisis

		CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Aplicaciones de las derivadas	UNIDAD DIDÁCTICA 13	**1.** Continuidad de las funciones derivables. **2.** Crecimiento y decrecimiento de una función. **3.** Extremos relativos. **4.** Determinación de extremos relativos. **5.** Optimización de funciones. **6.** Concavidad. **7.** Puntos de inflexión. **8.** Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites.	• Relacionar continuidad y derivabilidad. • Saber encontrar los intervalos de monotonía y concavidad de una función y analizar la monotonía en un punto. • Calcular extremos relativos y puntos de inflexión de funciones derivables. • Maximizar o minimizar problemas de contextos reales. • Utilizar las derivadas en la resolución de las indeterminaciones que se presentan en el cálculo de límites.	• Valorar la utilidad de las derivadas en los problemas reales de optimización. • Apreciar las derivadas como herramientas prácticas en el cálculo de límites. • Valorar la importancia que ha tenido y tiene el cálculo diferencial en Matemáticas y en otras ciencias.
Representación gráfica de funciones	UNIDAD DIDÁCTICA 14	**1.** Dominio y recorrido de una función. **2.** Puntos de corte con los ejes. Simetrías. Periodicidad. **3.** Asíntotas y ramas infinitas. **4.** Monotonía. Extremos relativos. Concavidad. Puntos de inflexión. **5.** Intervalos de signo constante. Regiones. **6.** Representación gráfica de funciones.	• Saber estudiar cualquier característica de una función dada. • Utilizar los intervalos de signo constante en la representación gráfica de funciones. • Representar funciones a partir de su expresión algebraica. • Interpretar las gráficas de las funciones.	• Sensibilidad y gusto por la elaboración y presentación cuidada de las gráficas. • Reconocimiento de la utilidad de la representación gráfica de funciones en el estudio de éstas. • Incorporación del lenguaje gráfico a la forma de tratar la información.

CONTENIDOS

BLOQUE III: Análisis

		CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
Integrales indefinidas	UNIDAD DIDÁCTICA 15	**1.** Primitiva de una función. **2.** Integral indefinida. Propiedades. **3.** Métodos de integración.	• Utilización de la tabla de integrales inmediatas en el cálculo de primitivas. • Cálculo de primitivas mediante técnicas elementales. • Utilización del método de integración por cambio de variable en la resolución de integrales indefinidas. • Cálculo de primitivas sujetas a condiciones dadas de antemano.	• Gusto por la claridad y el rigor en el cálculo de primitivas e integrales indefinidas. • Reconocimiento de la gran utilidad de la integral indefinida como herramienta del cálculo infinitesimal.
Integrales definidas. Aplicaciones	UNIDAD DIDÁCTICA 16	**1.** Cálculo de áreas por el método exhaustivo. **2.** Áreas de recintos planos. **3.** Integral definida. Propiedades. **4.** Teorema del valor medio. **5.** Teorema fundamental del cálculo integral. **6.** Regla de Barrow. **7.** Área encerrada bajo una curva. **8.** Área encerrada por dos curvas.	• Utilización del método exhaustivo en el cálculo de áreas de recintos planos. • Utilización del teorema del valor medio en la resolución de ejercicios sencillos. • Relación del cálculo diferencial e integral a partir del teorema fundamental del cálculo. • Cálculo de integrales definidas mediante la regla de Barrow. • Cálculo de áreas de recintos planos por medio de integrales definidas.	• Valorar la utilidad del cálculo integral en Matemáticas y en otras disciplinas. • Sensibilidad y gusto por la precisión y el cuidado en la representación gráfica de funciones de cara a determinar el recinto o recintos cuyas áreas se quieren hallar. • Valoración de la regla de Barrow en el cálculo de integrales definidas.

4-DESARROLLO DE BLOQUES TEMÁTICOS

BLOQUE TEMÁTICO

1

Álgebra lineal

La meta del álgebra que se desarrolla en este curso es la resolución de situaciones que pueden plantearse mediante **sistemas de ecuaciones lineales**. Este objetivo está siempre presente en el desarrollo de las Unidades Didácticas en las que se hace el estudio de las **matrices** y de los **determinantes**.

A través de sistemas de ecuaciones lineales se plantean y resuelven numerosas situaciones de variados ámbitos científicos: geometría, física, etc. El álgebra lineal proporciona métodos sencillos que permiten resolver los citados sistemas de ecuaciones.

Los conceptos que acompañan los sistemas de ecuaciones son los de matrices y determinantes. Las matrices nos permiten agrupar de forma ordenada una gran cantidad de información y son fácilmente manejables a través de los medios informáticos. Los determinantes permiten extraer propiedades de las matrices con importantes aplicaciones.

Estructura de Unidades

Unidad Didáctica 1: **Matrices**

1. Matrices. Conceptos asociados.
2. Tipos de matrices.
3. Operaciones con matrices.
   3.1. Suma de matrices.
   3.2. Producto por un número (escalar).
4. Producto de matrices.
5. Algunas clases de matrices.
6. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.
7. Matriz inversa.
8. Rango de una matriz.

Unidad Didáctica 2: **Determinantes**

1. Determinantes de orden dos y tres.
2. Permutaciones. Definición de un determinante.
3. Propiedades de los determinantes.
4. Cálculo de un determinante por los elementos de una línea.
5. Matriz inversa.
6. Rango de una matriz.

Unidad Didáctica 3: **Sistemas de ecuaciones lineales**

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clases.
2. Existencia de soluciones.
3. Métodos de resolución.
4. Regla de Cramer.
5. Sistemas homogéneos.
6. Eliminación de parámetros.

ORGANIZADORES DEL APRENDIZAJE

Para alcanzar una comprensión significativa del desarrollo de este Bloque Temático, es necesario que los alumnos construyan su aprendizaje fundamentando y revisando sus conocimientos sobre:

CONOCIMIENTOS RECURRENTES	**Ideas y bases conceptuales:** • Números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos. • Operaciones con los distintos tipos de números. • Ecuaciones. • Sistemas de ecuaciones. • Métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. • Tabla o cuadro de números. • Operaciones con matrices.	**Términos:** • Número. • Matriz. • Matriz inversa. • Rango de una matriz. • Permutación. • Determinante de una matriz. • Sistema de ecuaciones. • Sistemas homogéneos. • Parámetro.
METODOLOGÍA	• **Integradora** de las experiencias del alumno. • **Reforzadora del razonamiento inductivo,** mediante la experimentación de situaciones concretas. • **Heurística,** poniendo el acento en el dominio de procedimientos, técnicas y operaciones. • **Fomentar el razonamiento deductivo,** a través de conceptos, propiedades y teoremas.	
RECURSOS Y MEDIOS	• Utilización de la **calculadora** y del ordenador. • Utilización de textos sobre historia de las Matemáticas. • Utilización de problemas que han hecho historia.	

CRITERIOS Y ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Criterios

1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices como instrumento para representar e interpretar datos, relaciones y ecuaciones.

Este criterio supone:
- Usar las matrices como cuadros de números, identificar sus elementos, así como las clases de matrices más usuales.
- Realizar adecuadamente las operaciones definidas entre matrices.

2. Usar las matrices y los determinantes para representar e intercambiar información y resolver problemas de la vida cotidiana y de los ámbitos científico y tecnológico.

Este criterio supone:
- Adquirir un rango más amplio de destrezas en el manejo de las situaciones numéricas.
- Manejar los conceptos y procedimientos relacionados con las matrices y el desarrollo de los determinantes.
- Resolver situaciones relacionados con la geometría analítica de forma concisa.

3. Utilizar convenientemente las propiedades y los diferentes métodos que permiten calcular el determinante de una matriz.

Este criterio supone:
- Manejar las propiedades relacionadas con los determinantes.
- Aplicar las diferentes técnicas de obtención del determinante de una matriz.
- Utilizar los determinantes para el cálculo de la matriz inversa y del rango de un matriz.

4. Resolver problemas por medio de la simbolización de las relaciones que existan en ellos y, en su caso, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Este criterio supone:
- Utilizar las herramientas algebraicas básicas en la resolución de problemas.
- Usar notaciones simbólicas en el planteamiento de problemas.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales, utilizando los procedimientos algebraicos desarrollados.

5. Usar el teorema de Rouché-Fröbenius en el estudio de la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Este criterio supone:
- Utilizar el citado resultado en el estudio de todo sistema de ecuaciones lineales.
- Usar dicho teorema en el estudio de sistemas dependientes de un parámetro.

2. Actividades

1. Una matriz cuadrada se llama antisimétrica cuando su traspuesta es igual a su opuesta. Obtener la forma general de una matriz A de orden 2 que sea antisimétrica. Calcular A^2, A^4 y A^{33}.

Las matrices antisimétricas de orden dos son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos las potencias pedidas:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -a^2 I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-a^2\, I) \cdot (-a^2\, I) = +a^4\, I^2 = a^4\, I$$

$$A^{33} = A^{32} \cdot A = a^{32}\, I \cdot A = a^{32}\, A =$$

$$= a^{32} \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a^{33} \\ -a^{33} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dada la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, ¿qué relación deben guardar las constantes a y b para que se verifique la igualdad $A^2 = A$?

Debe cumplirse que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

Operando, $\begin{cases} a^2 = a \\ a + b = 1 \end{cases}$

Resolviendo, se obtienen las soluciones $a = 0$, $b = 1$ o $a = 1$, $b = 0$.

3. ¿Qué matrices conmutan con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Debe cumplirse que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Operando, $\begin{cases} a = a + 2c \\ 2a + b = b + 2d \\ c = c \\ 2c + d = d \end{cases}$

Resolviendo el sistema, se obtiene $a = d$, $c = 0$.

Por tanto, las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in R$

4. Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ tiene inversa cualquiera que sea el valor del parámetro a y calcularla.

El determinante de la matriz es de $A = 2 \neq 0$.

La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ es

$$A^t = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a^2 - 2 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}\,(A^t) = \begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A}\left[Adj\ (A^t)\right] = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{2 - a^2}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

5. Halla el rango de la siguiente matriz, según los valores de los parámetros a y b: $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 2 & b & b^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

- Si $a \neq 2$, $b \neq 0$, $b \neq 1$, el rango de A es tres.
- Si $a = 2$ y b cualquiera, el rango de A es dos.
- Si $a \neq 2$ y $b \neq 0$, el rango de A es tres.
- Si $b = 1$ y $a \neq 1$, el rango de A es dos.
- Si $b = 1$, $a = 1$, el rango de A es uno.

6. Calcula, cuando exista, la inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$

La matriz inversa siempre existe, ya que $det\,A = -(a^2 + b^2) \neq 0$.

La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \\ -b & 0 & a \end{pmatrix}$ es

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

$$Adj\,(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a^2+b^2 & 0 & 0 \\ a^2+b^2 & -b & -a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\left[Adj\,(A^t)\right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

7. Calcula *x* para que el determinante de la matriz *A* valga 0, siendo $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

$$det\,A = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^4 - 1$$

Por tanto, det $A = x^4 - 1$, y el determinante se anula para $x = 1$ y $x = -1$.

8. Dado el sistema $\left\{ \begin{aligned} (a+1)\ \ x + y + z &= 3 \\ x + 2y + az &= 4 \\ a + ay + 2z &= 2a \end{aligned} \right.$

***a)* Estúdialo.** ***b)* Resuélvelo para $a = 2$.**

a) • Si $a \neq 0$, $a \neq 2$ y $a \neq -3$, el sistema es compatible determinado.
• Si $a = 0$ o $a = -3$, el sistema es incompatible.
• Si $a = 2$, el sistema es compatible indeterminado.

b) Cuando $a = 2$ las soluciones del sistema son: $x = 2/5$, $y = 9/5 - t$, $z = t$ con $t \in R$.

9. Sea el sistema $\left\{ \begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned} \right.$

***a)* Añade una ecuación de modo que el sistema resultante sea compatible.**
***b)* Añade una ecuación de modo que el sistema resultante sea incompatible.**
***c)* Interpreta geométricamente los apartados anteriores.**

a) Puede añadirse cualquier combinación de ambas ecuaciones.
b) Puede añadirse la ecuación $2x - 3y = 4$.
c) En el sistema dado, las ecuaciones son rectas que se cortan en el origen. Por tanto:
• En el apartado a), basta añadir una ecuación de una recta que pase por el origen.
• En el apartado b), basta añadir una ecuación de una recta que no pase por el origen.

10. Estudia, para los diferentes valores del parámetro *a*, la existencia de soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= a - 1 \\ 2x + y + az &= a \\ x + ay + z &= 1 \end{aligned} \right.$$

y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

• Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, el sistema es compatible determinado.
• Si $a = 1$, el sistema es incompatible.
• Si $a = 2$, el sistema es compatible indeterminado.
Sus soluciones son:
$x = 1 - t$, $y = 0$, $z = t$ con $t \in R$.

BLOQUE TEMÁTICO

2

Geometría

Puede decirse de la **Geometría** que es el quehacer matemático más antiguo y uno de las formas de hacer matemáticas por excelencia. Euclides en su obra *Elementos* sentó las bases de este bello edificio. Después de los grandes geómetras griegos, como Apolonio, han sido numerosos los matemáticos que en todo tiempo han dedicado sus esfuerzos al estudio de las diferentes geometrías.

En el desarrollo de las Unidades Didácticas que forman este Bloque Temático se han desarrollado aspectos de la geometría que hacen uso continuado de las conceptos ya vistos en la parte de álgebra lineal: matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales. A partir de los conceptos de **vector** y **punto,** se construyen las denominadas geometrías vectorial y afín. El concepto de **distancia** nos permite abordar los problemas de la geometría métrica.

Se complementa este Bloque Temático con el estudio de otro de los conceptos básicos que más resultados ha aportado a lo largo de toda la historia de las matemáticas: el concepto de **lugar geométrico**. De éste derivan las **cónicas**, otras muchas **curvas** y algunas **superficies**.

Estructura de Unidades

Unidad Didáctica 4: **Vectores en el espacio**

1. Vector libre.
2. Operaciones con vectores libres.
3. Dependencia de vectores. Bases.
4. Producto escalar de dos vectores libres.
   4.1. Interpretación geométrica del producto escalar.
   4.2. Expresión analítica del producto escalar.
5. Consecuencias del producto escalar.
6. Producto vectorial de dos vectores libres.
   6.1. Interpretación geométrica del producto vectorial.
   6.2. Expresión analítica del producto vectorial.
7. Producto mixto de vectores libres.
   7.1. Interpretación geométrica del producto mixto.
   7.2. Expresión analítica del producto mixto.

Unidad Didáctica 5: **Puntos, rectas y planos en el espacio**

1. Ecuaciones de la recta.
2. Ecuaciones del plano.
   2.1. Ecuación normal del plano.
3. Posiciones relativas de dos y tres planos.
4. Posiciones relativas de una recta y un plano.
5. Posiciones relativas de dos rectas.

Unidad Didáctica 6: **Problemas métricos en el espacio**

1. Ángulos entre elementos del espacio.
2. Proyecciones entre elementos del espacio.
3. Rectas que se apoyan sobre otras dos rectas dadas.
4. Distancias en el espacio.
   4.1. Distancia de un punto a un plano.
   4.2. Distancia de un punto a una recta.
   4.3. Otras distancias.
5. Otras medidas en el espacio: áreas y volúmenes.

Unidad Didáctica 7: **Lugares geométricos. Cónicas**

1. Lugares geométricos.
2. Circunferencia.
3. Elipse.
4. Hipérbola.
5. Parábola.
6. Clasificación de las cónicas.

Unidad Didáctica 8: **Curvas y superficies**

1. Coordenadas paramétricas en el plano.
2. Coordenadas polares en el plano.
3. Espirales.
4. Curvas hiperbólicas.
5. Cicloides.
6. Otras familias de curvas.
7. Coordenadas en el espacio.
8. La esfera.
9. Cuádricas.

ORGANIZADORES DEL APRENDIZAJE

Para alcanzar una comprensión significativa del desarrollo de este Bloque Temático, es necesario que las alumnas y los alumnos construyan su aprendizaje fundamentando y revisando sus conocimientos sobre:

<table>
<tr><td rowspan="1">CONOCIMIENTOS RECURRENTES</td><td>Ideas y bases conceptuales:
• Números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales.
• Ecuaciones.
• Sistemas de ecuaciones.
• Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
• Matrices y determinantes.
• Operaciones con matrices.
• Operaciones con vectores del plano.
• Distancias entre dos puntos.</td><td>Términos:
• Número.
• Matriz.
• Vector. Coordenadas.
• Puntos.
• Recta.
• Plano.
• Distancia.
• Lugar geométrico. Curva.
• Cónica.
• Superficie.</td></tr>
<tr><td>METODOLOGÍA</td><td colspan="2">• Integradora de las experiencias del alumno.
• Reforzadora del razonamiento inductivo, mediante la experimentación de situaciones concretas.
• Heurística, poniendo el acento en el dominio de procedimientos, técnicas y operaciones.
• Fomentar el razonamiento deductivo, a través de conceptos, propiedades y teoremas.</td></tr>
<tr><td>RECURSOS Y MEDIOS</td><td colspan="2">• Utilización de la calculadora y del ordenador.
• Utilización de textos sobre historia de las Matemáticas.
• Utilización de problemas que han hecho historia.</td></tr>
</table>

CRITERIOS Y ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Criterios

1. Utilizar el lenguaje vectorial y las operaciones con vectores como instrumento para representar datos, relaciones y ecuaciones.

Este criterio supone:
- Realizar adecuadamente las operaciones definidas entre vectores.
- Utilizar los vectores en la resolución de problemas de carácter vectorial y afín.
- Interpretar correctamente las soluciones que se derivan de los problemas vectoriales.

2. Usar los elementos del espacio como puntos, rectas y planos, para analizar, organizar y sistematizar los conocimientos espaciales.

Este criterio supone:
- Manejar las diferentes ecuaciones que permiten expresar una recta o un plano en coordenadas cartesianas.
- Usar el teorema de Rouché-Fröbenius en el estudio del significado geométrico de las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales que representan rectas y planos en el espacio.

3. Utilizar los productos escalar, vectorial y mixto entre vectores en la resolución de los problemas métricos entre puntos, rectas y planos del espacio.

Este criterio supone:
- Utilizar las operaciones citadas en el cálculo de distancias entre los elementos del espacio.
- Usar de manera análoga los productos precedentes en la medida de ángulos y determinación de áreas y volúmenes de algunas formas y figuras.
- Resolver otros problemas en el espacio, como proyecciones de unos elementos sobre otros, o determinar elementos simétricos de otros.

4. Identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos, analizar sus propiedades métricas y construirlas a partir de ellas, estudiando alguna de sus aplicaciones.

Este criterio supone:
- Utilizar las técnicas propias de la geometría analítica en la determinación de lugares geométricos sencillos, en particular en el estudio y determinación de las cónicas.
- Adquirir un rango más amplio de destrezas en el manejo de situaciones geométricas.

- Construcción, con útiles de dibujo, de alguno de los lugares geométricos más representativos.

5. Interpretar, geométricamente, el significado de expresiones analíticas correspondientes a curvas y a superficies sencillas.

Este criterio supone:
- Reconocer, averiguar puntos y visualizar las formas geométricas a partir de su expresión analítica.
- Usar las coordenadas cartesianas y polares en la descripción de curvas planas, optando por las más adecuadas, dependiendo de la situación de estudio.

2. Actividades

1. Comenta el significado geométrico, en función de los valores de *a*, de las posibles soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = 1 \\ z + y + az = 1 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$, los tres planos se cortan en un punto.
- Si $a = 1$, los tres planos coinciden.
- Si $a = -2$, los tres planos se cortan dos a dos.

2. Encuentra las ecuaciones paralelas a la recta de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$ y que pasa por el punto de intersección de la recta $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ con el plano $x - y + z = 5$.

La recta buscada es $\dfrac{x - \frac{17}{5}}{2} = \dfrac{y + \frac{9}{5}}{3} = \dfrac{z + \frac{1}{5}}{-1}$

3. Di qué condiciones deben cumplir *a*, *b*, *c* y *d* para que el plano de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ sea:
a) Paralelo al plano *OXY*.
b) Perpendicular al plano *OXY*.
c) Paralelo al eje *OZ*.
d) No sea paralelo a ninguno de los ejes coordenados.

a) $a = 0$ y $b = 0$; c y d cualesquiera.
b) $c = 0$; a, b y d cualesquiera.
c) $c = 0$; a, b y d cualesquiera.
d) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ y d cualquiera.

4. Encuentra en la recta que pasa por los puntos $A(-1, 0, 1)$ y $B(1, 2, 3)$ un punto tal, que su distancia al punto $C(2, -1, 1)$ sea de tres unidades.

Puede ser uno de los dos puntos siguientes:
$P\,(0, 1, 2)$ o $Q\,(-2/3, 1/3, 4/3)$.

5. Halla el punto simétrico de (2, 0, 3) respecto de la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$

El punto buscado es (1, 5, 1).

6. Halla la proyección del punto $P(2, -1, 3)$ sobre la recta r: $\{x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t + 2\}$ y calcula la distancia de P a r.

La proyección es el punto $Q\,(3, -2, 4)$.
La distancia de P a r es: $d\,(P, r) = d\,(P, Q) = \sqrt{3}$

7. Un triángulo tiene vértices (0, 0, 0), (1, 1, 1) y el tercer vértice situado en la recta $x = 2y$, $z = 1$. Calcula las coordenadas del tercer vértice, sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2/2}$.

El tercer vértice puede estar en uno de los puntos siguientes:
P(2,13; 1,065; 1) o (–0,13; –0,065; 1)

8. Dadas las rectas r: $x + 2y = 10$; s: $x - my = 5$, encuentra los valores de m que hacen que:
a) Se corten en (0, 5).
b) Sean paralelas.
c) Sean ortogonales.

a) $m = -1$
b) $m = -2$
c) $m = 1/2$

9. Encuentra la ecuación de las rectas que pasan por el punto $P(3, 0)$ y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0$.

Las rectas buscadas son: $y = 2{,}08\,(x - 3)$ e $y = -0{,}48\,(x - 3)$.

10. El centro de una elipse es el origen de coordenadas, y uno de los focos es (–3, 0). Sabiendo que la recta de ecuación $x - y = 5$ es tangente a la elipse, halla la ecuación de ésta.

La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = 1$

11. Halla la ecuación, y representación gráfica, del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $P(2, 2)$ y del eje OX.

Es la parábola de ecuación $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$

12. Halla la ecuación y la representación gráfica del conjunto de puntos cuya distancia al punto $P(-1, 1)$ es la mitad de la distancia al punto $Q(-4, 4)$.

Es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 8$

13. Halla los puntos de intersección de la recta de ecuación $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{-4}$ con la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$.

Los puntos son $(4, -3, 1)$ y $(1, -2, 5)$.

14. Obtén la ecuación del plano tangente a la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$ en el punto $P(-1, 5, -1)$.

La ecuación del plano es $3x - 4y + 23 = 0$

BLOQUE TEMÁTICO 3

Análisis

En este bloque se tratan los conceptos matemáticos de función, límites y continuidad de funciones, derivación e integración; los cuales constituyen los pilares básicos del Análisis Matemático.

Estructura de Unidades

Unidad Didáctica 9: **Números reales. Funciones reales**

1. El conjunto de los números reales.
2. Orden en el conjunto de los números reales. Intervalos en la recta real.
3. Entornos de un punto.
4. Conjuntos acotados en la recta real.
5. Funciones reales de variable real. Dominio de una función.
6. Funciones simétricas y funciones periódicas.
7. Funciones acotadas. Extremos absolutos.
8. Monotonía.
9. Extremos relativos.
10. Composición de funciones. Propiedades.
11. Función inversa.

Unidad Didáctica 10: **Límites de funciones**

1. Límite de una función. Funciones convergentes.
2. Límites laterales.
3. Propiedades de las funciones convergentes.
4. Límites infinitos cuando x tiende a un número real.
5. Límites finitos en el infinito.
6. Límites infinitos en el infinito.
7. Ramas infinitas y asíntotas de una función.
8. Operaciones con límites de funciones.
9. Cálculo de límites sencillos.
10. Límites de funciones polinómicas y resolución de indeterminaciones.

Unidad Didáctica 11: **Continuidad de las funciones**

1. Funciones continuas.
2. Continuidad lateral.
3. Discontinuidad de una función. Tipos.
4. Continuidad de las funciones elementales. Operaciones con funciones continuas.
5. Propiedades de las funciones continuas.

Unidad Didáctica 12: **Derivadas**

1. Tasa de variación media e instantánea.
2. Derivada de una función en un punto.
3. Interpretación geométrica de la derivada.
4. Derivadas laterales.
5. Función derivada.
6. Derivadas sucesivas.
7. Operaciones con funciones derivadas.
8. Derivadas de las funciones elementales.
9. Diferencial de una función.

Unidad Didáctica 13: **Aplicaciones de las derivadas**

1. Continuidad de las funciones derivables.
2. Crecimiento y decrecimiento de una función.
3. Extremos relativos.
4. Determinación de extremos relativos.
5. Optimización de funciones.
6. Concavidad.
7. Puntos de inflexión.
8. Aplicaciones de las derivadas al cálculo de límites.

Unidad Didáctica 14: **Representación gráfica de funciones**

1. Dominio y recorrido de una función.
2. Puntos de corte con los ejes. Simetrías. Periodicidad.
3. Asíntotas y ramas infinitas.
4. Monotonía. Extremos relativos. Concavidad. Puntos de inflexión.
5. Intervalos de signo constante. Regiones.
6. Representación gráfica de funciones.

Unidad Didáctica 15: **Integrales indefinidas**

1. Primitiva de una función.
2. Integral indefinida. Propiedades.
3. Métodos de integración.

Unidad Didáctica 16: **Integrales definidas. Aplicaciones**

1. Cálculo de áreas por el método exhaustivo.
2. Áreas de recintos planos.
3. Integral definida. Propiedades.
4. Teorema del valor medio.
5. Teorema fundamental del cálculo integral.
6. Regla de Barrow.
7. Área encerrada bajo una curva.
8. Área encerrada por dos curvas.

ORGANIZADORES DEL APRENDIZAJE

Para alcanzar una comprensión significativa del desarrollo de este Bloque Temático, es necesario que los alumnos construyan su aprendizaje fundamentando y revisando sus conocimientos sobre:

CONOCIMIENTOS RECURRENTES	**Ideas y bases conceptuales:** • Número real. • Acotación en R. • Función real de variable real. • Límite de una función. • Continuidad y discontinuidad. • Función derivada. • Diferencial de una función. • Optimización de una función. • Representación gráfica de funciones. • Primitiva de una función. • Integral indefinida. • Integral definida. • Regla de Barrow.	**Términos:** • Intervalos en R. • Dominio de una función. • Función monótona. • Función acotada. • Extremos absolutos y relativos. • Función continua. • Función inversa. • Asíntotas. • Tasa de variación media e instantánea. • Derivada de una función en un punto. • Derivadas sucesivas. • Concavidad y puntos de inflexión.
METODOLOGÍA	• Fomentar el razonamiento deductivo a través de conceptos, propiedades y teoremas. • Utilizar las familias de funciones en el cálculo de límites. • Trabajar la continuidad desde el punto de vista gráfico y analítico. • Utilizar representaciones gráficas de funciones para estudiar su continuidad y derivabilidad. • Usar la derivada en la resolución de problemas de optimización y en el cálculo de límites. • Representar gráficamente funciones haciendo uso de los conceptos asociados al límite y a la derivada. • Utilizar las tablas de cálculo de límites, derivación e integración. • Calcular áreas de recintos planos utilizando las integrales definidas.	
RECURSOS Y MEDIOS	• Utilización de la calculadora y del ordenador. • Utilización de textos de historia de las Matemáticas. • Utilización de transparencias con gráficas de funciones.	

CRITERIOS Y ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. Criterios

1. Utilizar el concepto y el cálculo de límites para el estudio de la continuidad de las funciones.

Este criterio supone:
- Saber calcular límites sencillos y resolver las indeterminaciones más usuales.
- Aplicar el concepto de límite al estudio de la continuidad de funciones dadas mediante su gráfica o su expresión analítica.

2. Utilizar el concepto de derivada, así como su cálculo, para encontrar, analizar e interpretar las características más destacadas de funciones expresadas en forma explícita.

Este criterio supone:
- Calcular derivadas de funciones sencillas.
- Utilizar la derivada en el cálculo de las rectas tangente y normal a una curva en un punto dado, así como en el estudio de las características más importantes de una función: monotonía, extremos relativos, concavidad y puntos de inflexión.

3. Aplicar el cálculo de límites y derivadas en la resolución de problemas de optimización y medida.

Este criterio supone:
- Matematizar el fenómeno que se pretende optimizar.
- Saber obtener e interpretar los valores o resultados que optimizan un fenómeno dado.

4. Aplicar métodos analíticos al estudio de funciones y a la interpretación de fenómenos naturales y tecnológicos.

Este criterio supone:
- Conocer las propiedades más características de funciones dadas en forma explícita.

• Obtener la gráfica de una función que describe un fenómeno natural o tecnológico, dada en forma explícita a partir del estudio de sus características más esenciales.

5. Calcular integrales indefinidas y definidas de funciones sencillas y aplicar el concepto de integral definida al cálculo de áreas de recintos planos.

Este criterio supone:
• Saber calcular integrales indefinidas utilizando los métodos de integración más sencillos.
• Aplicar la regla de Barrow en el cálculo de integrales definidas.
• Saber calcular áreas de recintos planos.

2. Actividades

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2-4} - (x+1)\right]$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+2x^2+x}{2x^2-x-3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{1+x}}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-4} - (x+1) \overset{\infty - \infty}{=}$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-4} - (x+1)\right]\left[\sqrt{x^2-4} + (x+1)\right]}{\sqrt{x^2-4} + (x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-4-(x+1)^2}{\sqrt{x^2-4}+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x-5}{\sqrt{x^2-4}+x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

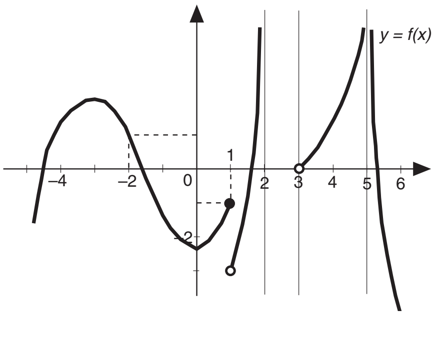
$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+2x^2+x}{2x^2-x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x\,(x+1)}{(2x-3)} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{1+x}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{1+x}\left(\frac{x+2}{x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2}{x^2+x}} = e^2$

2. Estudiar la discontinuidad de las siguientes funciones, clasificando los puntos de discontinuidad.
a) $y = f(x)$
b) $y = g(x) = |x+2| - |x-2|$

a)



$f(x)$ presenta:
— En $x = -2$ una discontinuidad evitable.
— En $x = 1$ una discontinuidad de salto finito.
— En $x = 2$ una discontinuidad esencial.
— En $x = 3$ una discontinuidad esencial.
— En $x = 5$ una discontinuidad de salto infinito.

b)

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 \text{ si } x \geq -2 \\ -x-2 \text{ si } x < -2 \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2 \text{ si } x \geq 2 \\ -x+2 \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

$$y = g(x) = \begin{cases} -2x \text{ si } x < -2 \\ 4 \text{ si } -2 \leq x < 2 \\ 2x \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = -2$ y en $x = 2$.

• $\lim\limits_{x \to -2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} 4 = 4 = g(-2)$

$\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (-2x) = 4 = g(-2)$

$g(x)$ es continua en $x = -2$.

• $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 2x = 4 = g(2) \\ \lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 4 = 4 = g(2) \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)$ es continua en $x = 2$

$g(x)$ es continua en todo su dominio.

3. Calcular las siguientes derivadas:

a) $D\left[\sqrt[3]{4 - 2^x}\right]$

b) $D\left[sen^2\,(3x-1)\right]$

c) $D\left[ln\left(\dfrac{1-2x}{2x}\right)\right]$

a) $D\left[\sqrt[3]{4-2^x}\right] = \dfrac{D\left[4-2^x\right]}{3\sqrt[3]{(4-2^x)^2}} = \dfrac{-2^x \cdot ln\,2}{3\sqrt[3]{(4-2^x)^2}}$

b) $D\,[sen^2\,(3x-1)] = D\,[sen\,(3x-1)]^2 =$
$= 2 \cdot [sen\,(3x-1)] \cdot [cos\,(3x-1)] \cdot 3 =$
$= 3 \cdot sen\,[2\,(3x-1)] = 3 \cdot sen\,(6x-2)$

c) $D\left[ln\left(\dfrac{1-2x}{2x}\right)\right] = D\left[ln\,(1-2x) - ln\,(2x)\right] =$

$$= \frac{-2}{1-2x} - \frac{2}{2x} = \frac{-2}{1-2x} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x\,(1-2x)}$$

4. Halla el punto o los puntos de la curva $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ en los cuales las rectas tangentes son paralelas a la bisectriz del primer cuadrante.

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$ de pendiente $m = 1$.
Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, por tanto la pendiente de las rectas tangentes debe ser 1.

$$y' = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \Rightarrow \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = 1 \Rightarrow \left(1-x^2\right)^2 = 1 + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = \sqrt{3};\ x = -\sqrt{3}$$

Los puntos de la curva en los cuales la recta tangente tiene de pendiente 1 son los puntos:

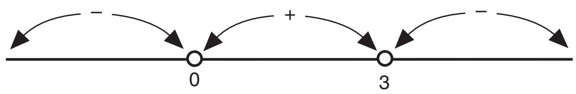
$P\ (0, 0)$; $Q\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{-2}\right)$ y $R\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. Dada la función $f(x) = 9x^2 - 2x^3 + 3$, estudia su monotonía, halla sus extremos relativos, estudia el tipo de concavidad y calcula, si existen, los puntos de inflexión.

Monotonía: Estudiamos el signo de $f'(x)$:

$f'(x) = 18x - 6x^2$

$18x - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 3$



f es estrictamente creciente en $(0, 3)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

Extremos relativos

$f'(x) = 18x - 6x^2 \Rightarrow 18x - 6x^2 = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 3$

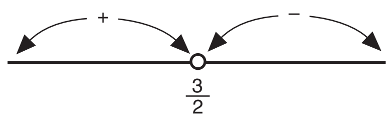
$f''(x) = 18 - 12x$

$f''(0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $(0, 3)$

$f''(3) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $(3, 30)$

Tipo de concavidad

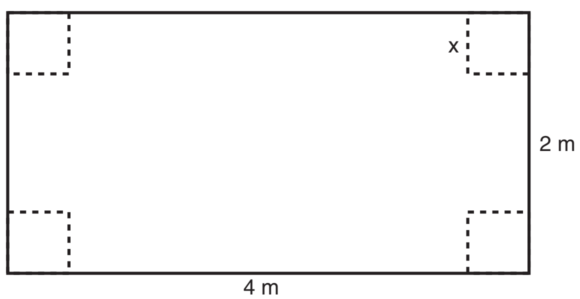
$f''(x) = 18 - 12x$



f es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Punto de inflexión: $\left(\frac{3}{2}, \frac{33}{2}\right)$

6. Con una lámina rectangular de dimensiones 4 y 2 m, respectivamente, se quiere construir una caja abierta de volumen máximo, para lo cual se recorta un cuadrado en las cuatro esquinas. Halla el lado de este cuadrado.



Llamemos «x» al lado del cuadrado.

La base de la caja es un rectángulo de dimensiones $(4 - 2x)$ y $(2 - 2x)$. La altura de la caja es igual al lado del cuadrado que hemos recordado en las esquinas.

Volumen $= (4 - 2x)\ (2 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

Optimizamos esta función:

$V'_{(x)} = 12x^2 - 24x + 8$; $12x^2 - 24x + 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} = 1{,}58$ m

$x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 0{,}42$ m

$V''_{(x)} = 24x - 24$

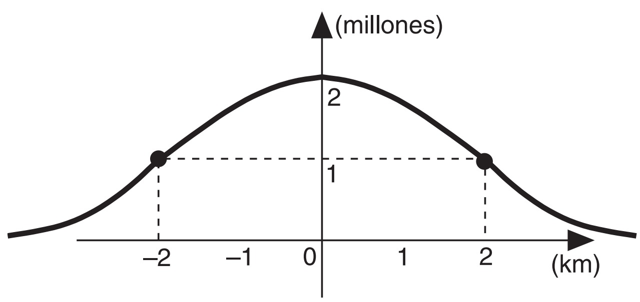
$V''(1{,}58) > 0 \Rightarrow$ Para $x = 1{,}58$ el volumen es mínimo.

$V''(0{,}42) < 0 \Rightarrow$ El volumen es máximo para $x = 0{,}42$ m.

7. En una determinada zona, el número de millones de seres vivos por km² de superficie viene dado por la función $\frac{8}{x^2+4}$, en la que x representa la altitud o profundidad en km. Representa gráficamente esta función analizando sus características más relevantes. ¿A qué altitud o profundidad la densidad de población de seres vivos es máxima? ¿A partir de qué altitud o bajo qué profundidad la densidad de la población es inferior a uno?

$f(x) = y = \frac{8}{x^2+4}$

- Dominio: $Dom\ f = R$
- Simetrías y periodicidad: Es una función simétrica respecto al eje de ordenadas y no es periódico.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 2)$.
- Asíntotas: $y = 0$.
- Extremos relativos: Máximo relativo en $(0, 2)$.
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{4}{3}, \frac{18}{13}\right)\left(-\frac{4}{3}, \frac{18}{13}\right)$
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



El número de seres es máximo en la superficie altitud 0 km. La densidad de población es superior a 1 en alturas o profundidades superiores a 2 km.

8. Obtén las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,dx$

c) $\displaystyle\int (2x-3)\;\mathit{senx}\;dx$

a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}\cdot 2}{1+\left(e^{2x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\;arc\;tg(e^{2x}) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,dx$

Resolvemos esta integral indefinida por el método de cambio de variable, haciendo $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{t^2-t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2}{t-1}\,dt = 2\,ln\,|t-1| =$$

$$= 2\,ln\,|\sqrt{x}-1| + C$$

c) $\displaystyle\int (2x-3)\;sen\;x\cdot dx$

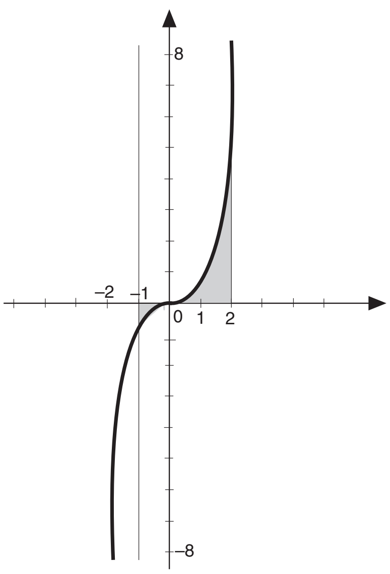
Resolvemos esta integral indefinida por el médoto de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = 2x-3 \Rightarrow du = 2\cdot dx \\ dv = sen\,x\cdot dx \Rightarrow v = -cos\,x \end{array}\right\}$$

$$\int (2x-3)\;sen\;x\cdot dx = -\,(2x-3)\;cos\,x - \int -2\;cos\;x\;dx =$$

$$= -\,(2x-3)\;cos\;x + 2\;sen\;x + C$$

9. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 2$.

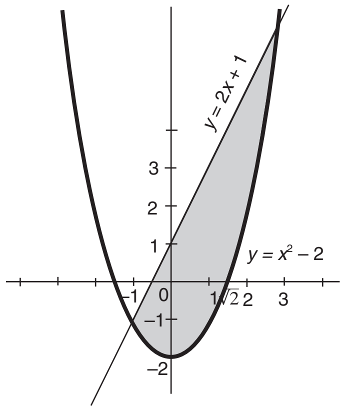


Queremos hallar el área de la zona rayada, y ésta vale:

$$\text{Área} = \int_0^{-1} x^3\,dx + \int_0^{2} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{-1} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{17}{4} = 4{,}25\,u^2$$

10. Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2$ y $g(x) = 2x + 1$.



Estas dos curvas se cortan en los puntos solución del sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2-2 \\ y = 2x+1 \end{array}\right\}\; x^2 - 2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Queremos hallar el área de la zona rayada:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{3} \left[(2x+1)-(x^2-2)\right]dx = \int_{-1}^{3} (-x^2+2x+3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = (-9+9+9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) =$$

$$= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}\,u^2 = 10{,}7\,u^2$$

5-DESARROLLO DE UNIDADES DIDÁCTICAS

UNIDAD DIDÁCTICA 1

Matrices

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Interpretar un cuadro o tabla de números como una matriz, identificando elementos concretos de la misma.
2. Identificar y formular los tipos de matrices más usuales.
3. Operar correctamente con matrices.
4. Calcular la matriz inversa por procedimientos elementales.
5. Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Deben buscarse entre las experiencias del alumno sus "formas propias" de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
Puede orientarse su desarrollo, poniendo el énfasis en una metodología heurística, haciendo primar los procedimientos y técnicas.
Buscaremos reforzar el razonamiento inductivo a través de la experimentación de situaciones concretas. No debe olvidarse fomentar el razonamiento deductivo mediante la aplicación de conceptos y propiedades, así como de las relaciones entre estas últimas.
Llamar la atención sobre la utilización de las matrices en el ámbito de resolución de problemas, en la puesta en práctica de la estrategia "elección de un lenguaje adecuado".

Actividades iniciales

1. Expresa en notación matricial y resuelve por el método de Gauss los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$a)\ \begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - 3y + 4z = 9 \\ 3x + 5y - z = 17 \\ -2x + 6y + z = 18 \end{cases}$$

Las resolución de los sistemas puede expresarse de la forma siguiente:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - 2F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 28 \\ 0 & 13 & 78 \end{pmatrix}$$

La segunda matriz proporciona la solución $x = 5$, $y = 6$.

$$b)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 3 & 5 & -1 & 17 \\ -2 & 6 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 9 \\ 0 & -14 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

La última matriz proporciona la solución:
$x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

2. Si se cumple que $PQ = P$ y $QP = Q$, probar que $P^2 = P$.

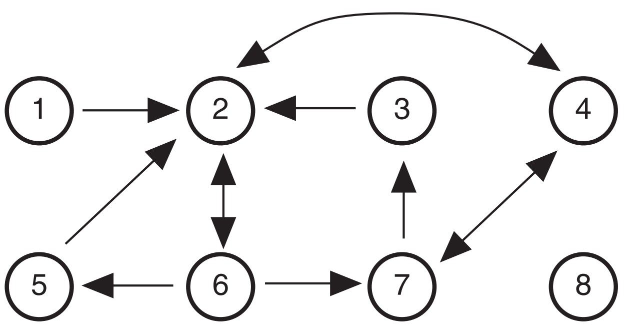
Veamos que $P^2 = P$. Para ello,

$$P^2 \underset{(1)}{=} P \cdot P \underset{(2)}{=} PQ \cdot P \underset{(3)}{=} P \cdot QP \underset{(4)}{=} PQ \underset{(5)}{=} P$$

Las igualdades anteriores son debidas a:

(1) la definición de la potencia cuadrado;
(2) la hipótesis $PQ = P$;
(3) la propiedad asociativa del producto;
(4) la hipótesis $QP = Q$;
(5) la hipótesis $PQ = P$.

3. El grafo adjunto muestra las relaciones que se establecen en un grupo de ocho personas. Construye una tabla que indique las relaciones anteriores, indicando con 1 la existencia de relación entre dos personas y con 0 la no existencia de relación.



La matriz que indica las relaciones existentes en el grafo es:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula *a, b, c* y *d* para que se cumpla

$$2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & a+b \\ c+d & 4 \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones indicadas y aplicando la igualdad de matrices, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & a+b+7 \\ c+d-2 & 3d+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a = a + 5 \\ 2b = a + b + 7 \\ 2c = c + d - 2 \\ 2d = 3d + 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, $a = 5$, $b = 12$, $c = -6$, $d = -4$

2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix};$$

calcula:
***a)* $A + B$** **b) $A - B - C$**
c) $3A + 5B - 6C$ **d) $AB - BC$**
e) $2AB + 3AC - 5BC$

$$a)\ A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A - B - C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c)\ 3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$$

d) $AB - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

e) $2AB + 3AC - 5BC =$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} -$

$- 5\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -18 & 27 \end{pmatrix} -$

$- \begin{pmatrix} -20 & 40 \\ 25 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -39 \\ -49 & 55 \end{pmatrix}$

3 **Para las matrices** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$**, calcula** $\mathbf{AB}$ **y** $\mathbf{BA}$**.**

$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$

4 **Calcula los productos posibles entre las matrices** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**,** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Los productos posibles son:

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$

$CB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

5 **Si** $\mathbf{A}$ **y** $\mathbf{B}$ **son dos matrices cuadradas de orden** $\mathbf{n}$**, ¿son ciertas, en general, las igualdades siguientes?**
a) $\mathbf{(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$
b) $\mathbf{(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$
c) $\mathbf{(A + B)(A - B) = A^2 - B^2}$**?**

En general, las igualdades anteriores no son ciertas, ya que el producto de matrices no es conmutativo.

a) $(A + B)^2 = (A + B)\,(A + B) = AA + AB + BA + BB =$
$= A^2 + AB + BAA + B^2$

b) $(A - B)^2 = (A - B)\,(A - B) = AA - AB - BA + BB =$
$= A^2 - AB - BA + B^2$

c) $(A + B)\,(A - B) = AA - AB + BA - BB =$
$= A^2 - AB + BA - B^2$

6 **Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten, respectivamente, con las matrices:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \textbf{ y } \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Operando en la igualdad $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

obtenemos el sistema $\begin{cases} a = a + c \\ a + b = b + d \\ c = c \\ c + d = d \end{cases}$

La solución del sistema es $c = 0$, $a = d$ y b cualquiera.

Por tanto, las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ van de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con a y b números reales cualesquiera.

Procediendo de manera análoga para

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ c = 0 \\ e + f = a \\ f = e \\ 0 = f \\ h + i = a + d \\ i = b + d \\ 0 = c + f \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = h$, $e = 0$, $f = 0$, g cualquiera, $i = 0$.

Las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & d & 0 \end{pmatrix}$ con d y g números cualesquiera.

7 **Para las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones:

a) $A + B$	***d)*** AD	***g)*** $A^t C$	***j)*** $D^t D$
b) $3A - 4B$	***e)*** BC	***h)*** $D^t A^t$	***k)*** DD^t
c) AB	***f)*** CD	***i)*** $B^t A$	

a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $3A - 4B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 12 & 0 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 \\ -4 & -8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -10 \\ 16 & 8 & -21 \end{pmatrix}$

c) AB no puede realizarse ya que ambas son matrices de dimensión $2 \cdot 3$.

d) $AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $BC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 3 & 12 & -18 \\ 11 & -5 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

f) CD no puede realizarse.

g) A^tC no puede efectuarse.

h) $D^tA^t = (2\ 1\ 3) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (7\ -1)$

i) $B^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ -5 & -3 & 12 \\ 16 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

j) $D^tD = (2\ 1\ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 14$

k) $DD^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (2\ 1\ 3) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

8 **Descompón en suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica las matrices siguientes:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Toda matriz cuadrada A puede expresarse en la forma

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

En la suma anterior, el sumando $\frac{A + A^t}{2}$ es una matriz simétrica y el sumando $\frac{A - A^t}{2}$ es una matriz antisimétrica.

Las descomposiciones pedidas son:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 7/2 \\ 3/2 & 7/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \\ 1/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 9/2 \\ 1/2 & 0 & 5 & 9/2 \\ 0 & 5 & 7 & 9/2 \\ 9/2 & 9/2 & 9/2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 3 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & 5/2 \\ -3 & -1 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

9 **Para la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcular** A^{50} **y** A^{97}**. Encuentra los valores de** a **y** b **para que la matriz** A **conmute con la matriz** $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$**.**

Calculamos las potencias sucesivas de A.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -I$

$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$

$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I$

$A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A$

$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = -I$

etcétera.

Observamos que las potencias de la matriz A se repiten de cuatro en cuatro. Así:¶

$A^{50} = A^{4 \cdot 12 + 2} = (A^4)^{12} \cdot A^2 = I^{12} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = -I$

$A^{97} = A^{4 \cdot 24 + 1} = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = I \cdot A = A$

Para calcular los valores a y b operamos las matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando las matrices, se obtiene $a = 1$, $b = 0$.

10 **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

Obtén si procede $(BA)^{-1}$.

Calculamos BA,

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz BA, por el método de Gauss-Jordan, es:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/10 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/15 & 1/15 \\ 0 & 1 & -1/10 & 1/10 \end{array}\right)$$

La matriz $(BA)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} 4/15 & 1/15 \\ -1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$

11 **Obtener las matrices X e Y que verifiquen los sistemas matriciales siguientes:**

a) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X - 3Y = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$ ***d)*** $\begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$

Llamamos A y B a las matrices numéricas que aparecen en cada uno de los sistemas. Resolvemos éstos por el método de reducción y obtenemos:

a) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - 3Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ 7Y = A - 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{3}{7}A + \frac{1}{7}B \\ Y = \frac{1}{7}A - \frac{2}{7}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 & 4/7 \\ -1 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 9/7 & 8/7 & 6/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \\ Y = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} 2X + Y = A \\ X + 2Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = A \\ Y = -\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}B \\ Y = -\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} 3X + Y = A \\ X + Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X + Y = A \\ X = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B \\ Y = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = B \\ Y = -A + 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -A + 3B \\ X = -A + 2B \end{cases}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

12 **Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{d)}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e)}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{f)}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Si $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\operatorname{sen} n\alpha \\ \operatorname{sen} n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$

d) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$

f) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

La matriz (AB) es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz traspuesta de la anterior $(AB)^t$ es $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de la anterior $(AB)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 3/14 & -1/2 \end{pmatrix}$

14 Calcula la matriz $B^{-1}A^2B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz B^{-1} es $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

La matriz A^2 es $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2$ es $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 45 \\ 27 & -36 \end{pmatrix}$

La matriz $B^{-1}A^2B$ es $\begin{pmatrix} -36 & 45 \\ 27 & -36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

15 Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices escalonadas equivalentes a las matrices siguientes:

$\boldsymbol{a)}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b)}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{c)}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{d)}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_1 + F_3 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3}$

$\xrightarrow{F_2 - 2F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[4F_1 - F_3 \to F_3]{3F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3}$

$\xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 + F_3 \to F_3 \\ 3F_1 + F_4 \to F_4}]{2F_1 - F_2 \to F_2}$

$\xrightarrow[\substack{F_1 + F_3 \to F_3 \\ 3F_1 + F_4 \to F_4}]{2F_1 - F_2 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_4 - F_2 \to F_4]{F_2 - F_3 \to F_3}$

$\xrightarrow[2F_4 - F_2 \to F_4]{F_2 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{9F_3 - 5F_4 \to F_4}$

$\xrightarrow{9F_3 - 5F_4 \to F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{pmatrix}$

16 Utiliza el método de Gauss para averiguar si los sistemas siguientes tienen solución o no. En caso afirmativo, encuéntrala.

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + 3y + z = -1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x + y - 7z = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ 7x + 5y - z = 12 \\ 3x - y + z = 21 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 2x - y + 5z = 7 \\ x + 10y - 8z = 9 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + 3y + z = -1 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 7y + z = 1 \\ 7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 7y + z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

El sistema tiene solución única: $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

b) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y + 5z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \\ 4y - 4z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \\ z = 0 \end{cases}$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ x - y + 4z = 1 \\ 2x + y - 7z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ 3y - 15z = 0 \\ -3y + 15z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + z = 4 \\ 3y - 15z = 0 \\ 0z = 2 \end{cases}$

E l sistema no tiene solución.

d) $\begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ 7x + 5y - z = 12 \\ 3x - y + z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ -27y + 39z = -223 \\ y + 11z = -159 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 5z = -25 \\ -27y + 39z = -223 \\ 336z = -4516 \end{cases}$

El sistema tiene solución única: $x = 17{,}47$, $y = 27{,}67$, $z = -13{,}44$.

e) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y + 2z = 10 \\ 2y + 2z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \\ 0z = 0 \end{cases}$

El sistema tiene infinitas soluciones: $x = 1$, $y = 5 - t$, $z = t$.

f) $\begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 2x - y + 5z = 7 \\ x + 10y - 8z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 7y - 7z = -17 \\ -7y + 7z = -14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 7y - 7z = -17 \\ 0z = -3 \end{cases}$

El sistema no tiene soluciones.

17 Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***e)*** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***f)*** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

a) $\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \vdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & 4 & \vdots & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \vdots & 3 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \vdots & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$ No existe matriz inversa.

d) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{array}\right)$$

La matriz inversa de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

$\boxed{18}$ **Determina el valor de *a* para que la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no tenga inversa. Calcula A^{-1} para los restantes valores de *a*.

Utilizando el método de Gauss, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2a & -3a-1 & a & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7a+1 & -a & 2a & 1 \end{array}\right)$$

Cuando la expresión $7a + 1$ vale cero, es decir, $a = -1/7$, la matriz A no tiene inversa. Para los restantes valores de a, existe A^{-1} y su expresión es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{7a+1} & \dfrac{-2}{7a+1} & \dfrac{7}{7a+1} \\ \dfrac{2a}{7a+1} & \dfrac{3a+1}{7a+1} & \dfrac{-2}{7a+1} \\ \dfrac{-a}{7a+1} & \dfrac{2a}{7a+1} & \dfrac{1}{7a+1} \end{pmatrix}$$

$\boxed{19}$ **Calcula el rango de las siguientes matrices:**

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$

Realizamos operaciones elementales en las filas de las matrices, obteniendo matrices equivalentes.

a) Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

b) Rango de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$

d) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 10 & 11 & 13 \end{pmatrix} =$

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 5 & 15 & 23 & 18 \end{pmatrix} =$

$$= \text{Rango de} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 11 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

20 Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro A:

$$a) \begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) Rango de $\begin{pmatrix} a-1 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a-1 & a+2 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Si $a = 0$ el rango es 1 y si $a \neq 0$ el rango es 2.

b) Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & a+4 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}$

Si $a = -4$, el rango es 2 y si $a \neq -4$, el rango es 3.

c) Rango de $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ = Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 2a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a^2-1 & a-1 \end{pmatrix}$ =

= Rango de $\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$

- Si $a = 1$, el rango es 1.
- Si $a = -2$, el rango es 2.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, el rango es 3.

21 ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir AB y BA?

Sí es posible en el caso que las dimensiones sean $m \cdot n$ para A y $n \cdot m$ para B.
En esta situación, el producto AB es una matriz de dimensión $m \cdot m$ y el producto BA es una matriz de dimensión $n \cdot n$.

22 Si A una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = A$, e I es la matriz unidad de orden n, ¿qué matriz es B^2, si $B = 2A - I$?

Se tiene que:
$B^2 = B \cdot B - (2A - I) \cdot (2A - I) - 4A \cdot A - 2A \cdot I - 2A \cdot \mathrm{I} + I^2 =$
$= 4A^2 - 2A - 2A + I - 4A - 4A + I = I$

Por tanto la matriz B^2 es la matriz unidad. Las matrices como B se denominan idempotentes.

23 Encuentra todas las matrices de orden 2 que cumplan:
***a)* $A^2 = A$ *b)* $A^2 = 0$**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

La matriz $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

a) Al ser $A^2 = A$, debe cumplirse:

$$\begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d) = b \\ c(a+d) = c \\ bc + d^2 = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ b(a+d-1) = 0 \\ c(a+d-1) = 0 \\ bc + d^2 = d \end{cases}$$

Pueden ocurrir los siguientes casos:

1. $b = 0$, entonces $a^2 = a$, $d^2 = d$ y $c = 0$ o $a + d = 1$.
En estas condiciones las soluciones son las matrices

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ con c cualquiera.

2. $c = 0$, entonces $a^2 = a$, $d^2 = d$ y $b = 0$ o $a + d = 1$.
En estas condiciones, las soluciones son las matrices

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con b cualquiera.

3. $a + d = 1$, entonces $a = 1 - d$ y $b = \dfrac{d-d^2}{c}$

Las soluciones son las matrices $\begin{pmatrix} 1-d & \dfrac{d-d^2}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$ con c y d cualesquiera.

b) La condición $A^2 = 0$ se convierte en el sistema

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$$

Pueden ocurrir los siguientes casos:
1. $b = 0$, entonces $a = 0$, $d = 0$ y c cualquiera.

Esto proporciona las soluciones $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ con $c \in R$.

2. $c = 0$, entonces $a = 0$, $d - 0$ y b cualquiera.

Las soluciones son $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $b \in R$.

3. $a + d = 0$, entonces $a = -d$ y $b = -d^2/c$.

Las soluciones son $\begin{pmatrix} -d & -d^2/c \\ c & d \end{pmatrix}$ con c y d cualesquiera, $c \neq 0$.

24 Encuentra todas las matrices de orden 3 que conmutan con $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ que debe cumplir:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices y utilizando la definición de igualdad de matrices, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} a + 2c = a & d + 2f = d & g + 2i = 2a + d + 3g \\ b + \quad c = b & e + \quad f = e & h + \quad i = 2b + e + 3h \\ \quad c = 3c & 3f = f & 3i = 2c + f + 3i \end{cases}$$

Las soluciones nos dan las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 2i - 2a - 2g & i - 2b - 2h & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

siendo *a, b, g, h, i* números reales cualesquiera.

25 ***a)*** **Escribe tres matrices de dimensión 3 · 4, que tengan, respectivamente rango, 2, 1 y 4. Razona la respuesta.**

b) **Si cada una de las matrices escritas es la matriz asociada a un sistema de ecuaciones. ¿Qué se puede afirmar sobre el tipo de sistema del que se trata y de sus soluciones?**

a) Las matrices de dimensión 3 · 4,

- con rango 2 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

- con rango 1 es, por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

- con rango 4 no es posible construirla.

b) En el primer caso y en el segundo se trataría de sistemas compatibles indeterminados.

26 Resuelve la ecuación matricial $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \mathbf{-10} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

Llamando a la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -10 \\ 4x - y + 2z = 11 \\ x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

cuya solución es $X = \begin{pmatrix} 58/39 \\ -163/39 \\ 17/39 \end{pmatrix}$

27 Averigua para qué valores del parámetro t la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{t} \end{pmatrix}$$

no tiene inversa. Calcula la matriz inversa de A para $t = 1$, si es posible.

Utilizando el método de Gauss-Jordan para la obtención de A^{-1} se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{t^2 - 12}{(t-2)(t+6)} & \frac{12}{(t-2)(t+6)} & \frac{-4t}{(t-2)(t+6)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4t}{(t-2)(t+6)} & \frac{t+4}{(t-2)(t+6)} & \frac{-4t}{(t-2)(t+6)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{t}{(t-2)(t+6)} & \frac{-3}{(t-2)(t+6)} & \frac{t}{(t-2)(t+6)} \end{array}\right)$$

En los casos $t = 2$ y $t = -6$ no existe matriz inversa. Para cualquier otro valor de la variable t, existe matriz inversa.

Para $t = 1$, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/7 & -12/7 & 4/7 \\ 4/7 & -5/7 & -4/7 \\ -1/7 & 3/7 & -1/7 \end{pmatrix}$

28 Responde a las siguientes cuestiones:

a) **Dada una matriz A, ¿existe otra matriz B tal, que el producto AB sea una matriz de una sola fila?**

b) **Prueba que si A verifica la relación $A^2 - A - I = 0$, entonces existe A^{-1}. Hállala.**

c) **Estudia las potencias sucesivas de una matriz antisimétrica viendo de qué tipo son.**

a) En el caso de que la matriz A tenga dimensión $m \cdot n$, con $m \neq 1$, es imposible encontrar la matriz B cumpliendo las condiciones pedidas.
En el caso de que la matriz A tenga dimensión $1 \cdot n$, la matriz B tendrá dimensión $n \cdot m$ y la matriz resultante será la matriz fila $1 \cdot m$.

b) La matriz inversa de A es la matriz B que cumple $A \cdot B = I$.
La relación $A^2 - A - I = 0$ puede ser expresada en la forma: $A^2 - I = I$ o $A\ (A - I) = I$. Por tanto, la matriz inversa de A es $A - I$.

c) Una matriz A es antisimétrica si $A^t = -A$.
Veamos como son las potencias sucesivas:
$(A^2)^t = (A \cdot A)^t = A^t \cdot A^t = (-A) \cdot (-A) = A^2$, luego v^2 es simétrica.
$(A^3)^t = (A^2 \cdot A)^t = A^t \cdot (A^2)^t = (-A) \cdot A^2 = -A^3$, luego A^3 es antisimétrica.
Por tanto, las potencias pares son matrices simétricas y las potencias impares son antisimétricas.

29 **Si dos matrices de orden *n* *A* y *B* cumplen $AB - BA = I$, demuestra, utilizando el método de inducción, que para cualquier número natural *m*, mayor o igual que 1, se verifica $A^mB - BA^m = mA^{m-1}$,**

Para $m = 1$, la expresión $A^mB - BA^m = mA^{m-1}$ se transforma en $A^1B - BA^1 = 1 \cdot A^{1-1} \Rightarrow AB - BA = I$, que es verdadera.

Supongamos que la expresión $A^mB - BA^m = mA^{m-1}$ es cierta para $m = h$, es decir, $A^hB - BA^h = hA^{h-1}$, y veamos que se cumple para $m = h + 1$.

$$\begin{aligned} A^{h+1}B - BA^{h+1} &= A\,(A^hB) - BA^{h+1} \underset{(*)}{=} A\,(BA^h + hA^{h-1}) - BA^{h+1} = \\ &= (AB)\,A^h + hA^h - BA^{+1} \underset{(*)}{=} \\ &\underset{(**)}{=} (BA+I)\,A^h + hA^h - BA^{h+1} = \\ &= BA^{h+1} + A^h + hA^h - BA^{h+1} = \\ &= A^h + hA^h = (h+1)\,A^h \end{aligned}$$

Veamos que se cumple lo buscado; hemos hecho uso de las igualdades $A^hB = BA^h + BA^h + hA^{h-1}$ en $^{(*)}$
y $AB = BA + I$ en $^{(**)}$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

30 **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix},$$

averigua para qué valores del parámetro *m* existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m = 2$.

Utilizanzo el método de Gauss-Jordan y partiendo de la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -m & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{m^2+3}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{1}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{-m}{(m-1)(m-3)} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{-12}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{m-4}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{3}{(m-1)(m-3)} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{4m}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{1}{(m-1)(m-3)} & \dfrac{-m}{(m-1)(m-3)} \end{array}\right)$$

La matriz A^{-1} existe para cualquier valor de m distinto de 1 ó 3.
En el caso de $m = 2$, la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ es } \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

31 **Halla las matrices simétricas de orden dos tales que $A^2 = A$.**

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, debe cumplirse:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b\,(a+d) \\ b\,(a+d) & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = a \\ b\,(a+d) = b \\ b^2 + d^2 = d \end{cases}$$

Los casos posibles son:

i) $b = 0$, entonces $a = 0$ o $a = 1$, y $d = 0$ o $d = 1$.
Las matrices solución son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) $a = 1 - d$, entonces $b = \pm\sqrt{d - d^2}$ con $d \in [0,1]$.
Las soluciones son las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1-d & \pm\sqrt{d-d^2} \\ \pm\sqrt{d-d^2} & \text{d} \end{pmatrix} \text{ con } d \in [0, 1].$$

32 **Dadas las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determina, si es posible, un valor de *k* para que la matriz $(A - kI)^2$ sea la matriz nula.

La matriz $A - kI$ es $A - kI = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$

La matriz $(A - kI)^2$ es

$$(A - kI)\ (A - kI) = \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k & -1 & -2 \\ -1 & -k & -2 \\ 1 & 1 & 3k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 - 1 & 2k - 2 & 4k - 4 \\ 2k - 2 & k^2 - 1 & 4k - 4 \\ -2k + 2 & -2k + 2 & 5 - 6k + k^2 \end{pmatrix}$$

El valor que hace que la última matriz sea la matriz nula es $k = 1$.

33 **Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando en la ecuación matricial, obtenemos:
$2BA + B = AXA + B \Leftrightarrow AXA = 2BA \Leftrightarrow AX = 2B \Leftrightarrow X =$
$= 2A^{-1}B$

Por tanto, la solución es la matriz $X = 2A^{-1}B$.

Al ser $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz buscada es

$$X = 2\,A^{-1}\,B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 0 & 14 & -22 \end{pmatrix}$$

34 **Obtén la matriz inversa de $A + A^t$, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matriz $A + A^t$ es

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz $(A + A^t)^{-1}$ es $\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

35 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, construye la matriz**

$Y = 3A^tA - 2I$, y resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz $Y = 3A^tA - 2I$ es

$$Y = 3\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 & 39 \\ 39 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 100 & 39 \\ 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Para resolver la ecuación $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, llamamos a $X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, operamos y resolvemos el sistema correspondiente.

El sistema es $\begin{cases} 3a_{11} + a_{21} = 2 \\ 5a_{11} + 2a_{21} = 0 \\ 3a_{12} + a_{22} = 0 \\ 5a_{12} + 2a_{22} = 1 \end{cases}$

Las soluciones son: $a_{11} = 4$, $a_{21} = -10$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = 3$

La matriz X es $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$.

36 **Prueba que $A^2 - A - 2I = 0$, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula A^{-1} utilizando la igualdad anterior o de cualquier otra forma.

Calculamos $A^2 - A - 2I$, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la expresión $A^2 - A - 2I = 0$, operando se obtiene:

$$A^2 - A - 2I = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A - I = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A = I \Leftrightarrow A\left(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I\right) = I$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$.

Por tanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

37 Sean las matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si M es una matriz de la forma $M = aI + bJ$, siendo a y b números reales, se pide: *a)* Calcular M^2 y M^3. *b)* Calcula M^n, siendo n un número natural.

La matriz $M = aI + bJ$ adopta la expresión $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) Las potencias cuadrada y cúbica de M son:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

b) Para encontrar la expresión de M^n con n natural, calculamos nuevas potencias.

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^5 & 5a^4b \\ 0 & a^5 \end{pmatrix}$$

Por tanto, M^4 con n natural tiene la expresión siguiente:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

La demostración de esta última proposición puede efectuarse por el método de inducción.

38 La matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

es distinta de la matriz nula. ¿Es inversible? En caso afirmativo, halla M^{-1}.

Calculamos la posible matriz inversa por el método de Gauss-Jordan, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & b & a \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{a^2}{a^2+b^2} & -\frac{ab}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ 0 & 1 & \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{array}\right)$$

La matriz M siempre es inversible, ya que el ser $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $a^2 + b^2 \neq 0$.
La matriz inversa de M es

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

39 Aplicando el método de Gauss, discute y resuelve los sistemas.

a) $\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x + y + kz = k^2 \\ x + ky + z = k \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + 2u = 1 \\ 3x + 2y + z + u = 7 \\ 3y + 4z + 7u = -4 \end{cases}$

a) Intercambiando las ecuaciones y triangulando el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + 3y - z = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -y + 2z = 2 \\ (2a-1)y + (a+1)z = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -y + 2z = 2 \\ (5a-1)z = 6a - 3 \end{cases}$$

- Si $a = 1/5$, el sistema no tiene solución.
- Si $a \neq 1/5$, el sistema tiene la siguiente solución única:

$$x = \frac{9}{5a-1}, \; y = \frac{2a-4}{5a-1}, \; z = \frac{6a-3}{5a-1}$$

b) Triangulando el sistema, se obtiene:

$$\begin{cases} x + y + kz = k^2 \\ (1-k)y + (k-1)z = k^2 - k \\ (k-1)y + (k^2-1)2 = k^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + kz = k^2 \\ (1-k)y + (k-1)z = k^2 - k \\ (k^2 + k - 2)z = k^3 + k^2 - k - 1 \end{cases}$$

- Si $k = -2$, el sistema no tiene solución.
- Si $k = 1$, el sistema tiene infinitas soluciones:
  $x = 1 - t - s$, $y = t$, $z = s$ con t y s números reales.
- Si $k \neq 2$ y $k \neq 1$, el sistema tiene una única solución:

$$x = \frac{1-k}{k+2}, \; y = \frac{1}{k+2}, \; z = \frac{(k+1)^2}{k+2}$$

c) Triangulando el sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - y + 2u = 1 \\ 3x + 2y + z + u = 7 \\ 3y + 4z + 7u = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 6z - 2u = 7 \\ 4y + 8z - u = 5 \\ 3y + 4z + 7u = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 6z - 2u = 7 \\ 16z + 3u = 3 \\ 2z + 41u = -41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5y + 6z - 2u = 7 \\ 16z + 3u = 3 \\ 325u = -331 \end{cases}$$

La solución única es:

$x = 1{,}675$; $y = 0{,}314$; $z = 0{,}566$; $u = -1{,}018$.

40 Resuelve la ecuación $AX - B + C = 0$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando en la ecuación, se tiene:

$AX - B + C = 0 \Leftrightarrow AX = B - C \Leftrightarrow X = A^{-1}(B - C)$

Por tanto,

$$X = A^{-1}(B - C) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

La solución es la matriz $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ -11 & -1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$

41 Resuelve la ecuación matricial en *X*: $XA - 2B + 3C = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Operando en la ecuación, se tiene:

$$XA - 2B + 3C = D \Leftrightarrow XA = D + 2B - 3C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X = (2B - 3C + D)\,A^{-1}$$

Por tanto,

$$X = (2B - 3C + D)\,A^{-1} =$$

$$= \left[2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & -37/5 \\ 7/5 & 49/5 \end{pmatrix}$$

La solución es la matriz $X = \begin{pmatrix} 4/5 & -37/5 \\ 7/5 & 49/5 \end{pmatrix}$

Resolución de problemas

1. LAS EDADES DE LA FAMILIA. Una madre de familia, que ronda la cuarentena, observa que si escribe tres veces seguidas su edad obtiene un número que es igual al producto de su edad multiplicada por la de su marido y las edades de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene cada uno de los miembros de la familia?

Supongamos que la edad de la madre es de 39 años; imponiendo las condiciones del problema, obtenemos:

$$393939 = 39 \cdot P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 \Rightarrow P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 10101$$
$$P \cdot H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdot H_4 = 37 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1$$

Luego si la madre tiene 39 años, el padre tiene 37 y los cuatro hijos tienen, respectivamente, 13, 7, 3 y 1 años.
Observamos que si partimos de que la madre tiene 38 años obtenemos la misma respuesta, e igual para 37, 36, 35 años. Es decir, independientemente de la edad de la madre, nos salen las edades del padre, 37 años, y las edades de los hijos: 13, 7, 3 y 1 años.

2. DOS NÚMEROS. Encuentra dos números tales, que su suma, su producto y su cociente sean iguales.

Llamamos *x, y* a los números. Se debe cumplir que:

$$x + y = x \cdot y = \frac{x}{y}$$

$$\left.\begin{aligned} x + y &= x \cdot y \\ x \cdot y &= \frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow y = \frac{x}{x-1} \\ &\Rightarrow xy^2 = x \Rightarrow y = \pm 1 \end{aligned}$$

Luego para $y = +1 \Rightarrow \dfrac{x}{x-1} = +1 \Rightarrow$ no existe solución.

Para $y = -1 \Rightarrow -1 = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

La solución válida es: $\boxed{x = \frac{1}{2};\ y = -1}$

UNIDAD DIDÁCTICA 2

Determinantes

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Interpretar un determinante como un número asociado a una matriz cuadrada.
2. Desarrollar un determinante utilizando distintos métodos: regla de Sarrus, método de Gauss, método de los adjuntos.
3. Resolver determinantes mediante las propiedades de los mismos.
4. Calcular la matriz inversa de una dada mediante el uso de determinantes.
5. Hallar el rango de una matriz usando determinantes.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Deben sacarse a flote las numerosas experiencias numéricas por las que ya ha pasado el alumno.
Puede desarrollarse a través de la búsqueda de matrices y determinantes en los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuyo estudio y resolución ya conoce el alumno de cursos anteriores.
Sería interesante que el valor de un mismo determinante fuese calculado por los diferentes procedimiento.
Pueden proponerse a alumnos/as aventajados determinantes cuyos elementos sean polinomios o otras expresiones que sirvan para consolidar situaciones análogas estudiadas en Matemáticas I.

Actividades iniciales

1. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son:

$$a)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Haciendo ceros escalonamos las matrices, obteniendo:

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, luego el rango es 2.

$$b)\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2

$$c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 - F_4 \to F_4]{F_1 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 3.

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 50 & 6 \end{pmatrix}$$

El rango es 4.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad e)\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la definición, se obtienen los siguientes resultados:

a) –2
b) 22
c) $a^2 + 25$
d) 23
e) $a^2 - b^2$
f) 0
g) $2 - 2a^2$

2 Calcula los determinantes de las matrices que siguen utilizando la regla de Sarrus.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad e)\ \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$$

$$f)\ \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus, se obtiene:

a) –2
b) 2

c) 79
d) $a^3 - 3a + 2$
e) $-m^2 - 4m + 1$
f) $m^3 + 3m^2 + 3m + 2$

3 **Encuentra el número de inversiones que existen en las sguientes permutaciones de números naturales del orden que se indica:**
***a)* orden 4: 1243, 3142 y 1324.**
***b)* orden 5: 13542, 53241 y 13254.**
***c)* orden 6: 213654, 341652 y 231645.**

a) La permutación 1234 no presenta inversiones.
La permutación 3142 tiene 3 inversiones.
La permutación 1324 tiene una inversión.
b) La permutación 13524 presenta 3 inversiones.
La permutación 53241 tiene 7 inversiones.
La permutación 13254 tiene 2 inversiones.
c) La permutación 213654 presenta 4 inversiones.
La permutación 341652 tiene 7 inversiones.
La permutación 231645 tiene 4 inversiones.

4 **Halla el signo de los términos que siguen pertenecientes al desarrollo de un determinante de orden 5.**
a) $a_{25} \cdot a_{51} \cdot a_{44} \cdot a_{13} \cdot a_{32}$
b) $a_{51} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{14}$
c) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{45} \cdot a_{51}$
d) $a_{45} \cdot a_{54} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

a) El término $a_{25}\, a_{51}\, a_{44}\, aa_{13}\, a_{32}$ es el mismo que $a_{13}\, a_{25}\, a_{32}\, a_{44}\, a_{51}$ que se corresponde con la permutación de orden cinco: 35241. Ésta tiene siete inversiones, por lo que es una permutación impar. Al término anterior le corresponde un signo menos.
b) De forma análoga al caso anterior, la permutación es 42531, que posee siete inversiones y también le corresponde un signo menos.
c) A este término le corresponde la permutación 23451, que tiene cuatro inversiones y le corresponde un signo más.
d) En este caso la permutación es 21354, que tiene dos inversiones y le corresponde un signo más.

5 **Prueba sin desarrollar que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:**

$$a)\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{pmatrix}$$

a) Sumamos la segunda y tercera columna y el resultado lo colocamos en la tercera columna. De la tercera columna sacamos factor común a + b + c. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales.

b) Sumamos la segunda y tercera columna y el resultado lo colocamos en la segunda columna. De la primera sacamos factor común a y de la segunda $b + c + d$. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c+d & b \\ a & b+c+d & c \\ a & b+c+d & d \end{pmatrix} = a\,(a+b+c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales y, por tanto, es nulo.
c) Multiplicamos (y dividimos) la primera fila por a, la segunda por b y la tercera por c. Sacamos factor común abc de la primera columna y dos de la segunda. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{pmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{pmatrix} abc & 2 & a^2 \\ abc & 2 & b^2 \\ abc & 2 & c^2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & c^2 \end{pmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales.

6 **Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11.**

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

a) Puede observarse que los números 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados en la tercera columna. Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$$

b) Procediendo de manera análoga,

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1221 & 9625 & 1111 & 3839 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 11 \cdot 111 & 11 \cdot 875 & 11 \cdot 101 & 11 \cdot 349 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 111 & 875 & 101 & 349 \end{vmatrix}$$

$$c)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3014 \\ 9 & 7 & 2 & 9724 \\ 2 & 3 & 5 & 2354 \\ 4 & 0 & 5 & 4059 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \cdot 274 \\ 9 & 7 & 2 & 11 \cdot 884 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \cdot 214 \\ 4 & 0 & 5 & 11 \cdot 369 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 274 \\ 9 & 7 & 2 & 884 \\ 2 & 3 & 5 & 214 \\ 4 & 0 & 5 & 369 \end{vmatrix}$$

7 Comprueba que el determinante A_1 vale 0 y que el determinante A_2 es divisible por 5, sin calcularlos, a partir de las propiedades de los determinantes, siendo

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

En el caso A_1, multiplicamos y dividimos la primera columna por –5, después sacamos factor común $\frac{1}{5}$ y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 \cdot \frac{(-5)}{(-5)} & 25 & 40 \\ 2/5 \cdot \frac{(-5)}{(-5)} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 40 & 25 & 40 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante es nulo al tener dos columnas iguales.

En el caso A_2, multiplicamos la segunda columna por 2 y le sumamos la tercera colocando el resultado en la tercera columna. Podemos sacar factor común 5.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 20 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \cdot 1 \\ 4 & 7 & 5 \cdot 4 \\ 6 & 3 & 5 \cdot 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

8 ¿Cómo varía un determinante de orden tres si a cada columna se le suma la columna anterior y a la primera se le suma la última?¿Y si el determinante es de orden cuatro?

En ambas situaciones, el determinante tiene el mismo valor que el determinante de partida.

9 *a)* La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.
***b)* La matriz A verifica que $AA^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.**
***c)* Si A es una matriz cuadrada de orden cuatro, ¿qué relación existe entre det (A) y det (kA)?**

a) Utilizando la propiedad $\det(A \cdot B) = detA \cdot detB$, se tiene:
$det(A^2) = det(A \cdot A) = det(A) \cdot det(A) = (det(A))^2$.
Por tanto, $(det(A))^2 = det(A) \Rightarrow (det(A))^2 - det(A) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow det(\mathrm{A})\ (det(A) - 1) = 0$.
Luego, $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$

b) Teniendo en cuenta las propiedades $det(A) = det(A^t)$ y $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$,
se obtiene:
$det(AA)^t = detI \Rightarrow (det(A))^2 = 1 \Rightarrow det(A) = \pm 1$

c) La relación pedida es $det(kA) = k^4\ det(A)$

10 Para los determinantes

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

***a)* Halla los menores complementarios de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12}, cuando existan.**
***b)* Halla los adjuntos de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12}, cuando existan.**

a) Atendiendo a la definición de menor complementario, se obtiene:

$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \qquad \alpha_{11} = b \qquad \alpha_{11} = \begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{vmatrix} =$
$= b\ (1 - c - d)$

$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2 \qquad \alpha_{23}$ no existe $\qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ -a & b & d \\ a^2 & b & 0 \end{vmatrix} =$
$= -2abd$

$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2 \qquad \alpha_{32}$ no existe $\qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$
$= 2a^2cd + 2ad$

$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = ab - b^2 \qquad \alpha_{12} = a \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$
$= -a\ (1 + c + d)$

b) Atendiendo a la definición de adjunto, se obtiene:

$A_{11} = a^2 + b^2$	$A_{11} = b$	$A_{11} = b\ (1 - c - b)$
$A_{23} = b^2 - ab$	A_{23} no existe	$A_{23} = 2abd$
$A_{32} = b^2 - ab$	A_{32} no existe	$A_{32} = -2a^2cd - 2ad$
$A_{12} = b^2 - ab$	$A_{12} = -a$	$A_{12} = a\ (1 + c + d)$

11 Calcula los adjuntos de los elementos de la tercera columna de $\begin{vmatrix} 5 & 2 & a & 0 \\ 5 & 3 & b & -1 \\ 0 & 7 & c & 4 \\ 0 & 2 & d & 6 \end{vmatrix}$

Obtenemos:

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 170$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -170$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 40$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -55$$

12 Halla las matrices adjuntas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

Las matrices adjuntas son:

a) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} -20 & -7 & 25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} ac-bc & 0 & b-a \\ b^2-c^2 & c-b & c-b \\ c^2-ab & b-c & a-c \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13 Encuentra una respuesta razonada a las siguientes cuestiones:

a) **En un determinante realizamos una cierta permutación de filas. ¿Qué podemos decir del valor del nuevo determinante obtenido?**

b) **Se sabe que $det(A) = 5$, y que A es una matriz de orden dos. ¿Cuánto vale $det(3A)$?**

c) **Dos matrices A y B son inversas. Si $det(A) = 3$, ¿cuánto vale $det(B)$?**

d) **Si A es una matriz cuadrada de orden 3, ¿cuánto vale el determinante de la matriz $Adj(A)$?**

a) Si el número de permutaciones de filas es par, el valor del determinante es el mismo y si es impar, el valor del determinante cambia de signo.

b) El valor de $det(3A) = 3^2 \cdot det(A)$, luego $det(3A) = 45$.

c) El determinante buscado vale 1/3.

d) Si a es una matriz cuadrada de orden 3, se cumple:

$$A \cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} det\,A & 0 & 0 \\ 0 & det\,A & 0 \\ 0 & 0 & det\,A \end{pmatrix} \Rightarrow det\,[A \cdot (Adj(A))^t] =$$

$$= (det(A))^3 \Rightarrow det(A) \cdot det(\mathrm{Adj}(A)) = (det(A))^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow det(Adj(A)) = det(A)^2$$

14 Calcular los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

a) Haciendo ceros en la primera columna se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 15 & -13 & 24 \\ 0 & 1 & -10 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -13 & 24 \\ 1 & -10 & 7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -295$$

b) Haciendo ceros en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1+x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} = (1+4)^4$$

15 Comprueba que las siguientes igualdades son verdaderas:

a) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = x^2\,(x+a+b+c)$

b) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

c) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4\,(a+b)\,(a+c)\,(b+c)$

d) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$

a) $$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} x^2\,(x+a+b+c)$$

(1) Hemos sumado todas las columnas colocando el resultado en la primera.
(2) Hemos restado, de las filas segunda y tercera, la primera.
(3) Se ha desarrollado el determinante.

$$b)\ \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & a+b+c & 0 \\ 2c & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (a+b+c)^3$$

(1) Hemos sumado todas las filas colocando el resultado en la primera.
(2) Hemos restado, de la primera fila, la segunda y la tercera.
(3) Se ha desarrollado el determinante.

c) Efectua de forma cuidadosa los dos miembros de la igualdad y comprueba que ambos conducen a la misma expresión.

$$d)\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -z & 0 \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} x \begin{vmatrix} -x & -z & 0 \\ 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & z & z \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} x^2z^2$$

(1) La fila primera menos la segunda a la primera.
La fila segunda menos la tercera a la segunda.
La fila tercera menos la cuarta a la tercera.
(2) Desarrollando por la primera columna.
(3) Aplicando la regla de Cramer y operando.

16 **Si** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, **calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:**

$$a)\ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a)\ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2\cdot 3/2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$b)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2-F_1\to F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

17 **Calcula el valor del determinante:**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{log\ 3} & \boldsymbol{log\ 30} & \boldsymbol{log\ 300} \\ \boldsymbol{(log\ 3)^2} & \boldsymbol{(log\ 30)^2} & \boldsymbol{(log\ 300)^2} \end{vmatrix}$$

Es un determinante de Vandermonde de orden tres, del tipo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)\,(c-a)\,(b-a)$$

Según lo anterior, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ log\ 3 & log\ 30 & log\ 300 \\ (log\ 3)^2 & (log\ 30)^2 & (log\ 300)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (log\ 300 - log\ 30)\ (log\ 300 - log\ 3)\ (log\ 30 - log\ 3) =$$

$$= log\ \frac{300}{30} \cdot log\ \frac{300}{3} \cdot log\ \frac{30}{3} = log\ 10 \cdot log\ 100 \cdot log\ 10 =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

18 **Obtén, simplificado, el desarrollo del determinante:**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{abc} & \boldsymbol{-ab} & \boldsymbol{a^2} \\ \boldsymbol{-b^2c} & \boldsymbol{2b^2} & \boldsymbol{-ab} \\ \boldsymbol{b^2c^2} & \boldsymbol{-b^2c} & \boldsymbol{3abc} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ bc & 0 & 2b \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=} 2\,a^2b^5c$$

(1) Hemos sacado factor común a de la tercera columna, b de la segunda y bc de la primera.
(2) La suma de la primera y segunda columna a la segunda. La diferencia de la primera y la tercera columna a la tercera.
(3) Desarrollando por la diagonal principal.

19 Resuelve las ecuaciones:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\textbf{c)}\ \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{d)}\ \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$$

$$a)\ \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1-x \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = .$$

$$= x \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = x^4 - x^3$$

$x^4 - x^5 = 0 \Rightarrow x^3\,(x-1) = 0$. Las soluciones son $x = 0$ y $x = 1$.

$$b)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^4 - 1$$

Las soluciones de la ecuación $x^4 - 1 = 0$ son los números complejos $1, -1, i, -i$.

$$c)\ \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 3x-1 & -1 & x & x \\ 3x-1 & x & -1 & x \\ 3x-1 & x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (3x-1)\,(x+1)^3$$

Las soluciones de $(3x-1)\,(x+1)^3 = 0$ son $x = 1/3$ y $x = -1$

$$d)\ \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ 0 & a-x & b-c & c-b \\ 0 & a-c & b-x & c-a \\ 0 & a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & b-c & c-b \\ a-c & b-x & c-a \\ a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & a+b-c-x & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} c-x & 0 & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c)\,(a+b-c-x)\,(a+c-b-x)\,(b+c-a-x)$$

Las soluciones de la ecuación son:
$x = -a - b - c$
$x = a + b - c$
$x = a - b + c$
$x = -a + b + c$

20 Calcula las matrices inversas de las sigueientes matrices:

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\textbf{d)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices inversas buscadas son:

$$a)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa si ad – bc es distinto de cero. En ese caso la matriz buscada es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} \frac{10}{130} & \frac{20}{130} & \frac{6}{130} \\ \frac{-10}{130} & \frac{-20}{130} & \frac{20}{130} \\ \frac{25}{130} & \frac{-15}{130} & \frac{-6}{130} \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

21 **Determina según los valores de *m* el rango de las matrices:**

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & m \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & m \end{pmatrix}$$

a) Si $m = -6$ el rango es dos y si $m \neq -6$, el rango es tres.
b) Si $m = 1$, el rango es uno.
Si $m = -2$, el rango es dos.
Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, el rango es tres.
c) Si $m = 3$, el rango es tres.
Si $m \neq 3$, el rango es cuatro.
d) Si $m = 10$, el rango es tres.
Si $m \neq 10$, el rango es cuatro.

22 **Si A es una matriz de orden n tal que $det(A) = 2$, calcula $det\,(MAM^{-1})$, $det(5A)$ y $det(2A^{-1})$.**

Los determinantes pedidos son:

- $det\,(MAM^{-1}) = detM \cdot detA \cdot det(M^{-1}) = detM \cdot detA \cdot \dfrac{1}{detm} =$
$= detA = 2$
- $det(5A) = 5^n \cdot det(A) = 5^n \cdot$
- $det(2A^{-1}) = 2^n\ det(A^{-1}) = 2^n \cdot \dfrac{1}{det\ A} = 2^n \cdot \dfrac{1}{2} = 2^{n-1}$

23 **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

***a)* Calcula A^{-1}. *b)* Resuelve la ecuación $det(A^{-1} - xI) = 0$.**

a) El determinante de la matriz A es $det(A) = -1$.
La matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La ecuación es $\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0.$

Desarrollando el determinante, obtenemos: $(1 - x)\,(1 + x)^2 = 0$.
Las soluciones de la ecuación son x = 1 y x = -1.

24 **¿Para qué valores del parámetro no es invertible la matriz** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **?**

Al ser $detA = -19a + 57$, este determinante se anula para $a = 3$.
Para este valor de a la matriz A no es invertible.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

25 **Calcula el valor de los siguientes determinantes :**

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \quad e)\ \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3x+3 & x & x & x \\ 3x+3 & 3 & x & x \\ 3x+3 & x & 33 & x \\ 3x+3 & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 3x+3 & x & x & x \\ 0 & x-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3x+3)(x-3)^3$$

(1) Sumando todas las columnas y el resultado a la primera.
(2) Restando de todas las filas la primera.
(3) Desarrollando.

$$b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 2$$

(1) La diferencia de las dos primeras filas a la segunda fila.
(2) Desarrollando por la primera columna.
(3) Utilizando la regla de Cramer.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, al tener dos columnas iguales.

d) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ 0 & a & b-c & c-b \\ 0 & a-c & b & c-a \\ 0 & a-b & b-a & c \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b+c & b-c & a+b-c \\ 0 & b & a+b-c \\ a-b+c & b-a & 0 \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b+c & -c & 0 \\ 0 & b & a+b-c \\ a-b+c & b-a & 0 \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c)\,(a+b-c) \begin{vmatrix} a-b+c & -c \\ a-b+c & b-a \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(a-b-c)$

e) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ a+4 & 1+a & 1 & 1 \\ a+4 & 1 & 1+a & 1 \\ a+4 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3\,(a+4)$

26 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-x} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{x+10} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-4} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

a) Desarrollando el determinante, obtenemos: $2x^2 + 16x - 12 = 0$
Las soluciones son $x = -8 + \sqrt{22}$ y $x = -8 - \sqrt{22}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 0 & 2x+2 & -1 & 3 \\ 0 & 3x-4 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+2 & -1 & 3 \\ 3x-4 & -6 & 9 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix}$

$= -9x^2 + 6x + 73$

Las soluciones de $9x^2 - 6x - 73 = 0$ son $x = 3{,}38$ y $x = -2{,}53$.

27 Supongamos que c_1, c_2, c_3 y c_4 son las cuatro columnas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale 3. Calcula razonadamente:
***a)* El determinante de la matriz inversa de A.**
***b)* El determinante de la matriz $2A$.**
***c)* El determinante de una matriz cuyas columnas son: $2c_1 - c_3$, c_4, $5c_3$ y c_2**

a) Si el determinante de la matriz A es 3, el de su inversa es 1/3.
b) $det(2A) = 2^4\, det(A) = 2^4 \cdot 3 = 48$.
c) $det(2c_1 - c_3, c_4, 5c_3, c_2) = det(c_1, c_4, 5c_3, c_2) =$
$= -det(c_1, c_2, 5c_3, c_4) = -5det(c_1, c_2, c_3, c_4) = -5 \cdot 3 = -15$

28 Prueba que se verifica la igualdad

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{sen\ a} & \boldsymbol{cos\ a} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{sen\ b} & \boldsymbol{cos\ b} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{sen\ c} & \boldsymbol{cos\ c} \end{vmatrix} = \boldsymbol{sen\,(b-c) + sen\,(c-a) + sen\,(a-b)}$

El determinante es:

$\begin{vmatrix} 1 & sen\ a & cos\ a \\ 1 & sen\ b & cos\ b \\ 1 & sen\ c & cos\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & sen\ a & cos\ a \\ 0 & sen\ a - sen\ b & cos\ a - cos\ b \\ 0 & sen\ a - sen\ c & cos\ a - cos\ c \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} sen\ a - sen\ b & cos\ a - cos\ b \\ sen\ a - sen\ c & cos\ a - cos\ c \end{vmatrix} =$

$= (sen\ a - sen\ b)\,(cos\ a - cos\ c) - (sen\ a - sen\ c)\,(cos\ a - cos\ b) =$
$= sen\ a\ cos\ a - sen\ a\ cos\ c - sen\ b\ cos\ a + sen\ b\ cos\ c -$
$- sen\ a\ cos\ a + sen\ a\ cos\ b + sen\ c\ cos\ a - sen\ c\ cos\ b =$
$= (sen\ b\ cos\ c - sen\ c\ cos\ b) + (sen\ c\ cos\ a - sen\ a\ cos\ c) +$
$+ (sen\ a\ cos\ b - sen\ b\ cos\ a) = sen\,(b - c) + sen\,(c - a) +$
$+ sen\,(a - b)$.

29 Calcula los valores de t para los cuales el siguiente determinante

$\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \boldsymbol{t} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-t} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$

toma valores positivos. Calcula el mayor valor que alcanza.

El valor del determinante es $t^2 - 3t - 4$.
Este determinante toma valores positivos en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(4, +\infty)$. No existe el máximo valor buscado.

30 **Responde a las siguientes cuestiones:**

a) **Si A es una matriz cuadrada de orden n, A^t su traspuesta y A^{-t} su inversa. ¿Qué relaciones tienen los determinantes $|A|$, $|A^t|$ y $|A^{-1}|$? ¿Por qué?**

b) **Si el determinante de una matriz cuadrada de orden n vale D, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene multiplicando por 5 todos los elementos de la anterior?**

c) **Todos los elementos de una matriz cuadrada de orden n se multiplican por –1. ¿Cómo queda afectado el valor de su determinante?**

a) $|A^t| = |A|$, ya que, según la definición de determinante, los términos del desarrollo del determinante pueden ordenarse de igual forma atendiendo a las filas o a las columnas.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ya que al ser $A \cdot A^{-1} = I$, tomando determinantes, se obtiene la relación anterior.

b) El valor es $5^n D$. Este hecho es debido a la propiedad que dice: Si los elementos de una fila (columna) de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

c) Debido a la propiedad anterior, el determinante queda multiplicado por $(-1)^n$. Es decir, será el mismo valor si n es par y valor opuesto si n es impar.

31 **Calcula las matrices inversas de las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -4/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & -1/2 \\ 1/3 & -5/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

32 **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$$

averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m = 2$.

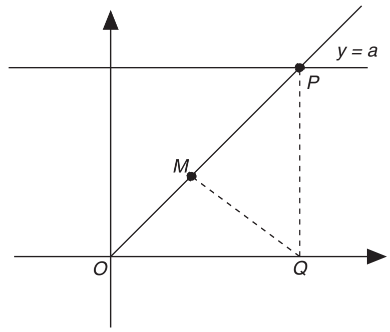
El determinante de la matriz es $det(A) = m^2 + 4m - 3$. Los valores para los cuales la matriz A tiene inversa son los valores distintos de las soluciones de la ecuación $m^2 + 4m - 3 = 0$.

Para $m = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & -1/9 & 2/9 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$

Resolución de problemas

1. LUGAR GEOMÉTRICO. Sobre la recta $y = a$ se considera un punto variable P. Llamamos Q a la proyección del punto P sobre el eje OX. Determina el lugar geométrico del punto M proyección de Q sobre la recta OP.



La recta OP es: $y = mx \Rightarrow$ el punto P tiene de coordenadas $P\left(\frac{a}{m}, a\right)$. Luego el punto Q tiene de coordenadas $Q\left(\frac{a}{m}, 0\right)$ y el punto M es el punto de intersección de la recta $OP \equiv y = mx$, y la recta perpendicular a ésta pagando por $Q \equiv m^2y + mx = a$, por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} y = mx \\ m^2 + mx = a \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{a}{m^3 + m} \qquad y = \frac{am}{m^3 + m}$$

Luego el punto M tiene dos coordenadas:

$$x = \frac{a}{m^3 + m} \qquad y = \frac{am}{m^3 + m}$$

La ecuación del lugar geométrico es: $\boxed{y^3 + x^2y - x^3a = 0}$

2. PIRÁMIDES DE BOLAS. Un mago apila bolas, todas iguales, para formar dos pirámides tetraédricas. De pronto se da cuenta de que juntando las bolas de ambas pirámides puede formar una sola pirámide tetraédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de bolas de que tendría que disponer el mago inicialmente?

Al construir pirámides tetraédricas de bolas aparecen los números tetraédricos:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...

que forman una progresión geométrica de 3^er orden de término general $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

- Si las dos pirámides son iguales, el mínimo número es 20 bolas, con lo que formaría una pirámide tetraédrica de arista 4 a partir de dos tetraédricas de arista 3.
- Si las pirámides iniciales no son iguales, el número mínimo de bolas es 680, número obtenido al sumar las bolas de dos pirámides tetraédricas de aristas 8 y 14 y bolas 120 y 560.

  La nueva pirámide tetraédrica formada por 680 bolas tiene de arista 15, pues

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 680 \Rightarrow n = 15$$

BLOQUE TEMÁTICO I:
ÁLGEBRA LINEAL

UNIDAD DIDÁCTICA 3

Sistemas de ecuaciones lineales

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Transcribir situaciones como sistemas de ecuaciones lineales y resolverlas, cuando sea posible.
2. Aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius al estudio de sistemas de ecuaciones lineales.
3. Utilizar los diferentes métodos de resolución de sistemas: Gauss, regla de Cramer, matricial.
4. Estudiar y resolver sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro.
5. Utilizar los conceptos de los sistemas de ecuaciones en casos sencillos de eliminación de parámetros.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Pueden buscarse relaciones con la aplicación geométrica a la posición relativa de rectas y planos.
Puede orientarse su desarrollo poniendo el énfasis en el desarrollo de técnicas y procedimientos.
Los alumnos/as con conocimientos más elevados pueden hacer un estudio pormenorizado, en sistemas dependientes de un parámetro, de los significados geométricos que dan lugar a los diversos valores que puede tomar dicho parámetro.

RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES

Actividades iniciales

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales :

$$a)\ \begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 5y = 23 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ x + 3y + 6z + 10t = 0 \\ x + 4y + 10z + 20t = 0 \end{cases}$$

a) La solución es $x = 4$, $y = 3$.
b) La solución es $x = 2$, $y = 2$, $z = 3$.
c) La solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

2. Estudia y resuelve cuando sea posible los sistemas de ecuaciones siguientes, según los valores del parámetro *m*:

$$a)\ \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m^2 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + my + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

a) • Si $m = -1$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = 1 - t$, $y = t$ con $t \in R$.
• Si $m \notin \{-1, 1\}$, el sistema es compatible determinado.

Su solución es $x = \dfrac{m}{m+1}$, $y = \dfrac{m^2 + m + 1}{m+1}$

b) • Si $m = -2$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t - s, \quad y = t, \quad z = s \text{ con } t, s \in R.$$

• Si $m \notin \{-2, 1\}$ el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = -\frac{m+1}{m+2},\ y = \frac{1}{m+2},\ z = \frac{(m+1)^2}{(m+2)}$$

c) • Si m = 1, el sistema es incompatible.
• Si $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 0,\quad y = \frac{1}{1-m},\quad z = \frac{8m-6}{m-1}$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Resuelve los siguientes sistemas:

$$a)\ \begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ x - 2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 7 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2x = 6 \\ 10x - 5x = 15 \end{cases}$$

a) La solución es $x = 2$, $y = 1$.
b) El sistema es incompatible.
c) El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = t$, $y = 2t - 3$ con $t \in R$.

2 Discute y resuelve según los valores de a los sistemas:

$$a)\ \begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases}$$

a) • Si $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t,\ y = t \text{ con } t \in R$$

• Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = \frac{(a+1)(a^2+1)}{a^2+a+1},\ y = -\frac{a}{a^2+a+1}$$

b) • Si $a = 0$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 0,\quad y = 0.$$

• Si $a \neq 0$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = 0$, $y = t$ con $t \in R$.

3 Dado el sistema $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$ **halla *m*, para que:**

***a)* no tenga soluciones,**
***b)* tenga infinitas soluciones,**
c)* tenga solución única, *y
***d)* tenga una solución en la que $x = 3$.**

a) El sistema es incompatible si $m = -1$.
b) El sistema es compatible indeterminado si $m = 1$.
c) El sistema es compatible determinado si $m \neq 1$ y $m \neq -1$.
d) El valor de m es –4/3.

4 Estudia el siguiente sistema según los valores de

$$a\ \begin{cases} 2x - y = 2 \\ ax - 2y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ x + 5y = a \end{cases}$$

• Si $a = 1$, el sistema es compatible determinado con solución $x = 1$, $y = 0$.
• Si $a \neq 1$ el sistema es incompatible.

5 **Dado el sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} 2x - y = m \\ mx + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

a) **Haz un estudio de él según los diferentes valores del parámetro *m*.**
b) **Resuelve el sistema en los casos que sea compatible.**

a) • Si $m = 1$, el sistema es compatible determinado.
• Si $m = -8$, el sistema es compatible determinado.
• Si $m \neq 1$ y $m \neq -8$, el sistema es incompatible.
b) Si $m = 1$, la solución es $x = 1$, $y = 1$.
Si $m = -8$, la solución es $x = 10$, $y = 28$.

6 **Resuelve los sistemas de ecuaciones con tres incógnitas:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 4y + 2z = 5 \end{cases}$ ***d)*** $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 4y + z = 7 \end{cases}$ ***f)*** $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}$

a) La solución es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.
b) Las soluciones son:
$$x = 4 - t,\ y = 6 - t,\ z = t \text{ con } t \in R$$
c) Las soluciones son:
$$x = 1 + 2t,\ y = t,\ z = 2 + 3t \text{ con } t \in R$$
d) La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$.
e) Las soluciones son:
$$x = 5 - 7t,\ y = -2 + 5t,\ z = t \text{ con } t \in R$$
f) La solución es $x = 2/3$, $y = --7/9$, $z = 2/9$.

7 **Dado el sistema**

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

a) **Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.**
b) **Añade una ecuación para que el sistema tenga infinitas soluciones.**

a) Por ejemplo, la ecuación añadida para que el sistema sea incompatible es $3x + 2z = 5$.
c) La ecuación añadida para que el sistema sea compatible indeterminada puede ser $3x + 2z = 2$.

8 **Si el rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es dos ¿Puede ser el sistema compatible? ¿Puede ser incompatible?**

Pueden darse las dos situaciones:
Para el sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 15 \end{cases}$

el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es dos y el sistema es compatible indeterminado; sus soluciones son:
$$x = t,\ y = 3 - t,\ z = 3 \text{ con } t \in R.$$

Para el sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$

el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es dos y el sistema es incompatible.

9 **En un sistema de ecuaciones el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. ¿Puede tener solución el sistema? ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?**

El sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + 2z = 9 \\ 2x + 2y + 3z = 15 \end{cases}$

que es compatible indeterminado responde afirmativamente a la primera cuestión del ejercicio.
Puede aplicarse la regla de Cramer al sistema equivalente

$$\begin{cases} y + z = 6 - x \\ y + 2z = 9 - x \end{cases}$$

dicha regla proporciona las soluciones, en función de la incógnita x:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 - x & 1 \\ 9 - x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3 - x}{1},\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 - x \\ 1 & 9 - x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1} = 3$$

10 **Calcula el valor de *m* para que el sistema**

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (m - 1)x + 3y + z = m \\ x + (m - 1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) **Tenga una solución única.**
b) **Tenga infinitas soluciones.**
c) **No tenga soluciones.**

a) El sistema tiene solución única si m es distinto de –1 y de 2.
b) El sistema tiene infinitas soluciones si $m = 2$.
c) El sistema no tiene soluciones si $m = -1$.

11 ¿Para qué valores de k el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + 3z = k \\ x + z = 1 \end{cases}$ **tiene solución única?**

Para cualquier valor de k el sistema tiene solución única. Ésta es:

$$x = 2 - k/4\ ,\ y = 3 + k/4\ ,\ z = -1 + k/4.$$

12 Estudia según los valores de a el sistema

$$\begin{cases} ax - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 2 \\ ax + y - z = 1 \end{cases}$$

Resuélvelo para $a = 1$.

- Si $a = -1/6$, el sistema es incompatible.
- Si $a \neq -1/6$, el sistema es compatible determinado.

Para $a = 1$, el sistema es $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

y su solución es:

$$x = 6/7\ ,\ y = 3/7\ ,\ z = 2/7$$

13 Discute según los valores de a y resuélve, cuando sea posible, el sistema:

$$\begin{cases} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$$

- Si $a \neq 7$, el sistema es incompatible.
- Si $a = 7$, el sistema es compatible determinado. Su solución es:

$$x = 43/9\ ,\ y = 13/3\ ,\ z = 5/3.$$

14 Discute y resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 5x - y + mz = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

a) • Si $a \neq 5$, el sistema es compatible determinado. Su solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
• Si $m = 5$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = -t$, $y = 0$, $z = t$ con $t \in R$.

b) • Si $m \neq 46/3$, el sistema es compatible determinado. Su solución es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
• Si $m = 46/3$ el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = \frac{22}{3}t\ ,\ y = -7t,\ z = t \text{ con } t \in R$$

15 Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 0 \\ x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

***a)* Indica para qué valores de k admite solución distinta de la trivial.**
***b)* Resuelve el sistema anterior para un valor k que lo haga compatible indeterminado.**

a) Sólo para $k = 7/4$, el sistema admite una solución distinta de la trivial.
b) Para el valor anterior, las soluciones son:

$$x = \frac{5t}{4}\ ,\ y = \frac{9t}{4}\ ,\ z = t \text{ con } t \in R$$

16 Discute y resuelve, según los valores de m, los sistemas:

a) $\begin{cases} (m+1)\ x = y + z = 0 \\ x + (m-2)\ y + z = 0 \\ x + y + (m-3)\ z = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - y + mz = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 5x - my + 2z = 0 \end{cases}$

a) • Si m es distinto de $+2$, $-2 - \sqrt{7}$ o $-2 + \sqrt{7}$, el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
• Si m es 2, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son: $x = -t$, $y = 2t$, $z = t$ con $t \in R$.
• Si m es $-2 - \sqrt{7}$ o $-2 + \sqrt{7}$, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para cualquier valor de m, el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial.

17 Elimina los parámetros que intervienen en los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} x = 2m + n \\ y = -m + n \\ z = 3m - 2n \\ t = m + n \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x = p + q \\ y = q + r \\ z = p + r \\ t = 2p - 3r \\ u = p + q + r \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = -p + 2q \\ z = 2 + 2p + 3q \\ t = -1 + 2p \\ u = 3 - q \end{cases}$

Eliminando los parámetros, se obtiene:

a) $\begin{cases} x - 7y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - 3t = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5x - 5y - z - 2t = 0 \\ x + y - z - 2u = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x + y - 3z = 1 \\ 4x - 2y - 3t = 7 \\ 2x - t + 2u = 8 \end{cases}$

18 **Dado el sistema**

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 3x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

a) **Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.**

b) **Añade una ecuación para que el sistema sea compatible e indeterminado.**

a) Puede añadirse la ecuación $5x - 5y + 2z = 10$.
b) Puede añadirse la ecuación $5x - 5y + 2z = 9$.

19 **Discute, según los valores del parámetro k, y resuelve en los casos que proceda, los sistemas:**

$$a) \begin{cases} 2x - y - z = k \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 3 \\ y = z \\ 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

a) • Si $k \neq 3$, el sistema es incompatible.
• Si $k = 3$, el sistema es compatible determinado.
Su solución es $x = 5/3$, $y = 2/3$, $z = -1/3$.

b) • Si $k \neq 4$, el sistema es incompatible.
• Si $k = 4$, el sistema es compatible determinado.
Su solución es $z = -4$, $y = 1$, $z = 1$.

c) • Si $k \neq 3$, el sistema es incompatible.
• Si $k = 3$, el sistema es compatible determinado.
Su solución es $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

20 **Un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, ¿puede ser compatible determinado? Justifica la respuesta con un ejemplo.**

La respuesta es afirmativa.
El ejemplo pedido puede ser $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x + 2y = 26 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

21 **La matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas es tal que $a_{12} = a_{13} = a_{22} = 0$. ¿Qué valores puede tomar el resto de componentes de la matriz para que el sistema sea compatible determinado?**

La matriz de los coeficientes es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible determinado, el determinante de dicha matriz debe ser distinto de cero. Por tanto, los elementos a_{11}, a_{23} y a_{32} deben ser distintos de cero. Los restantes elementos pueden ser cualesquiera.

22 **¿Para qué valor o valores de m el sistema**

$$\begin{cases} mx + 2y = 0 \\ mx + my + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

admite alguna solución diferente de $x = y = z = 0$? Da a m uno de estos valores y halla todas las soluciones del sistema que resulten.

Si m es distinto de 2, la única solución del sistema es la trivial. Para $m = 2$, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son: $x = t$, $y = t$, $z = 4t$ con $t \in R$.

23 **Estudia, para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema**

$$\begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$$

y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

• Si a es distinto de 1 o 2, el sistema es compatible determinado.
• Si $a = 1$, el sistema es incompatible.
• Si $a = 2$, el sistema es compatible indeterminado.
Sus soluciones son:

$$x = 1 - t,\ y = 0,\ z = t \text{ con } t \in R.$$

24 **Sean S y S' dos sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz de coeficientes.**

a) **Justifica con un ejemplo que uno de los sistemas puede ser compatible y otro incompatible.**

b) **Si ambos son compatibles, ¿puede ser uno determinado y otro indeterminado?**

a) El sistema compatible puede ser $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

El sistema incompatible puede ser $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

b) Esta situación no puede darse, es decir, ambos sistemas serán determinados o indeterminados.

25 **Discute para los valores del parámetro k y resuelve en los casos que proceda, los sistemas siguientes:**

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - kz = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (k+1)x + 2y + z = 0 \\ 3x + ky - 2z = 0 \\ kx + y - z = 0 \end{cases}$$

a) • Si k ≠ 1 y $k \neq -2$ el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
• Si k = 1, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = -2t,\ y = t,\ z = t \text{ con } t \in R$$

• Si $k = -2$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = t,\ y = -2t,\ z = t \text{ con } t \in R$$

b) • Si $k \neq 23/5$ el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
• Si $k = 23/5$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = t/5,\ y = 75/5,\ z = t$$

c) • Si $k \neq 1{,}71$ y $k \neq -3{,}21$, el sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial.
• Si $k = 1{,}71$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 0{,}3t \quad y = -0{,}4t \quad z = t \quad \text{con } t \in R$$

• Si $k = -3{,}21$, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 0{,}17t \quad y = -1{,}3t \quad z = t \quad \text{con } t \in R$$

26 **Calcula el menor valor posible de *n* entre los números naturales 1, 2, 3, ... tal que el sistema**

$$\begin{cases} n^2x + ny = 1 \\ x + n^2y = 0 \end{cases}$$

admita solución. Resuélvelo.

El determinante de la matriz de los coeficientes $\begin{pmatrix} n^2 & n \\ 1 & n^2 \end{pmatrix}$ es $n^4 - n = n\,(n-1)\,(n^2+n+1)$.
El menor número natural que hace el sistema compatible es $n = 2$.

Para $n = 2$, el sistema es $\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$

y su solución: $x = \dfrac{4}{14}$, $y = -\dfrac{1}{14}$

27 **Determina *m* y *n* en el sistema**

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ 3x - y = m - n \\ x - y = 4 \end{cases}$$

para que éste resulte compatible.

Para que el sistema sea compatible, la relación entre m y n debe ser $m - 3n - 28 = 0$.

28 **Clasifica en función del número de soluciones los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:**

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

a) Tiene infinitas soluciones, que son: $x = 3-t,\ y = t,\ z = 0$ con $t \in R$
b) No tiene soluciones.
c) Tiene una solución que es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

29 **Discute, según los valores de *m*, el sistema**

$$\begin{cases} mx + y = 2 - 2m \\ x + my = m - 1 \end{cases}$$

y resolverlo cuando *m* = 5.

• Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
• Si $m = 1$, el sistema es compatible indeterminado.
• Si $m = -1$, el sistema es incompatible.

Cuando $m = 5$, el sistema es $\begin{cases} 5x + y = -8 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$

y su solución: $x = -\dfrac{11}{6}$, $y = \dfrac{7}{6}$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

30 **Encuentra todas las soluciones del sistema siguiente, según los valores del parámetro real a:**

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

Para cualquier valor que tome el parámetro a, el sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$x = 1 - t,\ y = (1-2a)t,\ z = 2t \text{ con } t \in R \text{ y } a \in R$$

31 **Discute el sistema siguiente, según los diferentes valores de los parámetros *a, b* (*a, b* ∈ *R*).**

$$\begin{cases} ax + ay + az = 0 \\ ax + by + bz = 0 \\ ax + by + z = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$$

es $\det A = a\,(a-b)\,(b-1)$. Pueden darse las siguientes situaciones:
• Si $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 1$.
El rango de A es 3 y el sistema es compatible determinado.
• Si $a \neq b$, $a = 0$.
— $b \neq 1$. El rango de A es 2 y el sistema es compatible indeterminado.
— $b = 1$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.

• Si $a \neq b$, $b = 1$.
— $a \neq 0$. El rango de A es 2 y el sistema es compatible indeterminado.
— $a = 0$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.

• Si $a = b$.
— $a \neq 0$, $a \neq 1$. El rango de A es 2 y el sistema es compatible indeterminado.
— $a = 0$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.
— $a = 1$. El rango de A es 1 y el sistema es compatible indeterminado.

32 Discute, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} mx + y + z &= m^2 \\ x - y + z &= 1 \\ 3x - y - z &= 1 \\ 6x - y + z &= 3m \end{aligned}\right.$$

• Si $m \neq 2$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 2$. el sistema es compatible determinado.

33 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= b \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right.$$

***a)* Discute el sistema en función de *a* y *b*.**
***b)* Resuelve el sistema para $a = b = -2$.**

a) • Si $a \neq 1$ y b cualquiera, el sistema es compatible determinado.
• Si $a = 1$ y $b = 1$, el sistema es compatible indeterminado.
• Si $a = 1$ y $b \neq 1$, el sistema es incompatible.

b) Para $a = b = -2$, el sistema es $\left\{\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= -2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right.$

y su solución es:

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 0$$

34 Dado el sistema $\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ x - y + z &= n \\ x - y + mz &= 2 \end{aligned}\right.$

Se pide:
***a)* Discutirlo según los valores de los parámetros *m* y *n*.**
***b)* Resolverlo para $m = 3$, $n = 0$, usando el método de Gauss o bien matricialmente, es decir, hallando la inversa de la matriz de los coeficientes.**

a) • Si $m \neq 1$ y n cualquiera, el sistema es compatible determinado.
• Si $m = 1$ y $n = 2$, el sistema es compatible indeterminado.
• Si $m = 1$ y $n \neq 2$, el sistema es incompatible.

b) Para $m = 3$, $n = 0$, el sistema es $\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ x - y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 2 \end{aligned}\right.$

• Por el método de Gauss

$$\left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ x - y + z &= 0 \\ x - y + 3z &= 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ 7y - 8z &= 6 \\ 7y - 14z &= 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 3x + 4y - 5z &= 6 \\ 7y - 8z &= 6 \\ 6z &= 6 \end{aligned}\right.$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.
• Matricialmente, a través de la matriz inversa.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/2 & 1/14 \\ 1/7 & -1 & 2/7 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

35 Elimina los parámetros *a* y *b* en el sistema:

$$\left\{\begin{aligned} x + y &= 3a + 3 \\ 2x + y - z &= 3a + 3b + 1 \\ x - 2y + z &= -2a + 5b - 8 \end{aligned}\right.$$

Debe cumplirse que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & x + y - 3 \\ 3 & 3 & 2x + y - z - 1 \\ -2 & 5 & x - 2y + z + 8 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinando y simplificando, se obtiene:

$$\boxed{y - 2z = 2}$$

36 Discute, según los valores del parámetro *m,* el sistema

$$\left\{\begin{aligned} x - y &= m \\ x + m^2 z &= 2m + 1 \\ x - y + (m^2 - m)\, z &= 2m \end{aligned}\right.$$

Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

• Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
• Si $m = 1$, el sistema es incompatible.
• Si $m = 0$, el sistema es compatible indeterminado.
Sus soluciones son:

$$x = 0,\ y = 0,\ z = t \text{ con } t \in R$$

37 Resuelve el siguiente sistema homogéneo, dejando como parámetros libres las incógnitas de mayor subíndice:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_5 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right.$$

Resolviendo por el método de Gauss se obtiene:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Tomando como parámetros las incógnitas x_4 y x_5 se obtienen las soluciones:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -x_4 + 2x_5 \qquad x_3 = x_5 \qquad \text{con } x_4, x_5 \in R$$

Resolución de problemas

1. **PESADA DIFÍCIL. Cuatro amigos, Arturo, Berta, Carlos y Diana encuentran una antigua báscula que sólo pesa objetos cuyo peso está entre 50 y 100 kg. Estos amigos individualmente pesan menos de 50 kg y los tres juntos más de 100 kg, por lo que deciden pesarse de dos en dos de la siguiente manera: Arturo y Berta, 69 kg; Berta y Carlos, 79 kg; Carlos y Diana, 74 kg; Diana y Arturo, 64 kg. Con estos datos, ¿pueden determinar el peso de cada uno? Si no fuera posible determinar los pesos individuales, ¿qué parejas deben pesarse para encontrar la solución?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Arturo} + \text{Berta} = 69 \\ \text{Berta} + \text{Carlos} = 79 \\ \text{Carlos} + \text{Diana} = 74 \\ \text{Diana} + \text{Arturo} = 64 \end{array}\right\}$$

Restando la primera igualdad y la segunda, obtenemos:

Arturo – Carlos = –10

Sumando a éste la tercera obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Arturo} - \text{Carlos} = -10 \\ \text{Carlos} + \text{Diana} = 74 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Arturo} + \text{Diana} = 64$$

Esta igualdad es la misma que la que tenemos en cuarto lugar. Luego no es posible determinar el peso de cada uno ya que nos queda un sistema indeterminado con más incógnitas que ecuaciones.

El sistema tiene una única solución si reemplazamos la tercera igualdad, sustituyéndola por: Carlos + Arturo = 74 kg con lo cual obtenemos que: Arturo pesa 32 kg; Berta pesa 37 kg; Carlos pesa 42 kg y Diana pesa 32 kg.

2. **CURIOSA ELECCIÓN. En una clase hacen la elección de delegado de una forma muy original. Se piden tres alumnos voluntarios, que resultan ser Ana, Luis y Clara. Se les venda los ojos a cada uno de ellos y se les coloca en la cabeza una cinta, como la que llevan algunos tenistas. Estas tres cintas se toman de una bolsa que contiene 3 cintas rojas y 2 amarillas. Se les retira la venda de los ojos y de esta forma cada uno puede ver las cintas de sus compañeros pero no la suya propia. Será elegido delegado quien acierte el color de la cinta que lleva. Primero se pregunta a Ana y responde que no puede saberlo, lo mismo sucede con Luis. Por último, Clara dice que su cinta es roja, por lo que resulta elegida delegada. ¿Cómo lo supo?**

En la siguiente tabla podemos ver todas las situaciones que se pueden plantear:

ANA	LUIS	CLARA	
R	R	R	(1)
R	R	A	(2)
R	A	R	(3)
A	R	R	(4)
R	A	A	(5)
A	R	A	(6)
A	A	R	(7)

En todos los casos lleva cinta roja excepto en (2), (5) y (6).

- (2) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera sabido que su cinta era roja, ya que si hubiera sido amarilla ana hubiera sabido el color de la suya.
- (5) no es posible pues en esta situación Ana hubiese dicho que su cinta era roja.
- (6) no es posible, pues en esta situación Luis hubiera dicho que su cinta era roja. Por tanto en todos los demás casos la de Clara es roja.

3. **SUMA DE CUBOS. ¿Cuántos suman los cubos de los n primeros números naturales?**

$1^3 = 1 = 1^2$
$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2$
...

1, 3, 6, 10, 15, ... Es una progresión aritmética de 2.º orden y su término general es $\frac{n^2 + n}{2}$, por tanto:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$$

Vamos a probarlo por inducción:

Suponemos que es cierto para $n = 1$, n = 2, ... $n = n$ y veamos si es cierto para $n = n + 1$.

$$\left.\begin{array}{l} 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n^2 + n}{2}\right)^2 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n + 1)^3 = \left[\dfrac{(n + 1) + n + 1}{2}\right]^2 \end{array}\right\}$$

$$\text{Restando} \Rightarrow (n + 1)^3 = \left[\frac{(n + 1) + n + 1}{2}\right]^2 - \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$$

Hay que ver si esta igualdad es cierta. Operando el segundo miembro ⇒

$(n + 1)^3 = \dfrac{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4}$. Es cierta la igualdad.

Por tanto queda probado que para «n» se cumple:

$$1^3 + 2^{\,2} + 3^3 + 4^3 + ... + h^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$$

BLOQUE TEMÁTICO II:
GEOMETRÍA

UNIDAD DIDÁCTICA 4

Vectores en el espacio

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

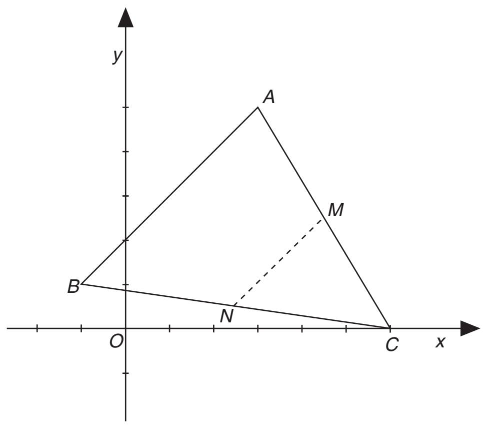
1. Conocer y utilizar el concepto de vector.
2. Aplicar el cálculo vectorial a la resolución de problemas geométricos.
3. Interpretar geométricamente las cuestiones de dependencia en el plano y en el espacio.
4. Conocer y utilizar los productos escalar, vectorial y mixto de vectores en el espacio.
5. Utilizar el producto escalar en el cálculo de módulos y ángulos entre vectores.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Puede orientarse su desarrollo poniendo el énfasis en el desarrollo de técnicas y procedimientos.
Buscaremos reforzar el razonamiento inductivo a través de la experimentación de situaciones concretas. No debe olvidarse fomentar el razonamientos deductivo mediante la aplicación de conceptos y propiedades, así como de las relaciones entre estas últimas.
Debe buscarse entre las experiencias del alumno sus conocimientos de la geometría vectorial desarrollada en los cursos precedentes.

Actividades iniciales

1. Comprueba que el segmento que une los puntos medios de los lados *AC* y *BC* del triángulo *A* (3, 5); *B*(–1, –1); *C*(6, 0) es paralelo al lado *AB* y de módulo su mitad.



Las coordenadas de los puntos medios de los lados *AC* y *BC*, *M* y *N*, son, respectivamente:
M (9/2, 5/2) y *N* (5/2, 1/2).

Los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{MN}$ tienen por coordenadas:
$\overline{AB} = (4, 4)$ y $\overline{MN} = (2, 2)$
Ambos son paralelos, ya que $\overline{AB} = 2\overline{MN}$.

Los módulos de ambos vectores son:
$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8}$
$|\overline{MN}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
Por tanto, $|\overline{AB}| = 2|\overline{MN}|$

2. Sabiendo que los vectores *u* y *v* son unitarios, demuestra que *u* + *v* es ortogonal a *u* – *v*.

Veamos que $(u + v)\cdot(u - v) = 0$.
Tenemos que,
$(u + v)\cdot(u - v) = u\cdot u + v\cdot u - u\cdot v - v\cdot v = 1 + v\cdot u - u\cdot v - 1 = 0$
ya que $u\cdot u = 1$, $v\cdot v = 1$ y $u\cdot v = v\cdot u$

3. Dados los vectores *u* = (1, 5), *v* = (–3, 4) y *w* (5, 12), halla los ángulos que forman dos a dos.

Aplicando la definición de producto escalar, obtenemos:
$cos\,(\widehat{u,\ w}) = \dfrac{u\cdot v}{|u|\,|v|} = \dfrac{-3+20}{\sqrt{26}\,\sqrt{25}} = \dfrac{17}{25{,}5} = 0{,}667$
luego $(\widehat{u,\ v}) = 48°10'47{,}4''$

$cos\,(\widehat{u,\ w}) = \dfrac{u\cdot w}{|u|\,|w|} = \dfrac{5+60}{\sqrt{26}\,\sqrt{169}} = \dfrac{65}{66{,}3} = 0{,}98$
luego $(\widehat{u,\ w}) = 11°18'35{,}8''$

$cos\,(\widehat{v,\ w}) = \dfrac{v\cdot w}{|v|\,|w|} = \dfrac{-15+48}{\sqrt{25}\,\sqrt{169}} = \dfrac{33}{65} = 0{,}51$
luego $(\widehat{v,\ w}) = 59°29'23{,}2''$

4. Dados los vectores *u* = (1, 5) y *v* = (3, –1), halla el vector *w* de manera que se verifique *x·u* = 1 y *w* sea perpendicular a *v*.

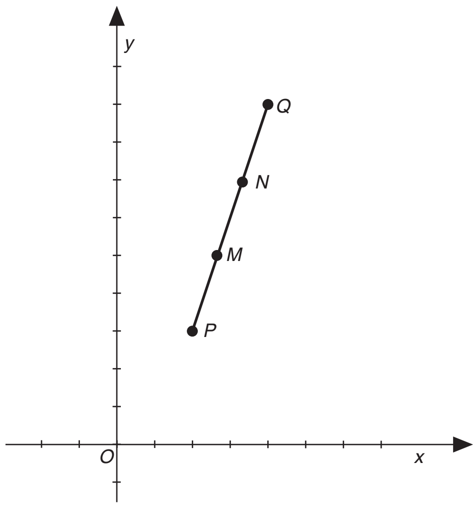
El vector $w = (a, b)$ debe cumplir $w\cdot u = 1$ y $w\cdot v = 0$.

Operando se obtiene el sistema $\begin{cases} a + 5b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$

La solución del sistema es $a = \dfrac{1}{16}$, $b = \dfrac{3}{16}$

El vector *w* buscado es *w* = (1/16, 3/16)

5. Un vector tiene por extremos los puntos *P*(2, 3) y *Q* (4, 9). Calcula las coordenadas de los puntos que lo dividen en tres partes iguales.



Las coordenadas del vector $\overline{PQ}$ son $\overline{PQ} = (2, 6)$.

El punto *M* (*a*, *b*) debe cumplir $\overrightarrow{PM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$

Por tanto, $(a - 2, b - 3) = \dfrac{1}{3}(2, 6)$. Operando, $a = \dfrac{8}{3}$, $b = 5$

El punto *N* (*a*', *b*') debe cumplir $\overrightarrow{PN} = \dfrac{2}{3}\overline{PQ}$

Por tanto, $(a' - 2, b^t - 3) = \dfrac{2}{3}(2, 6)$. Operando, $a' = \dfrac{10}{3}$, $b' = 7$

Los puntos buscados son: *M* (8/3, 5) y *N* (10/3, 7)

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Dados en R^3 los puntos *A* = (2, 3, 5) y *B* = (1, 0, 8), se pide:

a) **Halla las componentes de los vectores fijos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$.**

b) **Halla dos puntos C y D, tales que $\overline{CD}$ sea equipolente a $\overline{AB}$.**

c) **Halla el extremo F de un vector fijo $\overline{EF}$ tal que sea equipolente a $\overline{AB}$, siendo $E = (-3, 6, -9)$**

d) **Halla el origen G de un vector fijo $\overline{GH}$ tal que sea equipolente a $\overline{AB}$, siendo $H = (3, 2, 9)$.**

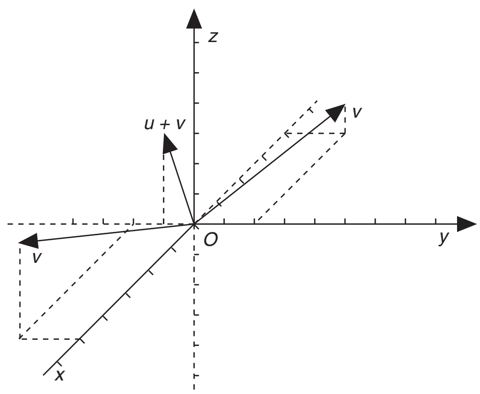
a) Las componentes de los vectores pedidos son $\overline{AB} = (-1, -3, 3)$ y $\overline{BA} = (1, 3, -3)$

b) Existen infinitas parejas de puntos C y D que cumplan la condición pedida. Por ejemplo, C (0, 0, 0) y D (–1, –3, 3).

c) Sea F (a, b, c), debe cumplirse: $(a + 3, b - 6, c + 9) = (-1, -3, 3)$. Luego $a = -4$, $b = 3$ y $c = -6$.

d) Sea G (a', b', c'), debe cumplirse: $(3 - a', 2 - b', 9 - c') = (-1, -3, 3)$. Por tanto, $a' = 4$, $b' = 5$ y $c' = 6$.

2 **Sean $u = (5, -2, 3)$ y $v = (-4, 2, 1)$ dos vectores libres. Se pide:**



a) **Dibuja un representante de cada uno de ellos y de su suma.**

b) **¿Cuál es el extremo de $\overline{AB}$ si $\overline{AB} = u - v$ y $A = (0, 2, 0)$**

c) **¿Cuáles son las componentes de los vectores $2u$ y $3u - 5v$?**

a) El vector suma $u + v$ el $u + v = (1, 0, 4)$. Un representante de u, v y $u + v$ puede verse en el dibujo.

b) Las coordenadas de $\overline{AB} = u - v$ son: $\overline{AB} = (9, -4, 2)$

Llamando $B = (a,b,c)$, se tiene: $(a - 0, b - 2, c - 0) = (9, -4, 2)$. Por tanto, $a = 9$, $b = -2$, $c = 2$.

c) Las coordenadas de los vectores bucados son:

$2u = 2\,(5, -2, 3) = (10, -4, 6)$

$3u - 5v = 3(5, -2, 3) - 5\,(-4, 2, 1) = (15, -6, 9) - (20, 10, 5) = (35, -16, 4)$.

3 **Hallar dos vectores u y v tales que $(5, 3, 5) = 2u + 3v$ y $(3, 2, 3) = u + 2v$.**

Resolvemos el sistema vectorial $\begin{cases} 2u + 3v = (5, 3, 5) \\ u + 2v = (3, 2, 3) \end{cases}$

Multiplicando la segunda ecuación por –2 y sumando a la primera se obtiene el vector $v = (1, 1, 1)$.
Con este vector sustituido en la segunda ecuación se obtiene $u = (1, 0, 1)$.
Por tanto, los vectores buscados son $u = (1, 0, 1)$ y $v = (1, 1, 1)$.

4 **Dados los vectores $u = (2, -5, 3)$; $v = (4, -3, 2)$ y $w = (0, 2, -7)$, se pide:**

a) **Calcula los productos escalares $u \cdot v$, $u \cdot w$ y $v \cdot w$.**

b) **Determina el módulo de cada uno de los vectores anteriores.**

c) **Halla los ángulos de los vectores anteriores, tomados dos a dos.**

a) Operando,
$u \cdot v = 8 + 15 + 6 = 29$, $u \cdot w = 0 - 10 - 21 = -31$, $v \cdot w = 0 - 6 - 14 = -20$.

b) Los módulos de los vectores son:
$|u| = \sqrt{4 + 25 + 9} = 6{,}15$; $|v| = \sqrt{16 + 9 + 4} = 5{,}4$,
$|w| = \sqrt{0 + 4 + 49} = 7{,}28$

c) Los ángulos de los vectores, tomados dos a dos, son:

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{29}{\sqrt{38}\,\sqrt{29}} = \frac{29}{33{,}2} = 0{,}87$$

luego $(\widehat{u, v}) = 29°17'7''$

$$\cos(\widehat{u, w}) = \frac{u \cdot w}{|u| \cdot |w|} = \frac{-31}{\sqrt{38}\,\sqrt{53}} = \frac{-31}{44{,}88} = 0{,}69$$

luego $(\widehat{u, w}) = 133°41'27{,}2''$

$$\cos(\widehat{v, w}) = \frac{-20}{\sqrt{29}\,\sqrt{53}} = \frac{-20}{39{,}2} = 0{,}51$$

luego $(\widehat{v, w}) = 120°40'\ 24{,}4''$

5 **Se consideran los vectores $u = (2, 2, 2)$ y $v = (1, 0, 1)$. Halla todos los vectores, con módulo unidad, y que forman un ángulo de 30° con u y de 45° con v.**

Sea $w = (x, y, z)$ el vector buscado. Debe cumplir:

• $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

• $\cos(\widehat{u, w}) = \cos 30° = \dfrac{u \cdot w}{|u|\,|w|} = 0{,}866$

luego $\dfrac{2x + 2y + 2z}{\sqrt{12}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0{,}866$

• $\cos(\widehat{v, w}) = \cos 45° = \dfrac{v \cdot w}{|v|\,|w|} = 0{,}707$

luego $\dfrac{x + z}{\sqrt{2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0{,}707$

La solución del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 4\,(x + y + z)^2 = 3\,(x^2 + y^2 + z^2) \\ (x + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$

son los vectores (0,99; –0,14 ;0,01) y (0,01; –0,14; 0,99).

6 **Halla dos vectores de módulo unidad y ortogonales a (1, 2, 3) y (4, 5, 6).**

Sea $u = (a, b, c)$ el vector buscado, las condiciones conducen al sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ 4a + 5b + 6c = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son:

$$a = -\frac{\sqrt{54}}{18},\ b = \frac{\sqrt{54}}{9},\ c = -\frac{\sqrt{54}}{18}$$

o

$$a = \frac{\sqrt{54}}{18},\ b = -\frac{\sqrt{54}}{9},\ c = \frac{\sqrt{54}}{18}$$

7 **Comprueba que son una base los siguientes vectores de R^3: $u = (1, 0, 2)$; $v = (-1, 1, 2)$ y $w = (0, 2, -3)$. Calcula las coordenadas de los vectores $x = (1, 1, 1)$ e $y = (1, 2, 3)$ respecto de la base anterior.**

Los vectores u, v y w forman una base, ya que el rango de la matriz formada por sus filas es tres, al ser

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$$

Las coordenadas del vector $x = (1, 1, 1)$ respecto de la base anterior son los escalares a, b y c, que cumplen:

$$(1, 1, 1) = a\,(1, 0, 2) + b\,(-1, 1, 2) + c\,(0, 2, -3)$$

Operando y resolviendo el sistema resultante se obtiene:

$$a = 12/11,\ b = 1/11,\ c = 5/11.$$

Análogamente, el vector $y = (1, 2, 3)$ tiene las siguientes coordenadas respecto de la base anterior:

$$a = 19/11,\ b = 8/11 \text{ y } c = 7/11$$

8 **Prueba que los vectores $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 0, 1)$ y $w = (4, 4, 4)$ son linealmente dependientes. Expresa uno de ellos como combinación de los otros.**

El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ es dos, al ser $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Puede ponerse el vector w como combinación de los otros en la forma:

$$w = 2u + (-2)\,v$$

9 **Indica para qué valores de t los vectores $u = (1, 1, 1)$; $v = (2, 2, t)$ y $w = (t, 0, 0)$ no forman una base de R^3.**

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & t \\ t & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = vale $t^2 - 2t$.

Si la expresión anterior es nula, los tres vectores no forman base de R^3.
Por tanto, $t^2 - 2t = 0$, es decir, para $t = 0$ y $t = 2$.

10 **Si los vectores $\{u_1, u_2, u_3\}$ son linealmente independientes, comprueba que también son linealmente independientes los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$, siendo:**

$$v_1 = u_1,\ v_2 = u_1 + u_2 \text{ y } v_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

Veamos que la combinación lineal nula de los vectores $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3$, $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ conduce a que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.
De $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, pasamos a $au_1 + b\,(u_1 + u_2) + c\,(u_1 + u_2 + a_3) = 0$.
Operando, se obtiene $(a + b + c)\,u_1 + (b + c)\,u_2 + cu_3 = 0$.
Al ser u_1, u_2, u_3 linealmente independientes, se cumple:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \phantom{a +{}} b + c = 0 \\ \phantom{a + b +{}} c = 0 \end{cases}$$

La única solución del sistema anterior es $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

11 **Dados los vectores $u = (3, -1, 4)$ y $v = (-2, 3, -2)$, hallar el módulo de los vectores $u + v$ y $u - v$.**

Tenemos que,

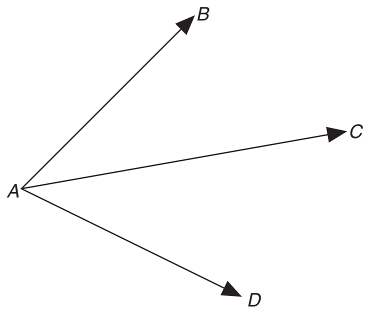
$u + v = (1, 2, 2)$ y $|u + v| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$u - v = (5, -4, 6)$ y $|u - v| = \sqrt{5^2 + (-4^2) + 6^2} = \sqrt{77} = 8{,}78$

12 **Demuestra que dados cuatro puntos, A, B, C, D, cualesquiera de un plan, se verifica que**

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{0}$$

Entre los cuatro puntos A, B, C y D pueden establecerse las siguientes relaciones vectoriales, que pueden observarse en el dibujo adjunto.



$$\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC}$$
$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$$
$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

Con las relaciones anteriores obtenemos:

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot (\overline{AD} - \overline{AC}) +$
$+ \overline{AC} \cdot (\overline{AB} - \overline{AD}) + \overline{AD} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AB} \cdot \overline{AD} -$
$- \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} - \overline{AC} \cdot \overline{AD} + \overline{AD} \cdot \overline{AC} -$
$- \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$

13 **Dados los vectores unitarios u, v y w, que satisfacen la condición $u + v + w = 0$, calcula el valor de la expresión $u \cdot v + v \cdot w + w \cdot u$.**

Se cumple que $u \cdot v = v \cdot v = w \cdot w = 1$ y $w = -u - v$. Sustituyendo en la expresión $u \cdot v + v \cdot w + w \cdot u$, se obtiene:

$u \cdot v + v \cdot w + w \cdot u = u \cdot v + v \cdot (-u - v) + (-u - v) \cdot u =$
$= u \cdot v - v \cdot u - v \cdot v - u \cdot u - v \cdot u =$
$= - v \cdot v + u \cdot u - v \cdot u = -1 - 1 - u \cdot v = -u \cdot v - 2.$

14 **¿Es posible que dos vectores u y v de R^3 verifiquen $u \cdot v = 7$, $|u| = 1$ y $|v| = 2$? ¿Por qué?**

No es posible, ya que $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos(\widehat{u, v})$, y en la situación del problema el coseno del ángulo formado por los vectores u y v debe valer 3, 5, situación que es imposible.

15 **Dados los vectores $u = (2, -1, 3)$; $v = (1, 2, 2)$, y w $(3, -1, 1)$, calcula:**

a) $u \cdot v$ ***b)*** $(u \cdot v) \cdot w$ ***c)*** $(u \cdot v) \cdot w$

$$a)\ u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8i - j + 5k$$

$$b)\ (u \cdot v) \cdot w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4i + 23j + 11k$$

$c)\ (u \cdot v) \cdot w = (-8, -1, 5) \cdot (3, -1, 1) = -24 + 1 + 5 = -18$

16 **Dados los vectores $u = (3, -1, -2)$ y $v = (1, 2, -1)$, calcula los productos vectoriales que siguen.**

a) $u \cdot v$ ***b)*** $(2u + v) \cdot v$ ***c)*** $(2u - v) \cdot (2u + v)$

$$a)\ u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5i + j + 7k$$

$$b)\ (2u + v) \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 7 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 10i + 2j + 14k$$

$$c)\ (2u - v) \cdot (2u + v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & -3 \\ 7 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 20i + 4j + 28k$$

17 **Dados los vectores $u = (3, -1, 4)$; $v = (-2, 3, -2)$, y $w = (5, 0, 2)$, se pide:**

a) **Calcula los productos vectoriales, $u \cdot v$, $u \cdot w$ y $v \cdot w$.**

b) **Calcula el producto mixto de los tres vectores anteriores.**

$$a)\ u \cdot v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 2j + 7k$$

$$u \cdot w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 14j + 6k$$

$$v \cdot w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6i - 6j - 15k$$

$$b)\ [u, v, w] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

18 **Sean los vectores $u = (2, 0, 1)$; $v = (1, 2, 2)$, y $2 = (3, -1, 1)$. Realizar las operaciones que siguen.**

a) $(u \cdot v)\ w$ ***b)*** $(v \cdot w)\ u$

c) $(u \cdot v) \cdot w$ ***d)*** $(v \cdot w) \cdot u$

e) $(u \cdot v) \cdot w$ ***f)*** $(v \cdot w) \cdot u$

$a)\ (u \cdot v)\ w = 4\ (3, -1, 1) = (12, -4, 4)$

$b)\ (v \cdot w)\ u = 3\ (2, 0, 1) = (6, 0, 3)$

$$c)\ (u \cdot v) \cdot w = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$d)\ (v \cdot w) \cdot u = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$e)\ (u \cdot v) \cdot w = (1, 14, 11)$

$f)\ (v \cdot w) \cdot u = (5, -14, -10)$

19 **Demuestra que el producto vectorial no es asociativo y no tiene elemento unidad en R^3.**

Para los vectores $u = (0, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ y $w = (1, 1, 0)$ se tiene que:

$$u \cdot (v \cdot w) = (0, -1, 1) \text{ y } (u \cdot v) \cdot w = (1, -1, 0)$$

Por tanto, se observa que el producto vectorial no es asociativo.

Supongamos que dado un vector cualquiera $u = (a, b, c)$, existe un vector $e = (x, y, z)$ que cumple $u \cdot e = u$.

Operando, se obtiene el sistema $\begin{cases} bz - cy = a \\ -az + cx = b \\ ay - bx = c \end{cases}$

El sistema es incompatible, ello supone que no existe elemento unidad para el producto vectorial.

20 **Encuentra una base ortonormal de R^3 que contenga un vector proporcional al vector $(1, -1, 2)$.**

El módulo del vector dado $u = (1, -1, 2)$ es $|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$.

Un vector unitario y proporcional a u es $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Otro vector unitario y ortogonal al anterior es $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Otro vector unitario y ortogonal a los dos anteriores es $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Por tanto, la base buscada está formada por los vectores:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

21 Los vectores *u* y *v* son perpendiculares. Sabiendo que $|u| = 3$, $|v| = 4$, calcula:

a) $|(u + v) \cdot (u - v)|$ ***b)*** $|(3u - v) \cdot (u - 2v)|$

a) Se tiene que $(u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u + v \cdot u - u \cdot v - v \cdot v = 2u \cdot v$.

Por tanto, $|(u + v) \cdot (u - v)| = |2u \cdot v| = 2|u \cdot v| = 2|u|\,|v|\, sen\, 90° = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 24$

b) Se tiene que $(3u - v) \cdot (u - 2v) = 3u \cdot u - 6u \cdot v - v \cdot u + v \cdot 2v = -5u \cdot v$.

Por tanto, $|(3u - v) \cdot (u - 2v)| = |-5u \cdot v| = 5|u|\,|v|\, sen\, 90° = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$

22 Los vectores *u* y *v* forman un ángulo de 120°. Sabiendo que $|u| = 1$, $|v| = 2$, calcula:

a) $(u \cdot v) \cdot (u \cdot v)$

b) $[(2u + v) \cdot (u + 2v)]^2$

c) $[(u + 3v) \cdot (3v - v)]^2$

a) $(u \cdot v)\cdot(u \cdot v) = |u \cdot v|^2 = (|u|\,|v|\, sen\, 120)^2 = (1 \cdot 2 \cdot 0{,}866)^2 = 3$.

b) $[(2u + v) \cdot (v + 2v)]^2 = [2u \cdot u + 4u \cdot v + v \cdot v + v \cdot 2v]^2 = [3u \cdot v]^2 = 9\,|u \cdot v|^2 = 9\,(1 \cdot 2 \cdot 0{,}866)^2 = 27$.

c) $[(u + 3v) \cdot (2u - v)]^2\ [u \cdot 3u - u \cdot v + 3v \cdot 3u - 3v \cdot v]^2 = [-10u \cdot v]^2 = 100\,|u \cdot v|^2 = 100\,[1 \cdot 2 \cdot 0{,}866]^2 = 300$.

23 Los vectores *u, v* y *w* satisfacen la condición $u + v + w = 0$. Demuestra que $u \cdot v = v \cdot w = w \cdot u$.

Al ser $u + v + w = 0$ se cumple $w = -u - v$.

Por tanto,

$v \cdot w = v \cdot (-u - v) = -v \cdot u - v \cdot v = -v \cdot u = u \cdot v$.

$w \cdot u = (-u - v) \cdot u = -u \cdot u - v \cdot u = -v \cdot u = u \cdot v$.

24 Para los vectores $u = (2, -3, 1)$; $v = (-3, 1, 2)$ y $w = (1, 2, 3)$, calcular $(u \cdot v) \cdot w$ y $u \cdot (v \cdot w)$.

Al ser $u \cdot v = (-7, -7, -7)$, se tiene que $(u \cdot v) \cdot w = (-7, 14, -7)$.

Como $v \cdot w = (-1, 12, -7)$, por tanto $u \cdot (v \cdot w) = (9, 13, 21)$.

25 Dados los vectores $u = (1, -1, 3)$; $v = (-2, 2, 1)$, y $w = (3, -2, 5)$. Calcula $u \cdot (v \cdot w)$.

Se tiene que

$$u \cdot (v \cdot w) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -8$$

26 Encuentra un vector que sea perpendicular a $u = (3, -2, 5)$ y que dependa linealmente de $v = (1, -1, 3)$ y $w = (2, 2, 1)$.

Todos los vectores de la forma (a, b, c) que cumplen las condiciones del problema están sujetos a las siguientes condiciones:

$(a, b, c)\cdot(3, -2, 5) = 0$.

$(a, b, c) = m\,(1, -1, 3) + n\,(-2, 2, 1)$

Operando, se encuentra que todos los vectores (a, b, c) que cumplen las condiciones anteriores son de la forma $(-7, 7t, 7t)$ con $t \in R$.

Para encontrar uno de ellos basta fijar un valor del parámetro t.

27 Sean *u* y *v* dos vectores arbitrarios. Comprueba que si $(u + v)\cdot(u - v) = 0$, entonces $|u| = |v|$

Si $(u + v)\cdot(u - v) = 0 \Rightarrow u\cdot u - u\cdot v + v\cdot u - v\cdot v = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow u\cdot u - v\cdot v = 0 \Rightarrow u\cdot u - v\cdot v \Rightarrow |u|^2 = |v|^2 \Rightarrow |u| = |v|$

28 Prueba que si dos vectores tienen el mismo módulo, entonces su suma y su diferencia son vectores ortogonales.

Se tiene que,

$(u + v)\cdot(u - v) = u\cdot u - u\cdot v + v\cdot u - v\cdot v = u\cdot u - v\cdot v = |u|^2 - |v|^2$

Si $|u|^2 = |v|^2$ entonces, según el resultado anterior, $(u + v)\cdot(u - v) = 0$

29 Calcula un vector *u* que satisfaga, en cada caso, las siguientes condiciones:

***a)* Que sea proporcional al vector $v = (2, -1, 1)$ y además cumpla que $u\cdot v = 3$.**

***b)* Que sea perpendicular a los vectores $v = (2, -1, 1)$ y $w = (18, -22, -5)$ y además $|u| = 14$.**

***c)* Que sea perpendicular al eje *OZ* y cumpla $u\cdot v = 9$, $u\cdot w = -4$, siendo $v = (3, -1, 5)$ y $w = (1, 2, -3)$.**

***d)* Que cumpla $u\cdot a = -5$, $u\cdot b = 11$, $u\cdot c = 20$, siendo los vectores $a = (2, -1, 3)$, $b = (1, -3, 2)$ y $c = (3, 2, -4)$.**

a) El vector u es de la forma $u = (2k, -k, k)$ y como cumple $u\cdot v = 3$ se tiene $4k + k + k = 3$; $6k = 3$; $k = 1/2$

Por tanto, el vector u buscado es $\overline{u} = (1, -1/2, 1/2)$

b) El vector u será proporcional a $v \cdot w$ al ser perpendicular a ambos. Luego $u = k\,(v \cdot w) = (27k, 28k, -26k)$. Además cumple $|u| = 14$, lo cual conduce a $729k^2 + 784k^2 + 676k^2 = 196$. Por tanto, $k = 0{,}3$.

Por tanto, el vector u buscado es $u = (8; 8{,}4; -7{,}8)$

c) El vector $u = (a, b, c)$ debe cumplir:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 3a - b + 5c = 9 \\ a + 2b - 3c = -4 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = 2$, $b = -3$, $c = 2$.

Por tanto, el vector u buscado es $u = (2, -3, 0)$.

d) El vector $u = (a, b, c)$, debe cumplir:

$$\begin{cases} 2a - b + 3c = -5 \\ a - 3b + 2c = -11 \\ 3a + 2bb - 4c = 20 \end{cases}$$

La solución del sistema es $a = \frac{18}{5}$, $b = \frac{19}{5}$, $c = 2$

Por tanto, el vector u buscado es $u = \left(\frac{18}{5}, \frac{19}{5}, 2\right)$

30 **Los vectores $u = (1, 0, 1)$; $v = (0, 1, 1)$, y $w = (1, 2, 4)$ forman una base de R^3.**
***a)* Prueba que los conjuntos de vectores $\{u \cdot v, v, w\}$ y $\{u \cdot v, v \cdot w, w\}$ forman bases.**
***b)* Calcular el producto mixto de los vectores $u \cdot v$, $v \cdot w$ y $w \cdot u$.**

a) El conjunto de vectores $\{u \cdot v, v, w\}$ está formado por $\{(-1, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

El conjunto de vectores $\{u \cdot v, v \cdot w, w\}$ está formado por $\{(-1, -1, 1), (2, 1, -1), (1, 2, 4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

b) El producto mixto de los vectores pedidos es:

$$(u \cdot v) \cdot [(v \cdot w) \cdot (w \cdot u)] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 9$$

31 **Los vectores u y v cumplen $|u| = 10$, $|v| = 2$ y $u \cdot v = 12$. Calcula $|u \cdot v|$.**

Como $u \cdot v = 12$, el ángulo α que forman u y v es

$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = \frac{12}{10 \cdot 2}$; luego $\alpha = 53°7'48{,}37''$

Por tanto, $|u \cdot v| = |u| \cdot |v| .= \operatorname{sen} \alpha = 10 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} (53°7'\,48{,}37'')$ = 16.

32 **Dado el vector $u = (3, -4, 12)$, calcula los vectores unitarios en la dirección del vector u y los ángulos que forma el vector u con los semiejes *OX, OY, OZ*.**

Al ser $|u| = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$, los vectores de módulo
uno en la dirección de u son $(3/13, -4/13, 12/13)$ y $(-3/13, 4/13, 12/13)$.
Los ángulos que forma u con los semiejes son:

$\cos\left(\widehat{u, OX}\right) = \frac{3}{13} = 0{,}23$, luego $\left(\widehat{u, OX}\right) = 73°39'27{,}5''$.

$\cos\left(\widehat{u, OY}\right) = \frac{-4}{13} = -0{,}31$, luego $\left(\widehat{u, OY}\right) = 107°55'12{,}7''$.

$\cos\left(\widehat{u, OZ}\right) = \frac{12}{13} = -0{,}921$, luego $\left(\widehat{u, OZ}\right) = 227°37'11{,}5''$.

33 **Sean u y v dos vectores tales que $|u| = 1$, $|v| = 2$ y el ángulo que forman es de 45°. Calcula:**
***a)* $u \cdot v$ *b)* $(u + 2v) \cdot v$ *c)* $|u + v|$ *d)* $|u - v|$ *e)* El ángulo que forman $u + v$ y $u - v$.**

a) $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cos 45° = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}414$

b) $(u + 25) \cdot v = u \cdot v + 2\, v \cdot v = 1{,}414 + 2 \cdot 2^2 = 9{,}414$.

c) $|u + v| = |u|^2 + |v|^2 - 2\, |u|\, |v| \cos 135° = 1 + 4 + 2{,}828 =$
$= 7{,}828$.

d) $|u - v| = |u|^2 + |v|^2 - 2\, |u|\, |v| \cos 45° = 1 + 4 - 2{,}828 =$
$= 2{,}172$.

e) $\cos\left(\widehat{u + v, u - v}\right) = \frac{(u + v)(u - v)}{|u + v|\,|u - v|} = \frac{1 - 4}{7{,}828 \cdot 2{,}172} = \frac{-3}{17} =$
$= 0{,}176$; luego $\left(\widehat{u + v, u - v}\right) = 100°9'51{,}3''$

34 **Sean u, v, w y z dos vectores de R^3. Demuestra las igualdades siguientes:**
***a)* $(u \cdot v)^2 + (u \cdot v)^2 = u^2v^2$**
***b)* $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w$**
***c)* $(u \cdot v) \cdot (w \cdot z) = (u \cdot w)\,(v \cdot z) = (u \cdot z)\,(v \cdot w)$**
***d)* $u \cdot (v \cdot w) + v \cdot (w \cdot u) + w \cdot (u \cdot v) = 0$**

a) Sean los vectores $u = (a_1, b_1, c_1)$ y $v = (a_2, b_2, c_2)$. Calculamos por separado los dos miembros de la igualdad.
$(u \cdot v)^2 + (u \cdot v)^2 = (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2 +$
$+ (a_1b_2 - b_1a_2)^2 + (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 = a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 +$
$+ a_1^2c_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 + c_1^2a_2^2 + c_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$

$u^2v^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) =$
$= a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2c_2^2 + b_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + b_1^2c_2^2 +$
$+ c_1^2a_2^2 + c_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2$.
Se observa que ambos miembros son iguales.

b) Sean los vectores $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$ y $w = (a_3, b_3, c_3)$. Calculamos por separado los dos miembros de la igualdad.

$$u \cdot (v \cdot w) = u \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$= u \cdot [\,(b_2c_3 - c_2b_3)\bar{i} - (a_2c_3 - c_2a_3)\,\bar{j} + (a_2b_3 - b_2a_3)\bar{k}\,] =$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ b_2c_3 - c_2b_3 & -a_2c_3 + c_2a_3 & a_2b_3 - b_2a_3 \end{vmatrix} =$$

$= [b_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1(-a_2c_3 + c_2a_3)]\,\bar{i}\; +$
$+ [a_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1(-b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{j}\; +$
$+ [a_1\,(-a_2c_3 + c_2a_3) - b_1(-b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{k}$.

La otra parte de la igualdad es:
$(u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w = (a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3)\,(a_2\,\bar{i} + b_2\,\bar{j} + c_2\,\bar{k}) -$
$- (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)\,(a_3\,\bar{i} + b_3\,\bar{j} + c_3\,\bar{k}) =$
$= [b_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1\,(b_2c_3 - c_2a_3)]\,\bar{i}\; +$
$+ [a_1\,(a_2b_3 - b_2a_3) - c_1(b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{j}\; +$
$+ [a_1\,(-a_2c_3 + cc_2a_3) - b_1(-b_2c_3 - c_2b_3)]\,\bar{k}$.

Por tanto, la igualdad se cumple.

c) Consideramos $w \cdot z$ como un vector único y teniendo en cuenta la definición de producto mixto, podemos escribir:
$(u \cdot v) \cdot (w \cdot z) = u \cdot [v \cdot (w \cdot z)] = u \cdot [(v \cdot z)w - (v \cdot w)z]$, al tener presenta la igualdad del apartado b).

Operando en la última igualdad, obtenemos la identidad de Lagrange:
$(u \cdot v) \cdot (w \cdot z) = (u \cdot w)\,(v \cdot z) - (u \cdot z)\,(v \cdot w)$

d) Teniendo en cuenta la igualdad del apartado b),
$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w$, se obtiene:
$u \cdot (v \cdot w) + v \cdot (w \cdot u) + w \cdot (u \cdot v) = (u \cdot w)\, v - (u \cdot v)\, w +$
$+ (v \cdot u)\,(w \cdot v)\, u - (w \cdot u)\, v = 0$

Esta igualdad es conocida como identidad de Jacobi.

35 Si los vectores *u, v,* y *w* de R^3 forman una base del mismo, analiza si los vectores *u + v, v + w* y *w + u* también forman una base de R^3.

Los tres vectores $u + v$, $v + w$ y $w + u$ forman base, ya que son linealmente independientes al cumplir:
Si $a\,(n + v) + b\,(v + w) + c\,(w + u) = 0 \Rightarrow$
$(a + c)\, u + (a + b)\, v + (b + c)\, w = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$, ya que *u, v* y *w* son linealmente independientes.

La solución del sistema anterior es $a = 0$, $b = 0$ y $c = 0$, lo cual confirma que los vectores $u + v$, $v + w$ y $w + u$ son linealmente independientes y, por tanto, base.

36 Para los vectores *u* = (1, 0, 1) y *v* = (0, 1, 1), halla todos los vectores que sean perpendiculares a *v* y que dependan linealmente de *u* y de *v*.

Los vectores buscados, que son de la forma $mu + nv = (m, n, m + n)$, deben cumplir: $(m, n, m + n)\cdot(0, 1, 1) = 0$.
Luego $2n + m = 0$.
Todos los vectores son $(-2n, n, -n)$, con $n \in R$.

37 Sean los vectores *u* = (1, 1, 0); *v* = (1, 0, 1), y *w* (0, 1, 1). Realiza las operaciones que siguen.

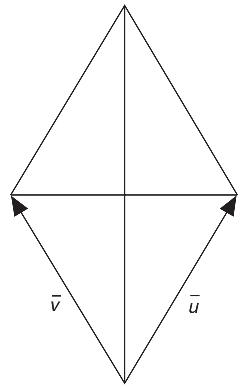
a)* (*u* · *v*) *w	***b)* (*v* · *w*) *u***
c)* (*u* · *v*) · *w	***d)* (*v* · *w*) · *u***
e)* (*u* · *v*) · *w	***f)* (*v* · *w*) · *u***

Los resultados de las operaciones son:
a) $(u \cdot v)\, w = (0, 1, 1)$
b) $(v \cdot w) = (1, 1, 0)$
c) $(u \cdot v) \cdot w = -2$
d) $(v \cdot w) \cdot u = -2$
e) $(u \cdot v) \cdot w = (0, -1, 1)$
f) $(v \cdot w) \cdot u = (-1, 1, 0)$

38 Sean *a, b* y *c* tres números reales cualesquiera. Prueba que los vectores (1, *a, b*), (0, 1, *c*) y (0, 0, 1) son linealmente independientes.

Son linealmente independientes, ya que el rango de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es tres, al ser } \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

39 Prueba, haciendo uso de los vectores, que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.



Las dos diagonales del rombo son los vectores $\overline{u} + \overline{v}$ y $\overline{u} - \overline{v}$.
Para probar que son perpendiculares, hay que probar que los vectores $\overline{u} + \overline{v}$ y $\overline{u} - \overline{v}$ son ortogonales, es decir, su producto escalar es cero.
Tenemos que, $(\overline{u} + \overline{v}) \cdot (\overline{u} - \overline{v}) = \overline{u} \cdot \overline{u} - \overline{u} \cdot \overline{v} + \overline{v} \cdot \overline{u} - \overline{v} \cdot \overline{v} =$
$= \overline{u} \cdot \overline{u} - \overline{v} \cdot \overline{v} = |\overline{u}|^2 - |\overline{v}|^2 = 0$
El producto escalar es cero, al ser los lados del rombo iguales.

40 Razona que si los vectores *u, v,* y *w* del espacio R^3 son perpendiculares dos a dos, el producto escalar (*u* + *v*) · (*w* + *v*) no puede ser negativo.

El producto escalar $(u + v) \cdot (w{+}v)$ vale:
$(u + v)\cdot(w + v) = u\cdot w = u\cdot w + u\cdot v + v\cdot w + v\cdot v = v\cdot v = |v|^2$
El resultado no puede ser negativo de manera obvia.

41 Calcula algún valor del parámetro *t* para que el producto vectorial (1, 2, *t*) x (1, *t*, 0) tenga la dirección del eje *OZ*.

Se tiene que: $(1, 2t) \cdot (1, t, 0) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} =$
$= -t^2\overline{i} + t\overline{j} + (t - 2)\overline{k}$

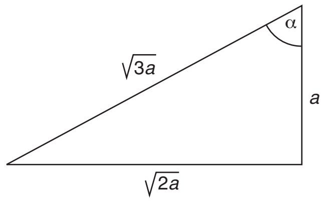
Para que dicho vector tenga la dirección del eje *OZ*, debe ser $t = 0$.

42 Si *u, v* y *w* son tres vectores no nulos del espacio R^3 que satisfacen la igualdad de productos escalares *u* · *v* = = *u* · *w*, ¿se puede deducir que es *v* = *w*? ¿Por qué?

Sean los vectores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ y $w\ (1, 0, 1)$. Se tiene que: $u \cdot v = 2$ y $u \cdot w = 2$ y claramente v y w son distintos.

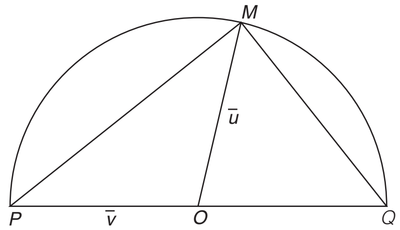
43 Calcula el ángulo que forman la diagonal de un cubo con uno cualquiera de sus lados o aristas.

En un cubo de arista a la diagonal y la arista forman el triángulo rectángulo del dibujo adjunto.



el ángulo α cumple que $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{3}a}$, luego α = 54°44' 8,2".

44 Prueba, haciendo uso de los vectores, que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.



Sea M un punto cualquiera de la semicircunferencia, P y Q los extremos del diámetro, 0 el centro, $\bar{u}$ el vector $\overline{OM}$ y $\bar{v}$ el vector $\overline{OP}$. Para que el ángulo inscrito sea recto tiene que cumplirse que el producto escalar $\overline{PM} \cdot \overline{MQ}$ tiene que ser 0.
Se tiene que:
$\overline{PM} \cdot \overline{MQ} = (-v + u) \cdot (-u - v) = v \cdot u + v \cdot v - u \cdot u - u \cdot v =$
$= |v|^2 - |u|^2 = 0.$
ya que los módulos de los vectores u y v coinciden con el radio de la circunferencia.

45 Prueba que los vectores *u* y *v* son perpendiculares si y sólo si se verifica que $|u + v| = |u - v|$.

Sean los vectores $u = (a_1, b_1, c_1)$ y $v = (a_3, b_2, c_2)$. Los vectores suma y diferencia son $u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ y $u - v = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$.
Los módulos de ambos vectores son:

$$|u - v| = \sqrt{(a_1 = a_2)^2 + (b_1 = b_2)^2 + (c_1 = c_2)^2} =$$
$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 = 2a_1a_2 = 2b_1b_2 = 2c_1c_2}$$

$$|u - v| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2} =$$
$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 - 2c_1c_2}$$

Los módulos anteriores son iguales si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, que es la condición de ortogonalidad de los vectores u y v.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

46 ¿Para qué valores de *a* el conjunto de vectores (1, 1, 1), (1, *a*, 1) y (1, 1, *a*) es una base de R^3?

Sean los valores de a que hagan el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \text{ distinto de cero.}$$

El determinante anterior vale $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$, es distinto de cero para cualquier valor diferente de uno.

47 Los módulos de tres vectores *u, v* y *w* son 3, 4 y 7, respectivamente. ¿Cómo han de ser los vectores para que se cumpla *u* + *v* + *w* = 0?

Los tres vectores deben tener la misma dirección y el módulo de uno debe ser la suma de los módulos de los otros dos.

48 Dados los vectores *u* = (2, 0, 0), *v* = (0, 1 –3) y *w* = *au* + + *bv*, ¿qué relación deben satisfacer *a* y *b* para que el módulo de *w* sea la unidad?

El vector $w = au + bv$ es $w = (2a, b, -3b)$ y para que el módulo de w sea la unidad, debe cumplirse: $4a^2 + 10b^2 = 1$.

49 Halla el vector perpendicular a *u* = (2, 3, 4) y *v* = (–1, 3, –5), y que sea unitario.

Un vector perpendicular a u y v debe ser proporcional al producto vectorial de u y v. Es decir, este vector es de la forma $(27k, 6k, 9k)$.
Para que sea unitario debe cumplirse que $(27k)^2 + (6k)^2 + (9k)^2 = 1$, luego

$$846\,k^2 = 1,\ k^2 = \frac{1}{846},\ k = \sqrt{\frac{1}{846}} = 0{,}03$$

El vector buscado es (0,81; 0,18; 0,27).

50 Calcula los valores *x* e *y* para que el vector (*x*, *y*, 1) sea ortogonal a los vectores (3, 2, 0) y (2, 1, –1).

$$\text{Debe cumplirse} \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

La solución es $x = 2$, $y = -3$

51 Dados los vectores *u* = (3, 1, –1) y *v* = (2, 3, 4), halla:
a) Los módulos de *u* y *v*.
b) El producto vectorial de *u* y *v*.
c) Un vector ortogonal a *u* y *v*.
d) El área del paralelogramo que tiene por los lados los vectores *u* y *v*.

a) $|u| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11} = 3{,}32$
$|v| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} = 5{,}39$

b) $u \cdot v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 14\bar{j} + 7\bar{k}$

c) Cualquier vector proporcional al vector obtenido en el producto vectorial.
d) El área del paralelogramo es el módulo del vector producto vectorial. Por tanto,
$|u \cdot v| = \sqrt{49 + 196 + 49} = \sqrt{294} = 17{,}15$
unidades cuadradas.

52 ¿Puede ser el módulo de la suma de dos vectores de módulos 10 y 5 mayor que 15? ¿Y menor que 4?

El módulo de la suma de dos vectores es menor o igual que la suma de los módulos de dichos vectores. Por tanto, el módulo de la suma de dos vectores de módulos 10 y 5 no puede superar a 15.
Por una propiedad análoga para la diferencia de módulos, los módulos de los vectores propuestos no pueden tener una suma menor que cuatro.

53 Siendo *u* y *v* dos vectores cualesquiera del espacio, prueba que $(u - v) \cdot (u + v) = 2u \cdot v$.

Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial, se obtiene:

$(u - v) \cdot (u + v) = u \cdot (u + v) - v \cdot (u + v) =$
$= u \cdot u + u \cdot v - v \cdot u - v \cdot v = u \cdot v - v \cdot u =$
$= u \cdot v + u \cdot v = 2u \cdot v$

54 Sean *u, v* y *w* tres vectores linealmente independientes. Indica cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen cero:

$$[u + w, u - w, u + v + w], [u + w, v, u + v]$$
$$\text{y } [u - w, v - w, w - u]$$

En cada uno de estos casos, ha de razonarse la contestación.

• $[u + w, u - w, u + v + w] = [u, u, u] + [u, u, v] + [u, u, w] + [u, -w, u] + [u, -w, v] + [u, -w, w] + [w, u, u] + [w, u, v] + [w, u, w] + [w, -w, u] + [w, -w, v] + [w, -w, w] =$
$= -[u, w, v] + [w, u, v] = 0$

• $[u + w, v, u + v] = [u, v, u] + [u, v, v] + [w, v, u] + [w, v, v] =$
$= [w, v, u] = 0$

• $[u - w, v - w, w - u] = [u, v, w] - [u, v, u] - [w, v, w] -$
$- [w, v, u] - [u, w, w] + [u, w, u] + [w, w, w] - [w, w, u] = 0$

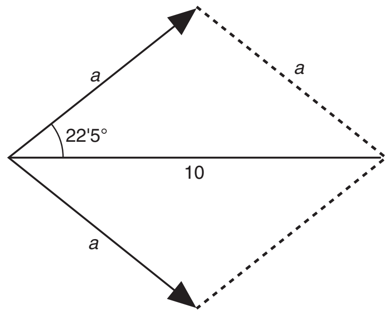
55 Dos vectores *u* y *v* son tales que $|u| = 10$, $|v| = 10\sqrt{3}$, y $|u + v| = 20$. Hallar el ángulo que forman los vectores *u* y *v*.

Se tiene que:

$|u + v| = |u|^2 + |v|^2 - 2\,|u|\,|v|\,cos\,(\widehat{u, v})$, luego

$$cos\,(\widehat{u, v}) = \frac{|u|^2 + |v|^2 - |u + v|}{2\,|u|\,|v|} = \frac{100 + 300 - 20}{2 \cdot 10 \cdot 10\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{280}{346{,}4} = 0{,}808. \text{ Por tanto, } (\widehat{u, v}) = 36°4'14{,}77''$$

56 Un vector de módulo 10 se descompone en suma de otros dos de módulos iguales y que forman un ángulo de 45°. Halla el módulo de cada uno de los vectores sumandos.



Por el teorema del coseno,
$10^2 = a^2 + a^2 - 2aa\,cos\,135°$
Operando: $3{,}414a^2 = 100$, luego $a = 5{,}41$.

57 ¿Puede haber dos vectores *u* y *v* tales que $u \cdot v = -3$, $|u| = 1$, $|v| = 2$? ¿Qué se puede decir del ángulo de dos vectores que verifican $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$? Justifica las respuestas.

No puede ocurrir que $|u| = 1$, $|v| = 2$ y $u \cdot v = -3$, ya que $|u \cdot v| = |u| \cdot |v| \cdot cos\,(\widehat{u, v})$ y entonces $cos\,(\widehat{u, v}) = 1{,}5$.

En la otra cuestión, al verificar $|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$, el coseno del ángulo que forman vale 1 y, por tanto, el ángulo es 0° o 180°.

58 Dada la base formada por los vectores:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right); \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right); \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

comprueba si es ortogonal u ortonormal.

Los tres vectores son unitarios.
La base no es ortogonal ni ortonormal, ya que, por ejemplo, se cumple que:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \neq 0$$

59 Dados los vectores $u = (3, -1, 1)$ y $v = (2, -3, 1)$, halla el producto $u \cdot v$ y comprueba que este vector es ortogonal a *u* y *v*. Comprueba el vector $v \cdot u$ y compáralo con $u \cdot v$.

El producto $u \cdot v$ es

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - \bar{j} - 7\bar{k}$$

Comprobamos que $u \cdot v$ es ortogonal a *u* y a *v*:
$u \cdot (u \cdot v) = (3, -1, 1) \cdot (2, -1, -7) = 0$
$v \cdot (u \cdot v) = (2, -3, 1) \cdot (2, -1, -7) = 0$

El vector $v \cdot u$ es:

$$u \cdot v = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - \bar{j} + 7\bar{k}$$

Los vectores $u \cdot v$ y $v \cdot u$ son opuestos.

60 **Sea $b = \{u, v, w\}$ una base tal que $|u| = 2$, $|v| = 3$, $|w| = 1$ y $u \cdot v = 4$, $u \cdot w = 3$, $v \cdot w = 3$, calcula el valor de m para que los vectores $x = 11u + mv + 3w$ e $y = u + 2v + w$ sean ortogonales.**

Calculamos el producto escalar x · y. Obtenemos:

$x \cdot y = (11u + mv + 3w) \cdot (u + 2v + w) = 11u \cdot u + 22u \cdot v + 11u \cdot w + mv \cdot v + 2mv \cdot v + mv \cdot w + 3w \cdot u + 6w \cdot v + 3w \cdot w = 11 \cdot 4 + 22 \cdot 4 + 11 \cdot 3 + 4m + 2m \cdot 9 + 3m + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 25m + 195$

Como x e y deben ser ortogonales $25m + 195 = 0$, luego $m = -7{,}8$.

Resolución de problemas

1. LENTEJAS Y GARBANZOS. En un puesto del mercado tienen 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente lleva una cierta cantidad de garbanzos, después otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los pesos de los sacos diferentes son 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿cuánto pesa el saco de lentejas?

Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 kg.
Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedando sólo el caso de lentejas, entonces al quitar a 119 kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119 - 20 = 99.$$

Un cliente lleva 33 kg en los sacos de 18 kg y 15 kg y el otro cliente se lleva 66 kg en los sacos de 19 kg, 31 kg, 16 kg.
El saco de lentejas es el que pese 20 kg.

2. TRES CARTAS. De una baraja española de 40 cartas extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas son tales que verifican las condiciones siguientes: a la derecha del caballo hay 1 ó 2 sotas; a la izquierda de la sota hay 1 ó 2 sotas; a la izquierda de un oro hay una o dos copas; y a la derecha de una copa hay una o dos copas. ¿De qué 3 cartas se trata?

El caballo y las sotas las señalamos con *C S S*.
Para que verifiquen las condiciones han de ser:

$$C_c\ S_o\ S_c$$

Por tanto, las cartas son:
- Caballo de copas.
- Sota de oros.
- Sota de copas.

3. PRIMAS. Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde, y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2.450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja. Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

Descomponiendo 2.450 en factores, obtenemos:

$$2.450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50
7	14	25	46	23
7	10	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades.
La edad de Luisa es de 32 años.
Luisa sabe la edad de Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

BLOQUE TEMÁTICO II:
GEOMETRÍA

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Puntos, rectas y planos en el espacio

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Identificar los elementos que permiten determinar una recta en el plano y en el espacio.
2. Identificar los elementos que permiten determinar un plano en el espacio.
3. Conocer e interpretar las diversas formas que adoptan las ecuaciones de las rectas y los planos en el espacio.
4. Resolver problemas de incidencia entre puntos, rectas y planos en el espacio.
5. Aplicar los conceptos de álgebra lineal a los problemas de incidencia y paralelismo entre elementos del espacio.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Puede orientarse su desarrollo poniendo el énfasis en una metodología heurística, haciendo primar los procedimientos y técnicas.
Buscaremos reforzar el razonamiento inductivo a través de la experimentación de situaciones concretas. No debe olvidarse fomentar el razonamiento deductivo mediante la aplicación de conceptos y propiedades, así como de las relaciones entre estas últimas.
Debe buscarse entre las experiencias del alumno sus conocimientos de la geometría en el plano desarrollada en los cursos precedentes.

Actividades iniciales

1. Dada la recta del plano de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.

La recta $2x - 6y + 3 = 0$ pasa por el punto (0, 1/2) y un vector direccional es $\overline{v} = (3, 1)$. Por tanto, las ecuaciones pedidas son:

• Ecuación continua $\frac{x}{3} = \frac{y - 1/2}{1}$

• Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3t \\ y = t - 1/2 \end{cases}$, $t \in R$

• Ecuación vectorial $(x, y) = (0, 1/2) + t\,(3, 1)$, con $t \in R$

• Ecuación explícita $y = 1/3\, x + 1/2$

2. Calcula el valor de a en la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$, para que:
***a)* Pase por el punto (3, 1).**
***b)* Tenga de pendiente –1.**
***c)* Uno de sus vectores directores sea v = (6, –4).**

a) $a = 2$ *b)* $a = 3$ *c)* $a = 2$

3. Estudiar la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x - 6y = -9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x = 2y = 6 \end{cases}$

a) Las rectas se cortan en el punto (2, 1).
b) Las rectas son paralelas.
c) Las rectas son coincidentes.

4. Estudia la posición relativa, según los valores de *a*, de los pares de rectas:

a) $\begin{cases} ax + i = a^2 \\ x + a^2y = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + ay = ax \\ 3x + ay = ay \end{cases}$

a) Si $a = 1$, las rectas son coincidentes.
Si $a \neq 1$, las rectas se cortan en el punto

$$\left(\frac{(a+1)\,(a^2+1)}{a^2 + \text{a} + 1}, -\frac{a}{a^2 + a + 1}\right)$$

b) Si $a = 0$, las rectas son coincidentes.
Si $a \neq 0$, las rectas se cortan en el (0, 0).

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto *P* (1, 2, 3) y tiene como vector direcciona al vector $\overline{v} = (6, 5, 4)$. Obtén seis puntos que pertenecen a dicha recta.

Las distintas expresiones de la recta buscada son:

• Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ con $t \in R$

• Ecuación continua: $\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 2}{5} = \frac{z - 3}{4}$

• Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} 5x - 6y = -7 \\ 4x - 5z = -7 \end{cases}$

En la ecuación paramétrica pueden obtenerse los puntos dando valores a t. Así,

• $t = 0$ $P_0 = (1, 2, 3)$
• $t = 1$ $P_1 = (7, 7, 7)$
• $t = 2$ $P_2 = (13, 12, 11)$
• $t = -1$ $P_4 = (-5, -3, -1)$
• $t = -2$ $P_5 = (-11, -8, -5)$
• $t = 3$ $P_6 = (19, 17, 15)$

2 Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos *P* (1, 1, 0) y *Q* (1, 0, 1).

La recta viene determinada por el punto P (1, 1, 0) y el vector $\overline{v} = \overline{PQ} = (0, -1, 1)$.
Las ecuaciones de la citada recta son:

• Paramétricas

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t, \quad t \in R \\ z = t \end{cases}$

• Continuas

$\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{1}$

3 Estudia si los puntos *A* (3, –4, 2), *B* (1, 2, 3) y *C* (–1, 4, 6) están alineados.

La recta determinada por los puntos A y B tiene por ecuación:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 3}{-1}$$

Al sustituir las coordenadas del punto C en la recta anterior, se tiene:

$$\frac{-1 - 1}{2} \neq \frac{4 - 2}{-6} \neq \frac{6 - 3}{-1}$$

Por tanto, los puntos no están alineados.

4 Una recta pasa por el punto (3, 1, 2) y es paralela al vector $\overline{v} = (1, -2, 3)$. Comprueba si los puntos (4, –1, 5), (2, 3, –1), (6, 7, 4), (0, 1, 3) y (6, –5, 11) pertenecen a la recta anterior.

La ecuación continua de la recta es

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 2}{3}$$

El punto (4, –1, 5) pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{4-3}{1}=\frac{-1-1}{-2}=\frac{5-2}{3}$$

El punto (2, 3, –1) pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{2-3}{1}=\frac{3-1}{-2}=\frac{-1-2}{3}$$

El punto (6, 7, 4) no pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{6-3}{1}\neq\frac{7-1}{-2}\neq\frac{4-2}{3}$$

El punto (0, 1, 3) no pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{0-3}{1}\neq\frac{1-1}{-2}\neq\frac{3-2}{3}$$

El punto (6, –5, 11) pertenece a la recta al cumplirse:

$$\frac{6-3}{1}=\frac{-5-1}{-2}=\frac{11-2}{3}$$

5 Expresa cada una de las rectas siguientes de todas las formas que conozcas:

a) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{x-4}{3}$ ***b)*** $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$

a) Ecuación paramétrica $\begin{cases} x=2+t \\ y=2-t \quad ,\ t\in R \\ z=4+3t \end{cases}$

Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} x+y=4 \\ 3x-z=2 \end{cases}$

b) Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=-2+2t\ ,\ t\in R \\ z=t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{1}$

c) Ecuación continua: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$

Ecuación como intersección de dos planos: $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-z=1 \end{cases}$

6 Determina *m* y *n*, sabiendo que los tres puntos (1, 2, 0), (2, 3, 1) y (*m*, 1, *n*) están alineados.

La recta determinada por los puntos (1, 2, 0) y (2, 3, 1) tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$$

Para que (*m*, 1, *n*) esté alineado con los otros dos puntos, debe cumplirse:

$$\frac{m-1}{1}=\frac{1-2}{1}=\frac{n}{1}\text{; por tanto, } m=0 \text{ y } n=-1$$

7 Halla las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices *A* (1, 1, 1), *B* (3, 5, 7) y *C* (0, 3, 0).

La mediana correspondiente al vértice *A* pasa por *A* (1, 1, 1) y *A′* (3/2, 4, 7/2), y su ecuación es:

$$\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5/2}$$

La mediana correspondiente al vértice *B* pasa por *B* (3, 5, 7) y *B′* (1/2, 2, 1/2), y su ecuación es:

$$\frac{x-3}{-5/2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-7}{-13/2}$$

La mediana correspondiente al vértice *C* pasa por *C* (0, 3, 0) y *C′* (2, 3, 4), y su ecuación es:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{4}$$

8 Dados los puntos (1, 3, –2) y (2, 3, 5), halla *m* y *n* para que el punto (*m* +1, 3, *n*) esté alineado con los otros dos.

La recta determinada por los puntos (1, 3, –2) y (2, 3, 5) tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{7}$$

Para que el punto (*m* + 1, 3, *n*) pertenezca a la recta anterior, debe cumplirse:

$$\frac{m+1-1}{1}=\frac{3-3}{0}=\frac{n+2}{7}$$

Por tanto, la relación entre *m* y *n* debe ser $7m-n=2$.

9 Halla la ecuación de los planos, en todas las formas que conozcas, determinados por las condiciones:
a) **Plano que pasa por el punto *P* (2, –3, 5) y tiene como vectores direccionales a $\overline{u}$ = (1, 1, 2) y $\overline{v}$ = (3, –2, 1).**
b) **Plano que pasa por los puntos *P* (3, –1, 0) y *Q* (1, –1, 3) y contiene el vector $\overline{v}$ = (1, 2, 3).**
c) **Plano que pasa por los puntos *A* (1, 2, 3), *B* (–1, 0, 2) y *C* (2, –1, 0).**

a) La ecuación es:

$$0=\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=x+y-z+6$$

b) El plano viene determinado por el punto *P* (3, –1, 0) y los vectores $\overline{u}=\overline{PQ}$ = (–2, 0, 3) y $\overline{v}$ = (1, 2, 3). Su ecuación es:

$$0=\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ -z & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6x-9y+4z-27$$

c) El plano viene determinado por el punto A (1, 2, 3) y los vectores $\overline{u} = \overline{AB} = (-2, -2, -1)$ y $\overline{v} = \overline{AC} = (1, -3, -3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 3x - 7y + 8z - 13$$

10 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto *P* (2, –4, 0) y contiene a la recta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

El haz de planos cuya arista es la recta dada tiene por expresión:

$$(x + y - 4) + \lambda\,(3x - z - 2) = 0$$

Haciendo que el haz incida en el punto (2, –4, 0) se obtiene $\lambda = 3/2$. Sustituyendo este valor en el haz, obtenemos el plano buscado de ecuación $11x + 2y - 3z - 14 = 0$.

11 Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r: \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 3z = 4 \end{cases}$$

El plano viene determinado por un punto de una de las rectas, por ejemplo, P (–1, –2, 0) de la recta r, y por los vectores direccionales de ambas rectas que son: $\overline{u} = (5, 2, 1)$ y $\overline{v} = (8, -7, -5)$.
La ecuación del plano es:

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & -7 & -5 \end{vmatrix} x - 11y + 17z - 21$$

12 Halla las ecuaciones de los ejes coordenados y de los planos coordenados del sistema de referencia ortonormal *OXYZ*.

Los planos coordenados tienen por ecuaciones las que siguen:
- *OXY*, $z = 0$
- *OXZ*, $y = 0$
- *OYZ*, $x = 0$

Las ecuaciones de los ejes coordenados son:

- *OX*, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- *OY*, $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- *OZ*, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

13 Halla la ecuación del plano que corta a los ejes coordenados en puntos situados a distancia *d* del origen. Hallar el valor de *d* para que el plano sea $x + y + z - 7 = 0$.

Los puntos de los ejes coordenados situados a una distancia d del origen son:

$$(d, 0, 0), (0, d, 0) \text{ y } (0, 0, d)$$

El plano que pasa por los puntos anteriores tiene por ecuación:

$$0 = \begin{vmatrix} x-d & y & z \\ -d & d & 0 \\ -d & 0 & d \end{vmatrix} = x + y + z - d = 0$$

Por tanto, será $d = 7$ para que el plano anterior coincida con $x + y + z - 7 = 0$.

14 Escribe las ecuaciones paramétricas del plano $3x - y + 2z = 10$.

Pueden ser: $\begin{cases} x = t \\ y = -10 + 3t + 2s \\ z = s \end{cases}$, con t y $s \in R$

15 Escribe la ecuación implícita o general del plano: $x = 3 - t, y = 2 + s, z = t + s$.

La ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x - y + z - 1$$

16 Prueba que $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 3y + 7z = 6 \end{cases}$ y $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$ representan la misma recta.

Ambas rectas poseen vectores proporcionales y el punto (3, -1, 0) pertenece a la primera recta.

17 Sean las rectas $r: \frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{0}$ y

$$s: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Halla la ecuación de un plano que pasa por *A* (–1, –1, 0) y es paralelo a las dos rectas. Halla la intersección de dicho plano con los ejes coordenados.

El plano viene determinado por el punto A (–1, –1, 0) y los vectores directores de las rectas que son $\overline{u} = (-5, 2, 0)$ y $\overline{v} = (-1, 4, 7)$, y su ecuación es

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ -5 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 14x + 35y - 18z + 49$$

18 **Dados los puntos A (1, 0, 2), B (0, 1, 3), C (–1, 2, 0) y D (2, –1, 3), halla la ecuación del plano π que contiene a la recta que pasa por AB y es paralelo a la recta que pasa por CD.**

El plano viene determinado por el punto A (1, 0, 2) y los vectores $\overline{u} = \overline{AB} = (-1, 1, 1)$ y $\overline{v} = \overline{CD} = (3, -3, 3)$. Su ecuación es

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = x + y - 1$$

19 **Determina la posición relativa al plano $3x - 2x + z = 3$ y la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{1}$**

Se cortan en el punto (5/2, 1, –5/2).

20 **Estudia la posición relativa de los planos, para cada uno de los siguientes casos:**

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 1 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 7x + 8y - z = 0 \\ x - y = -4 \\ 2x + 3y - 5z = -1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$

a) Se cortan en la recta $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x = 1 \end{cases}$

b) Se cortan tres a tres en puntos.

c) Se cortan en el origen.

21 **Determina la posición relativa de las rectas r: $x = -y = -z$ y s: $z = 2$, $y = x + 2$.**

Las rectas se cruzan.

22 **Averigua para qué valor de m la recta**

r: $\begin{cases} x + 2y + z = m \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$

se corta con la recta s: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-4}{5}$

Para el valor de $m = \dfrac{25}{4}$, las rectas se cortan en el punto $x = 3/2$, $y = -1/4$, $z = 21/4$.

23 **Estudia si las rectas**

r: $\begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$

se cortan, son paralelas o se cruzan. Halla el plano que contiene a s y es paralelo a r.

Las rectas se cruzan.

El plano que contiene a s y es paralelo a r viene determinado por el punto (–1, 1, 1) y los vectores direccionales de las rectas $\overline{u} = (-1, 0, 2)$ y $\overline{v} = (2, -2, 3)$. Su ecuación es:

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & x-1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4x + 7y - 2z - 5$$

24 **Determina m para que las rectas**

r: $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$

estén situadas en un mismo plano. Halla la ecuación de este plano.

Para que ambas rectas estén en un mismo plano, el rango de la matriz ampliada del sistema

$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$ debe ser 3

Por tanto, será nulo el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \end{vmatrix} = 4m + 16$$

Luego $m = -4$.

El plano viene determinado por el punto (1, 2, 0) de r y los vectores direccionales de r y s: $\overline{u} = (2, 1, 1)$ y $\overline{v}$ (4, -1, -3). Su ecuación es

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = x - 5y + 3z + 9$$

25 **Determina m y n para que los planos de ecuaciones**

$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 3 \\ 3x - y - mz = n \end{cases}$ **se corten en una recta.**

Halla también la ecuación del plano que contiene a la recta anterior y pasa por el punto P (2, 1, 3).

Para que los planos se corten en una recta, los determinantes que siguen deben ser nulos.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -m \end{vmatrix} = m + 1 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & n \end{vmatrix} = -n + 4$$

Por tanto, $m = -1$ y $n = 4$.

El haz de planos de arista de la recta anterior tiene por expresión:

$$(2x - y + z - 3) + \lambda\,(x - y + z - 2) = 0$$

Haciendo que el haz incida con el punto (2, 1, 3), se obtiene $\lambda = -3/2$.

Para este valor de λ, se obtiene el plano de ecuación $x + y - z = 0$.

26 **Dadas las rectas** $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x - 5z = 4 \\ y - 4z = -3 \end{cases}$

a) **Deduce si se cortan, son paralelas o se cruzan.**

b) **Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen y corta a las rectas dadas.**

a) Las rectas se cortan.

b) La recta que se apoya en r y s es la recta que pasa por dos puntos genéricos $P(-1 + t, 2 - 3t, t)$ de r y $Q(4 + 5s, -3 + 4s, s)$ de s.

La recta determinada por P y Q tiene de ecuación:

$$\frac{x - (-1 + t)}{(4 + 5s) - (-1 + t)} = \frac{y - (2 - 3t)}{(-3 + 4s) - (2 - 3t)} = \frac{z - t}{s - t}$$

Al hacer que la recta incida con el origen (0, 0, 0), se obtienen los valores $t = 0$, $s = 0$.

Con estos valores se obtiene la recta

$$\frac{x + 1}{5} = \frac{y - 2}{-5} = \frac{z}{0}$$

27 **Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de $x + y + z = 3$ con los ejes OX y OY. Determina el plano que pasa por los puntos de corte del plano anterior con los ejes coordenados.**

Los puntos de corte de $x + y + z = 3$ con los ejes OX y OY son los puntos (3, 0, 0) y (0, 3, 0).

La recta que pasa por los puntos anteriores es:

$$\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}$$

Los puntos de corte de $x + y + z = 3$ con los ejes coordenados son los puntos (3, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 3).

El plano que pasa por los puntos anteriores es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = x + y + z - 3$$

28 **Sean $A(1, -5, a)$, $B(3, a, -1)$ y $C(a, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Determina el valor de a para que el triángulo sea rectángulo en el vértice C.**

Debe cumplirse que los vectores $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son perpendiculares. Es decir, el producto escalar de ambos debe ser nulo.

$$\overrightarrow{CA} = (1 - a, 0, a - 2), \quad \overline{CB} = (3 - a, a + 5, -3)$$

De $\overline{CA} \cdot \overline{CB}$ se obtiene $a^2 - 7a + 9 = 0$.

Las soluciones de la ecuación son:

$$a = \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{y} \quad a = \frac{7 - \sqrt{13}}{2}$$

29 **Dados los puntos $A(1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$, comprueba:**

a) **Que no está alineado y halla la ecuación del plano que determinan.**

b) **Que el plano obtenido en el apartado a) y el formado por los puntos $D(3, 0, 0)$, $E(0, 6, 0)$ y $F(0, 0, 3)$ son paralelos.**

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$$

El punto C no pertenece a dicha recta, al cumplirse

$$\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{2} \neq \frac{1}{0}$$

La ecuación del plano que determinan A, B y C es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x + y + 2z - 2 = 0$$

b) El plano determinado por los puntos D, E y F tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18x + 9y + 18z - 54 = 0$$

Los planos $2x + y + 2z - 2 = 0$ y $2x + y + 2z - 6 = 0$ son paralelos.

30 **Justifica que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, -1)$, $C(5, 2, 1)$ y $D(4, 3, 3)$ son los vértices consecutivos de un paralelogramo y obtén la ecuación del plano que los contiene. Razona si es o no rectángulo.**

Los puntos A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo al cumplirse:

$$\overline{AB} = (1, -1, -1) \text{ y } \overline{DC} = (1, -1, -2);$$

$$\overline{AD} = (3, 2, 2) \text{ y } \overline{BC} = (3, 2, 2).$$

No es un rectángulo, ya que $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 3 - 2 - 4 = -3 \neq 0$.

La ecuación del plano que contiene a los puntos es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2x - 8y + 5z + 1 = 0$$

31 **Halla la ecuación del plano que contiene la recta**

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 4}{3}$$

y es paralelo a la recta $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z}{1}$

El plano viene determinado por el punto (2, 2, 4) de la primera recta y por los vectores $\overline{u} = (1, -1, 3)$ y $\overline{v} = (3, 2, 1)$.

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7x - 8y - 5z + 22 = 0$

32 **Calcula razonadamente el valor de *a* para que los siguientes cuatro puntos estén en un mismo plano del espacio: (*a*, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 2, 3) y (7, 2, 1). Calcula también, de una manera razonada, la ecuación del plano que los contiene.**

El plano determinado por los puntos (0, 1, 2), (1, 2, 3), (7, 2, 1) tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Para que el punto (a, 0, 1) esté en el plano anterior debe cumplirse que $a - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0$, es decir, $a = -1$.

33 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –1, 2) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 2, 1) y (2, –1, 0). Exprésala como intersección de dos planos.**

La ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 4z - 5 = 0$$

La recta está determinada por el punto (1, –1, 2) y el vector normal al plano $\overline{v} = (2, -2, 4)$. La ecuación de la recta es

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{4}$$

Expresada como intersección de dos planos: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$

34 **Halla la ecuación del plano que contiene la recta de ecuaciones**

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

y es paralela a la recta que pasa por los puntos (2, 0, 0) y (0, 1, 0).

El plano viene determinado por el punto (1, 1, 0) y los vectores direccionales de ambas rectas $\overline{u} = (2, 2, 1)$ y $\overline{v}$ (-2, 1, 0).

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ z & z & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x + 2y - 6z - 3 = 0$

35 **Dado el plano π: $2x - 3y + z = 0$ y la recta**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2},$$

halla la ecuación del plano que contiene la recta *r* y es perpendicular al plano π.

El plano viene determinado por el punto de la recta (1, 2, –1), el vector direccional de la recta $\overline{u} = (1, -1, 2)$ y el normal al plano $\overline{v} = (2, -3, 1)$.

Su ecuación es $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5x + 3y - z - 12 = 0$

36 **Dados los puntos:**
***A* (1, 0, 1), *B* (1, 1, 0), *C* (0, 1, 1) y *D* (*p*, *q*, *r*):**
***a)* ¿Qué relación deben cumplir *p*, *q* y *r* para que los puntos *A*, *B* y *D* estén alineados?**
***b)* ¿Qué relación deben cumplir *p*, *q* y *r* para que los puntos *A*, *B*, *C* y *D* sean coplanarios?**

a) La recta que pasa por los puntos A y B tiene de ecuación:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

Si el punto D (p, q, r) debe estar en la recta anterior, se cumplirá

$$\frac{p-1}{0} = \frac{q}{-1} = \frac{r-1}{-1}, \text{ es decir, } p = 1 \text{ y } q - r = -1$$

b) El plano determinado por los puntos A, B y C tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x + y + z - 2 = 0$$

Si el punto D (p, q, r) debe estar en el plano, se cumplirá

$$p + q + r - 2 = 0$$

37 **Determina *m* y *n* para que los planos $6x - my + 4z + 9 = 0$ y $9x - 3y + nz - n = 0$ sean paralelos.**

El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -m & 4 \\ 9 & -3 & n \end{pmatrix}$ debe ser dos. Por tanto,

- $\begin{vmatrix} 6 & -m \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 9m = 0, \quad m = 2$
- $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & n \end{vmatrix} = 6n - 36 = 0, \quad n = 6$

38 **Estudia la posición relativa de los planos, en cada uno de los casos siguientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = -7 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 7x + 8y - 7z = -13 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x + y - z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x = 2y + 2z = 4 \end{cases}$

a) La matriz de los coeficientes tiene rango dos, y la matriz ampliada tiene rango dos. Por tanto, los tres planos se cortan en la misma recta.

b) El rango de la matriz de los coeficientes es dos y el de la ampliado es tres. Por tanto, los tres planos se cortan dos a dos.
c) El rango de la matriz de los coeficientes es tres y, por tanto, los tres planos se cortan en el punto (0, 5, 7).

39 **Estudia la posición relativa de los cuatro planos del espacio:**

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ nx - 2y + z = -3 \end{cases}$$

- Si $n \neq -2$, los planos dos a dos se cortan en dos rectas que se cruzan.
- Si $n = -2$ y $m \neq -1/2$, los planos se cortan en un punto.
- Si $n = -2$ y $m = -1/2$, los planos se cortan dos a dos en dos rectas que son paralelas.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

40 **Consideremos la recta *r*, el plano π y el punto *P*, siendo:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{5}$$

$$\pi: 2x - y + 3z = 1; \quad P\,(1, 0, 4)$$

Obtén una recta *s* paralela a *r* que pase por el punto *P*. Calcula el punto de intersección de π y *s*.

La ecuación de la recta *s* es: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{5}$

La intersección de *s* con el plano π es el punto

$$\left(-\frac{5}{8}, -\frac{39}{16}, -\frac{1}{16}\right)$$

41 **Halla las ecuaciones de la recta paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 0$ y que pasa por el punto (2, 0, 0).**

El vector direccional de la recta $\bar{v} = (a, b, c)$ debe ser perpendicular a los vectores normales de los planos. Por tanto,

$$\begin{cases} (a, b, c)\cdot(1, 1, 0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \\ (a, b, c)\cdot(1, 0, 1) = 0 \Rightarrow a + c = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene el vector $\bar{v} = (a, b, c) = (a, -a, -a) = a\,(1, -1, -1)$.

La ecuación de la recta es: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$

42 **Halla las ecuaciones de la recta que es paralela a la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y pasa por el punto (4, 5, 6).**

La recta viene determinada por el punto (4, 5, 6) y el vector $\bar{v} = (1, 3, 1)$, y su ecuación es: $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-6}{1}$

43 **Dos vértices consecutivos de un rectángulo lo constituyen los puntos *P* (1, 1, 3) y *Q* (–1, 0, 0) y los otros dos vértices pertenecen a la recta *r* que pasa por el punto *C* (4, 3, –5). Se pide:**
***a)* Halla la ecuación de la recta *r* y el plano π que contiene el rectángulo.**
***b)* Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.**

a) La recta *r* viene determinada por el punto *C* (4, 3, -5) y por el vector $\bar{v} = \overline{QP} = (+2, 1, 3)$, y su ecuación es:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3}$$

b) Los otros vértices del rectángulo son los puntos

$$\left(\frac{44}{7}, \frac{29}{7}, -\frac{11}{7}\right) \text{ y } (0, 1, -11)$$

44 **Dado un tetraedro *ABCD* de vértices *A* (1, 2, 0), *B* (2, 6, 0), *C* (5, 3, 0) y *D* (3, 4, 3):**
***a)* Comprueba que los puntos medios de las aristas *AB, BC, CD* y *CA* están en un mismo plano, y halla su ecuación.**
***b)* El plano obtenido es paralelo a las otras dos aristas *CB* y *AD*.**

a) La ecuación del plano que pasa por los puntos medios (3/2, 4, 0), (5/2, 5, 3/2), (4, 7/2, 3/2) y (3, 5/2, 0) es $2x + 2y - 4z - 11 = 0$.

b) La arista *CB* tiene por ecuación: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{0}$

La otra arista *AD* tiene por ecuación: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$

El plano del apartado a) es paralelo a las rectas anteriores, ya que se cumple:

$$(2, 2, -4)\cdot(3, -3, 0) = 6 + (-6) + 0 = 0$$
$$(2, 2, -4)\cdot(2, 2, 3) = 6 + 6 + (-12) = 0$$

45 **Siendo *r* la recta determinada por las ecuaciones**

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

y el plano π definido por $2x + y + mz = n$, determina *m* y *n*, de modo que:
***a)* *r* corte a π.**
***b)* *r* y π sean paralelos.**
***c)* *r* esté contenida en π.**

a) La recta *r* corta al plano π si $m \neq -32/7$.
b) La recta y el plano son paralelos si $m = -32/7$ y $n \neq 9/7$.
c) La recta está contenida en el plano si $m = -32/7$ y $n = 9/7$.

46 **Halla la ecuación del plano que pasa por (0, 0, 1) y contiene a la recta *r*: $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$**

El haz de planos de arista *r* tiene por ecuación:

$$(5x - 3y + 2y - 5) + \lambda\,(2x - y - z - 1) = 0$$

Si el haz incide con el punto (0, 0, 1), se cumple:

$$2 - 5 + \lambda\,(-1 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -3/2$$

Para este valor $\lambda = -3/2$, el plano buscado es:

$$4x - 3y + 7z - 7 = 0$$

47 **Divide el segmento de extremos *A* (1, 2, 1), *B* (–1, 0, 3) en tres partes iguales mediante dos planos α y β perpendiculares a la recta determinada por los puntos *A* y *B*. Da las ecuaciones de dichos planos.**

Los puntos *P* y *Q* que dividen al segmento *AB* en tres partes iguales tienen por coordenadas: *P* (1/3, 4/3, 5/3) y *Q* (–1/3, 2/3, 7/3).
Los planos α y β pasan, respectivamente, por *P* y *Q*, y tienen como vector normal el vector $\overline{AB} = (-2, -2, 2)$.

La ecuación del plano α es:

$$(-2, -2, 2) \cdot (x - 1/3,\ y - 4/3,\ z - 5/3) = 0$$

Operando, $x + y - z = 0$

La ecuación del plano β es:

$$(-2, -2, 2) \cdot (x + 1/3,\ y - 2/3,\ z - 7/3) = 0$$

Operando, $3x + 3y - 3z + 4 = 0$

48 **Estudia la posición relativa de las rectas**

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 2 \end{cases}.$$

Las rectas se cruzan en el espacio al ser rango de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ es cuatro}$$

49 **Estudia, según los valores del parámetro *m*, la posición relativa de las rectas:**
$$r: \{x - 2z = 1,\ y - z = 2\} \text{ y } s: \{x + y + z = 1,\ z - 2y + 2z = m\}$$

Si $m = -4$, las rectas se cortan en el punto $x = 0$, $y = 3/2$, $z = -1/2$.
Si $m \neq -4$ las rectas se cruzan en el espacio.

50 **Estudia, para los diferentes valores de *m*, la posición relativa de los planos:**

$$a) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ mx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$$

a) Si $m \neq -2$, se cortan en un punto.
Si $m = 2$, se cortan dos a dos.

b) Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, se cortan en un punto.
Si $m = 0$, dos planos son paralelos y el otro corta a los anteriores.
Si $m = 1$, se cortan dos a dos.

c) Si $m \neq 7$, se cortan en un punto.
Si $m \neq 7$, se cortan en una recta.

51 **Prueba que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera (en el espacio) son siempre los vértices de un paralelogramo.**

Sean $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, $P_3\,(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4\,(x_4, y_4, z_4)$, cuatro puntos cualesquiera del espacio. Los puntos medios de los lados del cuadrilátero formado por P_1, P_2, P_3 y P_4 tienen por coordenadas:

$$M_1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$M_2 = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right)$$

$$M_3 = \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \frac{z_3 + z_4}{2}\right)$$

$$M_4 = \left(\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2}, \frac{z_4 + z_1}{2}\right)$$

Los vértices M_1, M_2, M_3 y M_4 forman un paralelogramo, ya que los vectores $\overline{M_1 M_2}$, y $\overline{M_4 M_3}$ son iguales; de igual forma que $\overline{M_4 M_1}$ y $\overline{M_2 M_3}$.

Los vectores anteriores tienen por coordenadas:

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{M_4 M_3} = \left(\frac{x_3 - x_1}{2}, \frac{y_3 - y_1}{2}, \frac{z_3 - z_1}{2}\right)$$

$$\overline{M_4 M_1} = \overline{M_2 M_3} = \left(\frac{x_4 - x_2}{2}, \frac{y_4 - y_2}{2}, \frac{z_4 - z_2}{2}\right)$$

Resolución de problemas

1. SUMAS. Razona si es o no cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{999 \cdot 1001} = 0,\widehat{498501}$$

El término general de la sucesión formada por los sumandos es $\dfrac{1}{(2n - 1)\,(2n + 1)}$. Descomponiendo éste en fracciones simples, obtenemos:

$$\frac{1}{(2n - 1)\,(2n + 1)} = \frac{1/2}{2n - 1} + \frac{-1/2}{2n + 1}$$

Aplicando esta igualdad a cada uno de los sumandos, obtenemos:

$$\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5}$$

$$\frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1/2}{5} + \frac{-1/2}{7}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\frac{1}{997\cdot 999} = \frac{1/2}{997} + \frac{-1/2}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 1001} = \frac{1/2}{999} + \frac{-1/2}{1001}$$

Sumando todas estas igualdades, obtenemos:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{999\cdot 1001} = \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{1001} =$$

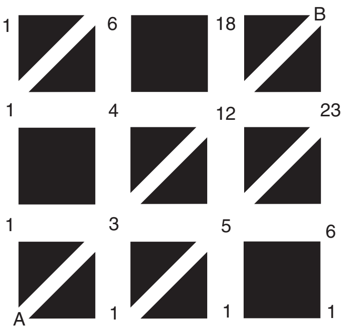
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2002} = \frac{1000}{2002} = \frac{500}{1001} = 0,\overparen{499500}$$

Fácilmente se comprueba la igualdad sin más que poner el número decimal periódico puro dado en forma de fracción:

$$0,\overparen{499500} = \frac{499500}{999999} = \frac{500\cdot 27\cdot 37}{1001\cdot 27\cdot 37} = \frac{500}{1001}$$

Por tanto, la igualdad que plantea el problema es verdadera.

2. PLANO DE CIUDAD. La figura representa el plano de una ciudad. ¿De cuántas formas se puede ir desde A hasta B de manera que nunca retrocedamos?



Solamente consideremos los caminos en vertical hacia arriba que denotamos como V, en diagonal hacia arriba que denotamos con D y en horizontan hacia la derecha que denotamos con H.
En la figura tenemos señalados el número de caminos que hay desde A a cada esquina. Fácilmente se llegan a encontrar esos números sin más que ir trazando caminos, así en el cruce que hay un 3 se llega a él desde A por tres caminos V – – D – H; en el cruce que hay 5 = 3 + 1 + 1 se llega a él por cinco caminos: HHV – HD – DH – VH – HVH.
Observamos que el número que nos aparece en cada cruce es suma de los de las dos esquinas contiguas si el cuadrado es cerrado y de las tres esquinas si el cuadrado es abierto.

3. TRAMA TRIANGULAR. Resuelve el problema análogo al que figura en la página anterior, considerando que en este caso los triángulos equiláteros que debes contar son lo que tienen el vértice hacia abajo.

Procediendo de forma análoga a la del problema de la página anterior, obtenemos:

	N.º triángulos de lado 1	N.º triángulos de lado 2	N.º triángulos de lado 3	N.º triángulos de lado 4	N.º triángulos de lado 5	TOTAL
Trama n= 2	1					1
Trama n= 3	3					3
Trama n= 4	6	1				7
Trama n= 5	10	3				13
Trama n= 6	15	6	1			22
Trama n= 7	21	10	3			34
Trama n= 8	28	15	6	1		50

Observamos que aparecen dos sucesiones según sea n = par o n = impar.
• Si n = par, obtenemos la sucesión:
1, 7, 22, 50, 95, 161, ...

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{n\cdot(n+2)\cdot(2n-1)}{24}$$

• Si n es impar obtenemos la sucesión:
3, 13, 34, 70, 125, ...

Es una progresión aritmética o sucesión aritmética de orden 3 y su término general vale:

$$\frac{(n-1)\,(n+1)\,(2n+3)}{24}$$

Por tanto, el número de triángulos equiláteros con el vértice hacia abajo que podemos contar en una trama triangular de n-unidades de lado es:

$$\begin{cases} \dfrac{n\,(n+2)\,(2n-1)}{24} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{(n-1)\,(n+1)\,(2n+3)}{24} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

• En una trama de lado n hay:

I. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + \ldots = \binom{n}{n-2}$ triángulos de lado 1 con $n \geq 2$

II. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots = \binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 2 con $n \leq 4$.

III. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots = \binom{n-2}{n-4}$ triángulos de lado 3 con $n \geq 6$.

Así sucesivamente.

En general es $\binom{n+2-2k}{n-2k}$ con $k = 1, 2, \ldots n$

k = n.º unidades de lado.

4. PRIMOS. Demuestra que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre un número múltiplo de 24.

Hemos de demostrar que $p^2 - q^2 = 24$ siendo p, q números primos mayores que 3.
Para demostrarlo, veamos primeramente que si p es un número primo mayor que 3, entonces $p^2 - 1 = 24$.

$p^2 - 1 = (p - 1)\,(p + 1)$

Los números están colocados:

$$\begin{array}{ccc} p-1 & p & p+1 \\ & \downarrow & \\ & \text{primo} & \end{array}$$

Como p es primo $\Rightarrow p - 1$ y $p + 1$ son múltiplos de 2 y uno de ellos también es múltiplo de 4 pues en tres números consecutivos mayores que 3 con los extremos pares a la fuerza uno de estos extremos es múltiplo de 4. También $(p - 1)$ o $(p + 1)$ han de ser múltiplos de 3, puesto que son tres números consecutivos. Por, tanto se cumple que $p^2 - 1 = \dot{2} \cdot \dot{4} \cdot \dot{3} = \dot{24}$. Además como $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) \Rightarrow p^2 - q^2 = \dot{24} - \dot{24} = \dot{24}$. Por tanto, se cumple que la diferencia de cuadrados de dos números primos mayores que 3 es siempre múltiplo de 24.

5. TABLERO DE AJEDREZ. ¿Cuántos rectángulos de lados desiguales hay en un tablero de ajedrez?

Comenzamos particularizando con tableros de diferentes tamaños:

Tipo de tablero	TIPOS DE RECTANGULOS										TOTAL
	1 x 1	1 x 2	1 x 3	1 x 4	2 x 2	2 x 3	2 x 4	3 x 3	3 x 4	4 x 4	
1 x 1	1										1
2 x 2	4	4			1						9
3 x 3	9	12	6		4	4		1			36
4 x 4	16	24	16	8	9	12	6	4	4	1	100
5 x 5	25	40	30	20	16	24	16	9	12	4	225

Observamos la sucesión del número total de rectángulos (incluidos como tales los cuadrados):

1, 9, 36, 100, 225, 441, ...

$1^2, 3^2, 6^2, 10^2, 15^2, 21^2, \ldots$

En un tablero 8 x 8, que es un tablero de ajedrez, hay $36^2 =$ = 1.296 rectángulos.

Si nos quedamos sólo con los no cuadrados, habría 1.296 – – 204 cuadrados = 1.092 rectángulos no cuadrados en un tablero 8 · 8.

BLOQUE TEMÁTICO II:
GEOMETRÍA

UNIDAD DIDÁCTICA 6

Problemas métricos en el espacio

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Determinar las ecuaciones de rectas y planos a través de condiciones métricas dadas.
2. Calcular los ángulos que forman las rectas y planos en el espacio.
3. Resolver problemas sencillos de distancias entre los elementos del espacio.
4. Aplicar los productos escalar, vectorial y mixto entre vectores a problemas métricos en el espacio.
5. Analizar y sistematizar los conocimientos espaciales.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Deben buscarse entre las experiencias del alumno sus conocimientos de la geometría en el plano desarrollada en los cursos precedentes.
Puede orientarse su desarrollo, poniendo el énfasis en una metodología heurística, haciendo primar los procedimientos y técnicas.
Buscaremos reforzar el razonamiento inductivo a través de la experimentación de situaciones concretas. No debe olvidarse el razonamiento deductivo mediante la aplicación de conceptos y propiedades, así como de las relaciones entre estas últimas.

RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES

Actividades iniciales

1. Determina las ecuaciones de las rectas del plano perpendicular y paralela a la recta de ecuación $4x - 3y + 6 = 0$ y que pasan por el punto (2, 1).

La recta $4x - 3y + 6 = 0$ tiene de pendiente $m = 4/3$. Luego, las rectas pedidas son:

- paralela $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 4x - 3y - 5 = 0$
- perpendicular $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0$

2. Halla la distancia del punto P (2, –3) a la recta de ecuación $3x - 4y - 3 = 0$.

La distancia viene dada por la expresión:

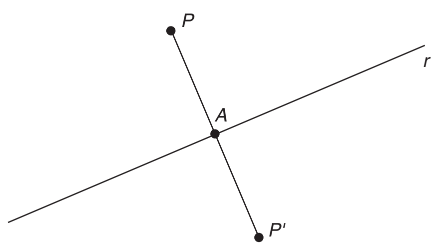
$$d(P, r) = \frac{|3(2) + (-4)(-3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

3. Hallar la distancia entre las rectas paralelas r: $2x + 3y - 5 = 0$ y s: $2x + 3y + 8 = 0$.

Calculamos la distancia del punto (1,1) de la recta r, a la recta s.

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} = 3{,}61.$$

4. Halla el punto simétrico de P (3, 2) respecto de la recta $2x + y - 3 = 0$.



Calculamos el punto A como intersección de la recta dada y la perpendicular a ésta que pasa por P.
Las coordenadas del punto A son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}. \text{ Luego } A\ (1, 1)$$

El punto P' (x', y') simétrico de P tiene por coordenadas:
$x' = -1$, $y' = 0$.

5. Halla el área del cuadrado dos de cuyos lados están en las rectas $4x - y + 5 = 0$ y $8x - 2y + 12 = 0$.

Las rectas son paralelas y la longitud del lado del cuadrado coincide con la distancia entre ambas rectas.
Esta distancia la calculamos como la distancia del punto (–1, 1) de la recta $4x - y + 5 = 0$ a la otra recta $8x - 2y + 12 = 0$.
La distancia es

$$d(P, s) = \frac{|8(-1) - 2(1) + 12|}{\sqrt{8^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{68}} = 0{,}24$$

El área del cuadrado es 0,06 unidades cuadradas.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1} \text{ y } \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

Los vectores direccionales son $\bar{u} = (2, -2, -1)$ y $\bar{v} = (-1, 3, -2)$.
El ángulo que forman es:

$$\cos \widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} = \frac{-6}{\sqrt{9}\,\sqrt{14}} = -0{,}535;$$

luego $\widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = 122°18'41{,}4''$

2 Calcula el ángulo formado por el plano $x - y + z = 0$ y la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$$

El vector normal del plano es $\bar{u} = (1, -1, 1)$ y el direccional de la recta $\bar{v} = (2, -1, 3)$. El ángulo que forman el plano y la recta es:

$$\operatorname{sen} \widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} = \frac{6}{\sqrt{3}\,\sqrt{14}} = 0{,}926;$$

$\widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = 67°47'32{,}44''$

3 Calcula el ángulo que forman los planos $x + y - 2z = 3y - x + y + 2z = 2$.

Los vectores normales de los planos son $\bar{u} = (1, 1, -2)$ y $\bar{v} = (-1, 1, 2)$. El ángulo que forman es:

$$\operatorname{sen} \widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} = \frac{-4}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} = 0{,}667;$$

$\widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = 131°48\ 37{,}1''$

4 Halla la distancia del punto (4, 5, 6) al plano $x - 2y + 3z = 5$.

La distancia es $d = \dfrac{|4 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{14}} = 1{,}871$

5 Halla la distancia entre el punto (3, 2, 7) y la recta diagonal del primer octante del espacio.

La distancia es:

$$d = \frac{|(3, 2, 7) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|(-5, 4, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{3}} = 3,74$$

6 **Halla la distancia entre las rectas**

$$r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

La expresión de las rectas en forma continua es:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}$$

La distancia

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|(1, 0, 1) \cdot (2, -1, 1)|} = \frac{7}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = 4,04$$

7 **Encuentra en la recta que pasa por los puntos *A* (–1, 0, 1) y *B* (1, 2, 3) un punto tal que su distancia al punto *C* (2, –1, 1) sea de tres unidades.**

Un punto genérico de la recta que pasa por A y B tiene por expresión:

$$(1 + 2t, 2t, 1 + 2t)$$

La distancia de este punto al punto C es 3, por tanto:

$$\sqrt{(2t-1)^2 + (2t+1)^2 + (2t)^2} = 3$$

Operando, se obtiene $t = \pm 0,764$.
Estos valores de t dan los puntos: (2,53; 1,53; 2,53) y (–0,53; –1,53; –0,53).

8 **Calcula la distancia del punto (–2, 4, 3) a la recta**

$$\begin{cases} x = 2x + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$$

La recta en forma continua puede expresarse:

$$\frac{x - 1/2}{2} = \frac{y-4}{-2/3} = \frac{z}{1}$$

La distancia buscada es:

$$d = \frac{|(5/12, 0, -3) \cdot (2, -2/3, 1)|}{|(2, -2/3, 1)|} = \frac{\sqrt{4 + 72,25 + 2,78}}{\sqrt{4 + 0,444 + 1}} =$$

$$= \frac{8,9}{2,3} = 3,814$$

9 **Halla la ecuación del plano π que pasa por los puntos (1, 1, 1), (3, –2, 2) y es perpendicular al plano $2x - y - z = 0$, y las ecuaciones de la recta *r* que pasa por el punto (1, 1, 1) y es perpendicular al plano π. Determinar los puntos de r cuya distancia a π sea $\sqrt{3}$.**

El plano pedido viene determinado por el punto (1, 1, 1) y los vectores $\bar{u} = (2, -3, 1)$ y $\bar{v} = (2, -1, -1)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x + y + z - 3 = 0$$

La recta r viene determinada por el punto (1, 1, 1) y el vector $\bar{u} = (1, 1, 1)$, su ecuación en forma continua es:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Un punto cualquiera de r es de la forma $(1 + t, 1 + t, 1 + t)$. Su distancia al plano π al ser $\sqrt{3}$ cumple:

$$\frac{|(1+t) + (1+t) + (1+t) - 3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}$$

Operando, se obtiene $t = 1$ y el punto buscado es el (2, 2, 2).

10 **Dada la recta *r* de ecuaciones**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases} \quad \text{y el punto} \quad P\ (1, 2, -1)$$

a) **Halla la ecuación del plano que contiene a *P* y es perpendicular a la recta *r*.**
b) **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.**

La recta r expresada en forma continua es

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

a) La ecuación del plano es $(x - 1, y - 2, z + 1) \cdot (1, 1, 2) = 0$. Operando se obtiene $x + y + 2z - 1 = 0$.
b) Los vértices del triángulo son:

$A\ (1, 0, 0)$, $B\ (0, 1, 0)$ y $C\ (0, 0, 1/2)$.

El área de dicho triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}|(-1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1/2)| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0,612 \text{ unidades cuadradas.}$$

11 **Un triángulo tiene dos vértices en los puntos (0, 0, 0), (1, 1, 1) y el tercer vértice está situado en la recta**

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$$

Halla las coordenadas de este vértice sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$.

El tercer vértice tiene de coordenadas $(2t, t, 1)$. El área del triángulo de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B\ (1, 1, 1)$ y $C\ (2t, t, 1)$ es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}|(1, 1, 1) \cdot (2t, t, 1)| -$$

$$- \frac{1}{2}|(1 - t, 2t - 1, -t)| = \frac{1}{2}\sqrt{(1-t)^2 + (2t-1)^2 + (-t)^2}$$

Como el área vale $\sqrt{2}/2$, se obtiene $t = 0$ y $t = 1$. Estos valores nos posibilitan dos soluciones: (0, 0, 1) y (2, 1, 1).

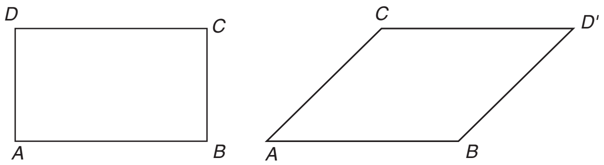
12 **Tres vértices de un paralelogramo en el espacio son los puntos *A* (1, 0, 1), *B* (–1, 1, 1) y *C* (2, –1, 2).**

a) Halla el punto *D* que complete el paralelogramo. ¿Hay uno o varios?

b) Calcula el área del paralelogramo hallado anteriormente.

a) Pueden ocurrir dos casos como se observa en el dibujo.

I) II)



I. En este caso, $\overline{AB} = \overline{DC}$ y el punto *D* tiene por coordenadas (4, –2, 2).

II. En este caso, $\overline{AB} = \overline{CD'}$ y el punto *D*' tiene por coordenadas (0, 0, 2).

b) El área del paralelogramo es:

$$\text{Área} = \left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \left|(-2, 1, 0) \cdot (1, -1, 1)\right| = \left|(1, 2, 1)\right| = \sqrt{6} = 2{,}45$$

13 **El plano –2*x* + 5*y* – z + 10 = 0 corta los ejes *OX, OY* y *OZ* en tres puntos *A, B* y *C*, respectivamente. Estos puntos determinan, junto al origen de coordenadas *O*, un tetraedro. Obtén el área de dicho tetraedro.**

Los puntos *A, B* y *C* son:

A (5, 0, 0), *B* (0, –2, 0) y *C* (0, 0, 5)

El área del tetraedro es la suma de las áreas de los triángulos siguientes:

$$\text{Área }(ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-5, 2, 0) \text{ x } (-5, 0, 5)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{825} = 14{,}36.$$

$$\text{Área }(ABO) = \frac{1}{2}\left|\overline{OB} \cdot \overline{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|(5, 0, 0) \cdot (0, -2, 0)\right| = \frac{1}{2}\, 10 = 5$$

$$\text{Área }(ACO) = \frac{1}{2}\left|\overline{OA} \cdot \overline{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|(5, 0, 0) \cdot (0, 0, 5)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\, 25 = 12{,}5$$

$$\text{Área }(BCO) = \frac{1}{2}\left|\overline{OB} \cdot \overline{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|(5, -2, 0) \cdot (0, 0, 5)\right| = \frac{1}{2}\, 10 = 5$$

Por tanto, el área del tetraedro es: 14,36 + 5 + 12,5 + 5 = = 36,86.

14 **Sean los puntos *P* (3, 1, 5) y *Q* (–1, 7, 3). Por el punto medio del segmento *PQ* trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos *A, B* y *C*. Se pide:**

a) La ecuación del plano π.

b) El área del triángulo *ABC*.

a) El plano π pasa por el punto *M* (1, 4, 4) y su vector normal es $\overline{PQ}$= (–4, 6, –2), su ecuación es –4 (*x* – 1) + 6 (*y* – 4) + (–2) (*z* – 4) = 0, es decir, 2*x* – 3*y* +*z* + 6 = 0.

b) Las coordenadas de los puntos *A, B* y *C* son:

A (–3, 0, 0), *B* (0, 2, 0) y *C* (0, 0, –6).

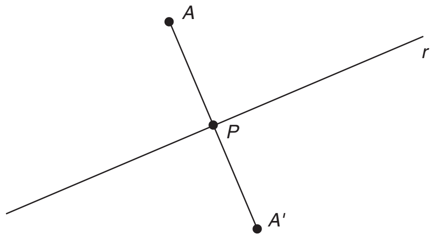
El área del triángulo *ABC* es:

$$\text{Área } \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(3, 2, 0) \cdot (3, 0, -6)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{504} = 11{,}225$$

15 **Halla el punto simétrico del punto *A* (1, –3, 7) respecto de la recta:**

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{2}$$

El punto *P* pertenece a la recta *r* y es tal que el vector $\overline{AP}$ y el director de la recta son perpendiculares.



Para la determinación del punto *P*, procedemos así:

- Tomamos un punto *P* (1 + t, -3 + t, 4 + 2t) genérico de la recta *r*.
- Formamos el vector $\overline{AP}$= (*t*, *t*, 2*t* – 3).
- Este vector y $\overline{u}$ = (1, 1, 2) son perpendiculares, por tanto

$$\overline{AP} \cdot \overline{u} = 0 \Rightarrow t + t + 4t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

El valor *t* = 1 conduce al punto *P* (2, –2, 6).

Determinamos *A'* considerando que *P* es el punto medio del segmento *AA'*. Obtenemos *A'* (3, –1, 5).

16 **Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el triángulo de vértices *A, B* y *C*, siendo:**

***A*: El simétrico del punto *P* (1, 2, 3) respecto al plano de ecuación *x* = *z*.**

***B*: La proyección ortogonal del punto *Q* (2, 1, 3) sobre el plano *z* = 0.**

***C*: El origen de coordenadas.**

Las coordenadas de los puntos *A, B* y *C* son:

A (3, 2, 1), *B* (2, 1, 0) y *C* (0, 0, 0).

El área del triángulo es:

$$\text{Área }(ABC)\ \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-1, -1, -1) \text{ x } (-3, -2, -1)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{6} = 1{,}225$$

17 **Halla la recta perpendicular común a las rectas de ecuaciones:**

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \text{ y } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

Consideramos los puntos genéricos *P* (2*t* + 1, *t* – 3, *t* + 1) y *Q* (5 + 2, –3*s* + 1, *s* + 1) de cada una de las rectas del enunciado.

Formamos el vector $\overline{PQ} = (2t - s - 1, t + 35 - 4, t - s)$. Este vector debe ser perpendicular a los vectores direccionales $\overline{u} = (2, 1, 1)$ y $\overline{v} = (1, -3, 1)$ de ambas rectas.
Por tanto,
$\overline{PQ} \cdot \overline{u} = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0$
$\overline{PQ} \cdot \overline{v} = 0 \Rightarrow 11s + 11 = 0$
Obtenemos $t = 1$, $s = -1$, que nos ha proporcionado los puntos $P\ (3, -2, 2)$ y $Q\ (1, 4, 0)$.
La perpendicular común es la recta determinada por P y Q; ésta tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z}{2}$$

18 **De todos los planos que contiene a la recta**

$$\boldsymbol{r\colon \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-2}}$$

determina aquel que forma al cortarse con los semiejes coordenados positivos un triángulo equilátero. Calcula el área del triángulo.

El haz de planos que contiene a la recta r tiene por ecuación $(x - y + 2) + m\,(2x + z - 4) = 0$
Esta ecuación puede ponerse en la forma
$(1 + 2m)\,x - y + mz + (2 - 4m) + 0$
Los puntos de corte de este haz con los semiejes positivos son:

$$A\left(\frac{4m-2}{2m+1}, 0, 0\right), \quad B\,(0, 2-4m, 0) \ \text{ y } \ C\left(0, 0, \frac{4m-2}{m}\right)$$

El único valor de m que hace que el triángulo ABC sea equilátero es $m = -1$. Para este valor, $m = -1$, los vértices del triángulo son:
$A\ (6, 0, 0)$, $B\ (0, 6, 0)$ y $C\ (0, 0, 6)$.
El área de dicho triángulo es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-6, 6, 0) \cdot (-6, 0, 6)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3888} = 31{,}177$$

19 **Dados los planos**

$$\boldsymbol{\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}}$$

a) **Analiza su posición relativa.**
b) **Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta de intersección de los dos primeros planos.**
c) **Halla la proyección ortogonal del origen sobre el plano $\boldsymbol{x + 2y - z = 1}$.**

a) El rango de la matriz de los coeficientes es dos y el de la matriz ampliada es tres, por tanto, los planos se cortan dos a dos.

b) La recta $r\colon \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ = expresada en forma continua es

$$\frac{x + 1/3}{1} = \frac{y - 2/3}{1} = \frac{z}{3}$$

Procediendo como en la actividad número 15, se obtiene el punto de coordenadas $(14/11, -8/11, -2/11)$ como el simétrico del origen respecto a la recta en cuestión.

c) La proyección ortogonal del origen sobre el plano $x + 2y - z = 1$, es el punto de intersección entre el plano $x + 2y - z = 1$ y la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano anterior.
La ecuación de la recta citada es

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$$

La proyección ortogonal es la solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

El punto buscado es $(1/6, 1/3, -1/6)$.

20 **Sea π el plano de ecuación $\boldsymbol{x + 2y + 3z = 5}$.**
a) **Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π y cuya distancia al origen sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?**
b) **Calcula el punto *P* del plano π que está más próximo al origen.**
c) **Sea *Q* el punto (1, 1, 1). Se sabe que los segmentos *OP* y *OQ* son dos lados de un paralelogramo. Halla los vértices y el área de dicho paralelogramo.**

a) Los planos buscados son $x + 2y + 3z = 3$ y $z + 2y + 3z = -3$.
b) El punto buscado es $P\ (0, 0, 5/3)$.
c) Los vértices del paralelogramo son los puntos $O\ (0, 0, 0)$, $P\ (0, 0, 5/3)$, $Q\ (1, 1, 1)$ y $R\ (-2/3, -2/3, 1)$.
El área del paralelogramo es

$$\text{Área } (OPQR) = \left|\overline{OP} \cdot \overline{OQ}\right| = 2{,}358$$

21 **Dados los puntos (1, 2, 3) y (1, 2, 1), ¿cuál es el conjunto de puntos que está a igual distancia de ambos?**

El plano que pasa por el punto medio, $(1, 2, 2)$, del segmento cuyos extremos son los puntos dados y tiene como vector normal $(0, 0, 2)$.
Su ecuación es $(x - 1)\cdot 0 + (y - 2)\cdot 0 + (z - 2)\cdot 2 = 0$,
luego $z = 2$.

22 **Sea la recta *r*:**

$$\boldsymbol{\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = 3 \end{cases}}$$

Halla los puntos de esta recta tales que su distancia al origen de coordenadas es $\boldsymbol{\sqrt{14}}$.

Sea $P\ (3, 2t, t)$ un punto genérico de la recta r.
Desarrollando la condición $d\,(P, 0) = \sqrt{14}$, obtenemos:

$$\sqrt{3^2 + 4t^2 + t^2} = \sqrt{14} \Rightarrow 5t^2 = 5 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = 1 \text{ o } t = -1$$

Para $t = 1$ se obtiene el punto (3, 2, 1) y por $t = -1$ se obtiene (3, –2, –1).

23 **Si los puntos *P* (2, 1, 2) y *Q* (6, 1, 4) son los vértices opuestos de un cuadrado, se pide:**
***a)* Calcula el área del cuadrado.**
***b)* Obtén la ecuación del plano que pasa por el centro del cuadrado y es perpendicular a la diagonal que pasa por los vértices *P* y *Q*.**

a) La diagonal d del cuadrado mide $d = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4} = \sqrt{20}$

Con este valor de la diagonal, el lado mide $l = \sqrt{10}$ y, por tanto, el área del cuadrado es 10.

b) El plano pedido pasa por el punto (3, 1, 3) y tiene como vector normal (4, 0, 2). Su ecuación es:

$$4(x-3) + 0\cdot(y-1) + 1(z-3) = 0 \Rightarrow 2x + z = 9$$

24 **Halla las proyecciones siguientes:**
***a)* Del punto *P* (4, –2, 1) respecto del plano $3x - 2y - 2z = -2$.**
***b)* Del punto *P* (4, –2, 1) respecto a la recta**

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{-1}$$

***c)* De la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ sobre el plano $x + 2y + z = 1$**

a) Es la solución del sistema $\begin{cases} 2x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + 3y = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

Por tanto, el punto buscado es $\left(\frac{20}{17}, -\frac{2}{17}, \frac{49}{17}\right)$

b) Sea $Q\,(3t + 1, 5t + 1, -t + 7)$ un punto genérico de la recta. El punto *Q* proyección de *P* debe cumplir: $\overrightarrow{OP} \cdot (3, 5, -1) = 0$. Por tanto, $35t = 0 \Rightarrow t = 0$. el punto buscado es (1, 1, 7).

c) Proyectamos los puntos *P* (2, 0, –1) y *Q* (5, 1, –2) sobre el plano $x + 2y + z = 1$ y obtenemos los puntos *P'* (2, 0, –1) y $Q\left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

La recta que pasa por los puntos *P* y *Q* es:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{7}$$

25 **Encuentra los puntos situados a distancia 5 del origen y pertenecientes a la recta que pasa por los puntos (1, 2, 5) y (6, 5, 6).**

La recta que pasa por los puntos (1, 2, 5) y (6, 5, 6) tiene por

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$$

El punto P $(5t + 1, 3t + 2, t + 5)$ pertenece a la recta anterior. Los puntos a distancia 5 del origen cumplen de $(P, 0) = 5$. Desarrollando $\sqrt{(5t+1)^2 + (3t+2)^2 + (t+5)^2}$, obtenemos $t = -0{,}14$ y $t = -0{,}78$. Para $t = -0{,}14$ obtenemos el punto (0,3; 1,58; 4,86) y para $t = -{,}078$ se obtiene el punto (–2,9; 0,34; 4,22).

26 **Halla la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano que contiene a las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$$

La ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s* es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + 2y - 5 = 0$$

La distancia del origen al plano $x + 2y - 5 = 0$ viene dada por la expresión

$$(0, \pi) = \frac{|0 + 2\cdot 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = 2{,}34$$

27 **Sobre las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{0}$ se encuentran los lados de un cuadrado. Si uno de los vértices es el origen de coordenadas, calcula:**
***a)* El área del cuadrado.**
***b)* Las ecuaciones de los lados que se cortan en el origen.**

a) El origen de coordenadas pertenece a la recta *r*. La longitud del lado del cuadrado es la distancia del origen a la recta *s*. El punto de la recta s de mínima distancia con el origen es $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$

El lado del cuadrado es $\sqrt{5}$ y, por tanto, su área es 5.

b) Las rectas que se cortan en el origen tienen por ecuaciones:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0} \text{ y } s': \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

28 **Dado el plano de ecuación $2x + 2y + z = 3$ y el punto *A* (1, 0, 2), sea *B* el pie de la perpendicular de *A* a dicho plano y *C* (2, 1, –2) un punto del plano. Se pide el área del triángulo *ABC*.**

Las coordenadas del punto *B* son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

Por tanto, los vértices del triángulo son los puntos

$$A\ (1,0,2),\ B\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right) \text{ y } C\ (2, 1, -2)$$

El área del triángulo es:

$$\text{Área }(ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{-2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right) \text{x } (1, 1, -4)\right| = 0{,}79$$

29 **Un cubo tiene uno de sus vértices en el punto P (1, 1, 1) y una de sus caras está situada en el plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0} \text{ y } s: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{0}$$

Halla el volumen del cubo.

La ecuación del plano del problema es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z = 0$$

La distancia del punto $P(1, 1, 1)$ al plano $z = 0$ es $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$

El volumen del cubo es 0,192

30 **Calcula la proyección ortogonal del punto O (0, 0, 0) sobre el plano $x + y + z = 1$.**

El punto buscado es la solución del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y \quad = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases}$

Dicho punto es (1/3, 1/3, 1/3).

31 **Sea P_1 el punto (1, 0, –1), P_2 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x - 2y = 0$ y P_3 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x + 2y + z = 1$. Calcula la ecuación del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3.**

Las coordenadas de los puntos P_2 y P_3 son:

P_2 (3/5, 4/5, –1) y P_3 (2/3, 4/3, –10/3)

El plano que pasa por P_1, P_2 y P_3 tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -7/3 \end{vmatrix} = 14x + 7y + 2z = 0$$

32 **Halla la recta perpendicular común a las rectas de ecuaciones:**

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - 3y = 11 \\ 4y - z = -4 \end{cases}$$

Sean P $(2 + 3t, t, 1 + 4t)$ y Q $(11 + 3s, s, 4 + 4s)$ dos puntos genéricos de las rectas r y s.

Debe cumplirse: $\left.\begin{matrix} \overline{PQ} \cdot (3, 1, 4) = 0 \\ \overline{PQ} \cdot (3, 1, 4) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2t - 2s = 3$

Las rectas r y s son paralelas y, por tanto, tienen infinitas perpendiculares comunes. Todas ellas son paralelas a la recta de ecuación:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

33 ***a)* Determina m y n para que los planos de ecuaciones**

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + mz = n \end{cases}$$ **se corten en una recta r.**

***b)* Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto P (2, 1, 3).**

***c)* Halla la distancia del punto P a la recta r.**

a) Para que los planos se corten en la recta

$r: \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ debe ser $m = 1$ y $n = 4$

b) El plano buscado es $x + y - z = 0$.

c) La distancia del punto P a la recta r es 0,707.

34 **Sean A (–3, 4, 0), B (3, 6, 3) y C (–1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:**

***a)* La ecuación del plano que contiene al triángulo.**

***b)* El valor de los ángulos y el área del triángulo.**

a) El plano que contiene al triángulo tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + 3 = 0$$

b) El valor de los ángulos es:

$$cos\,(\widehat{A}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{12 - 4 + 3}{\sqrt{49}\,\sqrt{9}} = 0{,}524,$$

luego $\widehat{A}$ = 58°24’42,7”

$$cos\,(\widehat{B}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \frac{24 + 8 + 6}{\sqrt{49}\,\sqrt{36}} = 0{,}905$$

luego $\widehat{B}$ = 25°12’31,56”

$$cos\,(\widehat{C}) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \frac{-8 + 8 - 2}{\sqrt{9}\,\sqrt{36}} = 0{,}111$$

luego $\widehat{C}$ = 83°37’14,3”

El área del triángulo ABC es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(6, 2, 3) \times (2, -2, 1)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(8, 0, -16)\right| = 8{,}944$$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

35 **Calcula el ángulo que forman los planos $x + 2y - z = 0$ y $x - 2y + 5z - 3 = 0$.**

El ángulo que forman los planos es el mismo que el formado por sus vectores normales. Su valor es:

$$cos\,(\widehat{\overline{n_{\pi_1}} \cdot \overline{n_{\pi_2}}}) = \frac{\overline{n_{\pi_1}} \cdot \overline{n_{\pi_2}}}{|\overline{n_{\pi_1}}|\,|\overline{n_{\pi_2}}|} = \frac{1 + (-4) + (-5)}{\sqrt{6}\,\sqrt{30}} = 0{,}6$$

luego el ángulo buscado es de 53°23’44,6”

36 **Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π, siendo:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \quad \text{y} \quad \pi: x - y - z = 0$$

El ángulo buscado puede calcularse con el vector direcciona de la recta $\bar{v} = (2, -1, 3)$ y el normal al plano $\bar{n} = (1, -1, -1)$, a través de la expresión:

$$\text{sen}\,(\widehat{r, \pi}) = \text{sen}\,(\widehat{\bar{v}, \bar{n}}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|\bar{v}|\,|\bar{n}|} = \frac{2+1-3}{\sqrt{14}\,\sqrt{3}} = 0$$

luego el ángulo es 0° y, por tanto, la recta y el plano son paralelos.

37 **Calcula las coordenadas del punto de la recta r tal que forme un triángulo rectánculo en A con los puntos A (1, 5, 6), B (7, 6, 6), siendo r la recta de ecuaciones**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

Consideramos un punto genérico P (5/3 + 1/3 t, 4/3 – 7/3 t, t) de la recta r.

Para que los puntos A, B y P formen un triángulo rectángulo en A debe cumplirse que $\overline{AP} \cdot \overline{AB} = 0$, es decir:

$$\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}t - \frac{11}{3}, t - 6\right) \cdot (6, 1, 0) = 0, \text{ luego } t = 1.$$

El punto buscado es (2, –1, 1).

38 **Halla la distancia entre el punto A (1, 2, 3) y cada uno de los ejes coordenados.**

La distancia del punto A (1, 2, 3) al eje OX viene dado por la expresión:

$$d(A, 0x) = \frac{|(1, 2, 3) \cdot (1, 0, 0)|}{|(1, 0, 0)|} = \frac{|(0, 3, -2)|}{|(1, 0, 0)|} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

La distancia a OX es:

$$d(A, OY) = \frac{|(1, 2, 3) \cdot (0, 1, 0)|}{|(0, 1, 0)|} = \frac{|(-3, 0, 1)|}{|(0, 1, 0)|} = \sqrt{10} = 3{,}162$$

La distancia a OZ es:

$$d(A, OZ) = \frac{|(1, 2, 3) \cdot (0, 0, 1)|}{|(0, 0, 1)|} = \frac{|(2, -1, 0)|}{|(0, 0, 1)|} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

39 **Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones:**

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -5 \\ y = 1 - 3s \\ z = 2s \end{cases}$$

Consideramos puntos genéricos en cada una de las rectas,
P (2 + 3t, 2t, –1–2t) y Q (–s, 1 – 3s, 2s)

Buscamos los puntos P y Q que determinan la perpendicular común a r y s, mediante las condiciones:

$$\overline{PQ} \cdot (3, 2, -2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 17t + 13s = -6$$
$$\overline{PQ} \cdot (-1, -3, 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 13t + 14s = -1$$

Resolviendo el sistema, se obtiene: $t = -1{,}03$, $s = 0{,}88$.
Estos valores fijan los puntos P y Q en P (–1,09; –2,06; 1,06) y Q (–0,88; –1,64; 1,76).
Por tanto,

$$d(r, s) = d(P, Q) = \sqrt{(-0{,}21)^2 + (-0{,}42)^2 + (-0{,}7)^2} = \sqrt{0{,}7064} = 0{,}84$$

40 **Halla un punto de la recta $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ que equidiste de los puntos A (1, 0, 1) y B (0, 4, 2).**

Sea P (t, t + 2, 2t + 3) un punto genérico de la recta dada. Debe cumplirse que $d(P, A) = d(P, B)$. Esto es,

$$\sqrt{(t-1)^2 + (t+2)^2 + (2t+2)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 + (2t+1)^2}$$

Operando, se obtiene $t = -0{,}4$.
El punto buscado será P (–0,4; 1,6; 2,2).

41 **Halla el valor de a para que el plano que pasa por el punto (a, a, a) y es perpendicular a los planos $x + y - z = 0$ y $2x + y - z = 2$ diste del punto (0, 0, 0) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ unidades.**

La ecuación del plano bajo las condiciones del problema es:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-a & z-a \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = y + z - 2a = 0$$

La distancia de origen (0, 0, 0) al plano anterior es $\frac{2a}{\sqrt{2}}$.

Como esta distancia, nos dicen que debe ser $\frac{2}{\sqrt{2}}$, entonces $a = 1$.

42 ***a)* Encuentra las coordenadas del punto B, proyección ortogonal del punto A (1, 0, 2) sobre el plano π: $2x + y + z = 10$.**
***b)* El punto C (2, 1, 5) es un punto del plano π. ¿Cuánto vale el área del triángulo ABC?**

a) El punto B es la intersección del plano π con la recta que pasa por A (1, 0, 2) y es perpendicular a π.
El punto B es la solución del sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 10 \\ x - 2y = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$

Las coordenadas del punto B son B (3, 1, 3).

b) El área del triángulo de vértices A (1, 0, 2), B (3, 1, 3) y C (2, 1, 5) es:

$$\text{Área}\,(ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(2, 1, 1) \times (1, 1, 3)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{30} = 2{,}739$$

43 **Halla el punto simétrico del origen respecto del plano $x + y + z = 1$.**

El punto proyección de 0 (0, 0, 0) sobre el plano $x + y + z = 1$ es el punto P solución del sistema formado por el plano y la recta perpendicular a él que pasa por el origen. Es decir, el punto P es solución de

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y \qquad = 0 \\ \qquad y - z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, P (1/3, 1/3, 1/3).
El punto 0' (x', y', 2') cumple, con respecto a los puntos O y P, la relación:

$$\frac{0 + x'}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{0 + y'}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{0 + z'}{2} = \frac{1}{3}$$

Las coordenadas de O' son $x' = 2/3$, $y' = 2/3$, $z' = 2/3$.

44 **Halla el punto simétrico del punto A (2, 0, 1) respecto de la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-2}{1}$**

Sea P (at, $-t + 3$, $t + 2$) un punto genérico de la recta. Para fijar este punto como punto medio del segmento AA' imponemos la condición $\overline{PA} \cdot (2, -1, 1) = 0$.
Es decir,

$$(2t - 2) \cdot 2 + (-t + 3) \cdot (-1) + (t + 1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

El punto P es P (2, 2, 3).
Las coordenadas de A' (x', y', z') simétrico de A debe cumplir:

$$\frac{x' + 2}{2} = 2, \quad \frac{y' + 0}{2} = 2, \quad \frac{z' + 1}{2} = 3$$

Por tanto, $x' = 2$, $y' = 4$, $z' = 5$.

45 **Dados el punto A (1, 0, –1) y el plano π: $2x - y + 3z = 4$, se pide:**

a) **La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.**
b) **El punto simétrico de A respecto a π.**
c) **De los planos que pasan por A y son perpendiculares a π, halla el que pasa por B (2, 1, 2).**
d) **La ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π.**

a) La ecuación de la recta es: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$

b) El punto P del plano π que es el punto medio del segmento AA' es la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y \qquad = 0 \\ \qquad y - z = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas de P son: $\left(\dfrac{24}{14}, \dfrac{5}{14}, -\dfrac{1}{14}\right)$
El punto simétrico de A, A' tiene por coordenadas: $\left(\dfrac{17}{7}, -\dfrac{5}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$

c) El plano buscado $Ax + By + Cz = D$ debe cumplir:

$$\begin{cases} A \qquad\quad - C = D \\ 2A + B + 2C = D \\ 2A - B + 3C = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $2x + y - z = 3$.

d) El plano buscado es $2x - y + 3z = -1$.

46 **Halla la recta perpendicular común a las rectas r: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ y s: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$**

Sean P (t, t, t) y Q ($s + 1$, $3s$, s) dos puntos genéricos de las rectas r y s. Los puntos anteriores quedan fijados bajo las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{PQ} \cdot (1, 1, 1) = 0 \;\Rightarrow\; 3t - 5s = 1 \\ \overline{PQ} \cdot (1, 3, 1) = 0 \;\Rightarrow\; 5t - 11s = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 3/4,\ s = 1/4$$

Los puntos fijados son P (3/4, 3/4, 3/4) y Q (5/4, 3/4, 1/4).
La perpendicular común tiene por ecuación:

$$\frac{x - 3/4}{1} = \frac{y - 3/4}{0} = \frac{z - 3/4}{1}$$

47 **Halla la distancia entre la recta que pasa por los puntos A (1, 0, 0) y B (0, 1, 1) y el eje OY.**

Sea r: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ y s: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$ las rectas del enunciado

Procediendo como en el ejercicio anterior, buscamos los puntos P y Q que nos dan la perpendicular común.
Sean P ($1 - t$, t, t) y Q (0, s, 0), debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{PQ} \cdot (-1, 1, 1) = 0 \;\Rightarrow\; 3t - s = 1 \\ \overline{PQ} \cdot (0, 1, 0) = 0 \;\Rightarrow\; t - s = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 1/2,\ s = 1/2$$

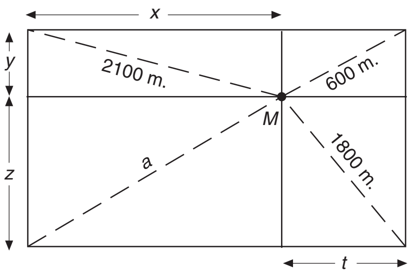
Los puntos P y Q son P (1/2, 1/2, 1/2), Q (0, 1/2, 0).
La distancia buscada es:

$$d(r, s) = d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$$

Resolución de problemas

1. **EL MANANTIAL OCULTO. En una antigua ciudad amurallada, de forma rectangular, existía en un punto intramuros un manantial que se encontraba a 2 100 m de la esquina superior izquierda, a 600 m de la esquina superior derecha y a 1 800 m de la esquina inferior dere-**

cha. El manantial actualmente ha desaparecido, ¿a qué distancia se encontraría de la esquina inferior izquierda?



Denotando con *x, y, z, t* los lados de los distintos triángulos rectángulos que se formen y con a la distancia que queremos hallar, al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2.100^2 \\ -y^2 + t^2 = 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1\,800^2 \\ x^2 + z^2 = a^2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x^2 = 2.100^2 \\ -y^2 - t^2 = -600^2 \\ \hline x^2 - t^2 = 2\,100^2 - 600^2 \\ z^2 + t^2 = 1\,800^2 \\ \hline x^2 + z^2 = 2\,100^2 - 600^2 + 1\,800^2 \end{array}$$

Entre esta última igualdad obtenida y la última igualdad del sistema, obtenemos:

$$a^2 = 2\,100^2 - 600^2 + 1\,800^2 \Rightarrow a = 2\,700 \text{ m}$$

2. NÚMERO OCULTO. La siguiente expresión esconde un número conocido. ¿Sabes cuál es?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

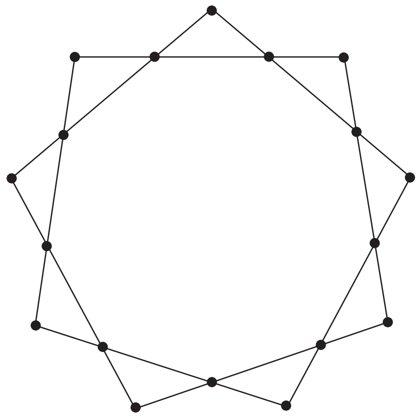
Llamando x a la expresión dada, obtenemos:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

$$\Rightarrow\ x - 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow\ x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Luego $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$ = número de oro.

3. MONEDAS. ¿Es posible colocar 18 monedas en 9 filas de manera que cada fila contenga 4 monedas?



En la figura puedes ver 18 monedas colocadas en 9 filas y con 4 monedas en cada fila.

4. TANTOS POR CIENTO. Parte de los 8.000 habitantes de un pueblo se van de vacaciones en verano. De los que quedan, al 63,636363...% les gusta la música y al 22,297297297...% les gusta usar pantalones vaqueros. ¿Cuántos habitantes se fueron de vacaciones en verano?

$$63{,}6363.... = \frac{6\,300}{99} = \frac{700}{11}$$

$$22{,}297297.... = \frac{22\,275}{999} = \frac{2\,475}{111} = \frac{825}{37}$$

Al $63{,}\widehat{66}\%$ de los que quedan les gusta la música, es decir al $\dfrac{700}{11}\%$ les gusta la música.

Al $22{,}\widehat{297}\%$ de los que queden les gusta usar pantalones vaqueros, es decir al $\dfrac{825}{37}\%$ les gusta usar pantalones vaqueros.

Les gusta la música: $\dfrac{700}{1\,100} \cdot x = \dfrac{7}{11} \cdot x$

Les gusta usar vaqueros: $\dfrac{825}{3\,700} \cdot x = \dfrac{33}{148} \cdot x$

Por lo tanto, x ha de ser múltiplo de 11 y de 148.

Puede ser $x = 1\,628$; $x = 3\,256$; $x = 4\,884$; $x = 6\,512$.

Se fueron de vacaciones: 6 372 si $x = 1\,628$; 4 744 si $x = 3.256$; así sucesivamente.

UNIDAD DIDÁCTICA 7

Lugares geométricos. Cónicas

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Determinar lugares geométricos sencillos en el plano.
2. Conocer las ecuaciones y propiedades más características de las cónicas.
3. Resolver problemas geométricos asociados a los lugares geométricos y cónicas.
4. Interpretar alguna de las propiedades de las cónicas.
5. Reconocer algún lugar geométrico sencillo del plano.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Deben buscarse entre las experiencias del alumno sus conocimientos de la geometría en el plano desarrollada en los cursos precedentes.
Puede orientarse su desarrollo, poniendo el énfasis en una metodología heurística, haciendo primar los procedimientos y técnicas.
Buscaremos reforzar el razonamiento inductivo a través de la experimentación de situaciones concretas. No debe olvidarse fomentar el razonamiento deductivo mediante la aplicación de conceptos y propiedades, así como de las relaciones entre estas últimas.

Actividades iniciales

1. Como seguramente recordarás de cursos anteriores, las cónicas se obtienen al cortar una superficie cónica con diferentes planos. Explica cómo debes hacer los cortes para obtener cada una de ellas.

La elipse es la cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje y que corte a todas las generatrices.
La hipérbola es la cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, paralelo a dos generatrices y que corte a todas las demás.
La parábola es la cónica obtenida al cortar la superficie cónica por un plano oblicuo al eje, paralelo a una generatriz y que corte a todas las demás.

2. Si cortas un cilindro por un plano paralelo a la base, ¿qué figura obtienes? ¿Y si el plano es oblicuo? ¿Tiene alguna similitud esta figura con la órbita de la Tierra en torno al Sol?

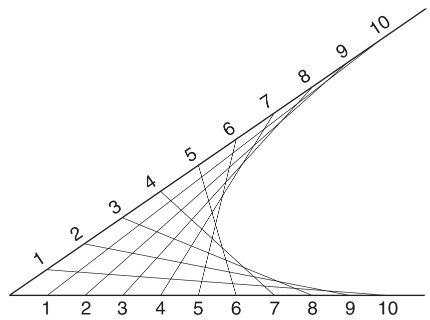
Si se corta por un plano paralelo a la base se obtiene una circunferencia. Si el corte es por un plano oblicuo se obtiene una elipse.

3. Encuentra la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos *A* (0, 3), *B* (2, 1) y *C* (–2, 1). Determina su centro y su radio.

La ecuación de la circunferencia buscada es $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.
Su centro es el punto (0, 1) y su radio vale 2.

4. Encuentra la curva resultante de realizar el siguiente procedimiento: Dibujamos dos semirrectas formando un ángulo agudo. Marcamos diez divisiones iguales en cada una de ellas, y unimos el punto 1 de una con el 10 de la otra, el 2 con el 9, el 3 con el 8, ... y el 10 con el 1.

Como puede observarse en el dibujo, la curva obtenida es una parábola.



Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Halla los puntos del plano que disten 10 unidades de *A* (2, 1) y *B* (3, –4).

Los puntos buscados son (12; 0, 4) y (–7; –3, 4).

2 Determina el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de distancias a los puntos *A* (–2, 1) y *B* (1, 2) es igual a 3/2.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico del lugar buscado. Dicho punto debe cumplir que:

$$\frac{d(P, A)}{d(P, B)} = \frac{3}{2}$$

Expresando las distancias en coordenadas cartesianas y operando se obtiene la siguiente ecuación del lugar geométrico:

$$5x^2 + 5y^2 - 34x - 44y + 25 = 0$$

Este lugar geométrico es la circunferencia de centro $\left(\frac{17}{5}, -\frac{22}{5}\right)$ y radio 2,43.

3 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de cuadrados de las distancias a los puntos *A* (2, 1) y *B* (–3, 2) es 4.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico. Desarrollando la relación $d^2(P, A) - d^2(P, B) = 4$, se obtiene la recta de ecuación:

$$5x - y = 6$$

4 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto *A* (1, –2) es doble de su distancia a la recta $x + y - 2 = 0$.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico buscado. El desarrollo de la relación $d(P, A) = 2d(P, r)$, nos conduce a la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4xy - 6x - 12y + 3 = 0$$

La ecuación anterior es una hipérbola.

5 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de las rectas $x + 2y - 3 = 0$ y $3x + y + 2 = 0$.

El lugar geométrico buscado son las rectas siguientes:

$(\sqrt{2} - 3)\,x + (2\sqrt{2} - 1) + (3\sqrt{2} + 2) = 0$ y

$(\sqrt{2} + 3)\,x + (2\sqrt{2} + 1) + (2 - 3\sqrt{2}) = 0$

6 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de los puntos *A* (3, 4) y *B* (–1, –2).

Es la recta $2x + 3y = -5$.

7 Desde el punto *P* (6, –8) se han trazado todos los rayos posibles hasta su intersección con el eje de abscisas. Halla la ecuación del lugar geométrico de sus puntos medios.

El lugar geométrico buscado es la recta horizontal de ecuación $y = -8$.

8 Un segmento *AB* tiene una longitud de dos unidades. Encuentra el lugar geométrico de los puntos *P* del plano que hacen que el área del triángulo *APB* sea uno.

El lugar geométrico es la recta paralela al segmento AB situada a una unidad de distancia.

9 **Determina las circunferencias que cumplan las condiciones siguientes:**
a) Tiene por centro el punto (2, 0) y radio 3.
b) Tiene por centro el punto (–1, 2) y pase por el punto (3, –1).
c) Pasa por el punto (4, –2) y es tangente a los ejes coordenados.
d) Pasa por el punto (4, –2) y es tangente a los ejes coordenados.
e) Pasa por los puntos (1, 3), (0, –1) y (–4, 1).
f) Tiene por centro el punto (1, 4) y es tangente al eje de abscisas.

Las ecuaciones de las circunferencias buscadas son:
a) $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 25$
d) $x2 + y^2 + tx + ty - 2t - 10 = 0, t \in R$
e) $9x^2 + 9y^2 + 23x - 104y + 113 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 0$

10 **Un segmento de 10 cm se apoya en las partes positivas de los ejes coordenados, formando un triángulo de área 24 cm². Halla las ecuaciones de las circunferencias cuyo diámetro es el citado segmento.**

La situación del enunciado da lugar a dos posibles circunferencias de centros los puntos (3, 4) y (4, 3) y radio 5.
Las ecuaciones de las circunferencias son:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

11 **Determina E a fin de que las ecuaciones $x^2 + y^2 - 4x + 6y + E = 0$ y $2x^2 + 2y^2 + x - 4y + E = 0$ representen: *a)* una circunferencia; *b)* un punto; *c)* no representen ninguna línea.**

La ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + E = 0$ representa:
a) una circunferencia si $E < 13$
b) un punto si $E = 13$
c) ninguna línea si $E > 13$

La ecuación $2x^2 + 2y^2 + x - 4y + E = 0$ representa:
a) una circunferencia si $E < 17/8$
b) un punto si $E = 17/8$
c) ninguna línea si $E > 17/8$

12 **Dada la recta $4x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (2, 1), por su simétrico respecto de la recta dada y por el origen de coordenadas.**

El punto $\left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ es el simétrico de (2, 1) respecto de la recta $4x - 3y + 5 = 0$. Por tanto, la circunferencia que pasa por los puntos (2, 1), $\left(-\frac{6}{5}, \frac{17}{5}\right)$ y (0, 0), es:

$$4x^2 + 4y^2 - 15x + 10y = 0$$

13 **En la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ se inscribe un triángulo equilátero, uno de cuyos vértices es el (2, 0). Halla las coordenadas de los otros dos vértices.**

Los otros dos vértices son los puntos $(-3, \sqrt{3})$ y $(-1, -\sqrt{3})$

14 **Dadas las circunferencias**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 18x - 36 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 36 = 0 \end{cases} \text{, halla:}$$

a) Los puntos de intersección de ambas.
b) La ecuación del eje radical.
c) La potencia del centro de la segunda respecto de la primera.

a) Los puntos buscados son (0, 6) y (0, –6).
b) El eje radical es la recta $x = 0$.
c) La potencia pedida es –52.

15 **Para la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$, halla las ecuaciones de las tangentes en los puntos en que cortan al eje de coordenadas y el ángulo que forman éstas.**

La circunferencia dada corta al eje OY en los puntos (1, 0) y (3, 0).
La tangente en el punto (1, 0) tiene por ecuación $y = 0$.
La tangente en el punto (3, 0) tiene por ecuación $y = -x + 3$.
El ángulo que forman ambas tangentes es 135°.

16 **Averigua las ecuaciones de las elipses, referidas a sus ejes, que cumplan las condiciones siguientes:**
a) Pasa por el punto (3, 4) y su excentricidad es 3/5.
b) La distancia focal es 3 cm y el semieje menor 4 cm.
c) Pasa por el punto (6, 4) y el semieje mayor es 10.

Las ecuaciones de las elipses son:

a) $\dfrac{x^2}{34} + \dfrac{y^2}{21{,}76} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{18{,}25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

17 **Halla los focos, los semiejes y la excentricidad de las siguientes elipses:**

a) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **b)** $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

c) $2x^2 + 3y^2 = 108$ **d)** $9x^2 + 25y^2 = 225$

a) Focos: F $(\sqrt{7}, 0)$ y $(-\sqrt{7}, 0)$
Excentricidad: $e = 0{,}6614$
Semiejes: $a = 4$ y $b = 3$.

b) Focos: F (0; 6,25) y F' (0; –6,25)
Semiejes: $a = 5$ y $b = 8$
Excentricidad: $e = -0{,}781$

c) Focos: F (4,24; 0) y F' (–4,24; 0)
Excentricidad: $e = 0{,}577$
Semiejes: $a = 7{,}35$ y $b = 6$

d) Focos: F (4, 0) y F' (-4, 0)
Semiejes: $a = 5$ y $b = 3$
Excentricidad: $e = 0{,}8$

18 Halla las ecuaciones de las tangentes y las normales a la elipse $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ en los puntos de abscisa $x = 3$.

En el punto (3; 4, 84), las ecuaciones de la tangente y la normal son:

$$y = -0{,}11x + 5{,}17 \quad \text{e} \quad y = 9{,}3x + 32{,}74$$

En el punto (3; –4, 84) las ecuaciones de la tangente y la normal son:

$$y = 0{,}11x - 5{,}17 \quad \text{e} \quad y = -9{,}3x + 23{,}06$$

19 Halla los focos, los semiejes y la excentricidad de las asíntotas de las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ***b)*** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$

c) $4x^2 - y^2 = 4$ ***d)*** $x^2 - 4y^2 = 9$

Las soluciones son:

Semiejes	Focos	Excentricidad	Asíntotas
a) $a = 6, b = 8$	$F(10, 0), F'(-10, 0)$	$e = 1{,}667$	$y = 1{,}33x, y = -1{,}33x.$
b) $a = 5, b = 2$	$F(\sqrt{29}, 0), F(-\sqrt{29}, 0)$	$e = 1{,}077$	$y = 2{,}5x, y = -2{,}5x.$
c) $a = 1, b = 2$	$F(0, \sqrt{5}), F(0, -\sqrt{5})$	$e = 2{,}236$	$y = 0{,}5x, y = 0{,}5x.$
d) $a = 3, b = 3/2$	$F(3{,}35; 0), F'(-3{,}35; 0)$	$e = 1{,}117$	$y = 2x, y = -2x.$

20 Si la ecuación de una hipérbola es $xy = 1$, ¿cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿Y la de los ejes de la cónica? ¿Cuáles son las coordenadas de los focos?

Las asíntotas son las rectas $x = 0$ e $y = 0$.
Los ejes de la hipérbola son las rectas $y = x$ e $y = -x$.
Los focos están situados en los puntos

$$F(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ y } F(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

21 Cuánto ha de valer a para que $ax^2 - 9y^2 = 4$ represente una hipérbola equilátera, y halla el valor del semieje.

El valor de a debe ser 9.
El semieje vale 2/3.

22 Dibuja la hipérbola $2x^2 - y^2 = 9$ previo cálculo de vértices, focos y asíntotas. Ecuaciones de la tangente y la normal en el punto de la hipérbola de abscisa 3 y ordenada positiva.

Los vértices son los puntos $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 0\right)$
Los focos son los puntos (3, 35; 0) y (–3, 35; 0).

Las asíntotas son las rectas $y = \sqrt{2}x$ e $y = -\sqrt{2}x$
La ecuación de la tangente en el punto (3, 3) es $y = 4x - 15$
La ecuación de la normal en el punto (3, 3) es $y = -\frac{1}{4}x + \frac{15}{4}$

23 Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 40$ con las curvas siguientes:
a) **La recta $x - 2y + 2 = 0$**
b) **La elipse $9x^2 + 16y^2 = 25$**
c) **La hipérbola $x^2 - 25y^2 = 25$**
d) **La hipérbola $xy = 20$**

Los puntos de intersección buscados son:
a) (3,8; 5,6) y (–2, –6)
b) No existen puntos de corte.
c) (6,28; 0,76); (6,28; –0,76); (–6,28; 0,76) y (–6,28; –0,76)
d) (4,47; 4,47) y (–4,47; –4,47).

24 Halla las ecuaciones de las parábolas determinadas por las condiciones que siguen:
a) **Tiene por foco el punto (0, 2) y por directriz la recta $y = -2$.**
b) **Tiene por vértice el punto (3, 4) y por directriz la recta $x = 0$.**
c) **Tiene el eje paralelo a *OX* y pasa por (6, 1), (–2, 3) y (16, 6).**

Las ecuaciones buscadas son:

a) $y = \frac{1}{8}x^2$

b) $x = \frac{1}{12}y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{13}{3}$

c) $x = 2y^2 - 12y + 16$

25 Halla el eje, la directriz, el foco y el vértice de la parábola $y = x^2 + 2x - 15$.

El eje es la recta $x = -1$
La directriz es la recta $y = -65/4$
El foco es el punto (–1, –63/4)
El vértice es el punto (–1, –16)

26 Halla la ecuación de la tangente y la normal a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto P (9, 6).

La ecuación de la tangente es: $y = \frac{1}{3}x + 3$
La ecuación de la normal es: $y = -3x + 33$

27 Halla las ecuaciones de la tangente a la parábola $y = x^2 - 3x + 3$ en los puntos en que su ordenada es igual a su abscisa.

Las ecuaciones de las tangentes pedidas son:
• En el punto (1, 1), $y = -x + 2$
• En el punto (3, 3), $y = 3x - 6$

28 Deduce el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas iguales de una circunferencia.

Es una circunferencia concéntrica a la dada y de radio la distancia desde el centro al punto medio de la cuerda.

29 **Dos ruedas de radios $R = 1\ m$ y $r = 25$ cm están unidas por una correa de transmisión. Sabiendo que los centros de las ruedas están separadas por una distancia de 2 m, calcula la longitud de la correa.**

La longitud de la correa es, aproximadamente, 821,169 cm.

30 **Clasificar las cónicas siguientes:**
a) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 13 = 0$
b) $9x^2 + 25y^2 - 36x + 150 + 36 = 0$
c) $x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2xy + 24 + 8y + 48 = 0$
e) $2x^2 + 3y^2 - 10xy - 6x + 2y = 4$
f) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$
g) $x^2 + 4y^2 + 2xy - 4x + 1 = 0$
h) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$
i) $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$
j) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

Las cónicas son:
a) Circunferencia.
b) Elipse real.
c) Hipérbola equilátera.
d) Parábola.
e) Hipérbola.
f) Parábola.
g) Hipérbola.
h) Circunferencia.
i) Elipse.
j) Parábola.

31 **Sin resolver el sistema, determina si la recta $2x - 3y + 1 = 0$ es exterior, secante o tangente a la circunferencia $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$. Razónalo.**

La distancia del centro, (1, 2) a la recta $2x - 3y + 1 = 0$, es:

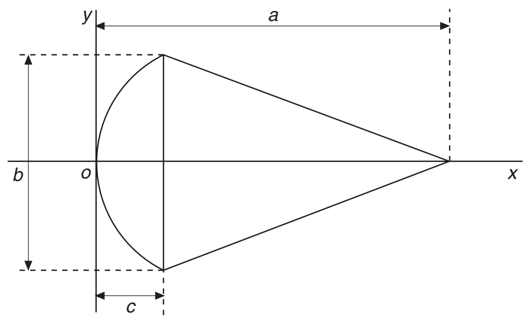
$$\frac{|2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}831$$

Por tanto, al ser esta distancia menor que el radio, la recta es secante.

32 **Determina las circunferencias que cumplen las condiciones siguientes:**
***a)* Pasa por el punto (0, 7) y es tangente a las rectas $x + 2 = 0$ e $y + 2 = 0$.**
***b)* Pasa por los puntos (1, –2) y (–2, 2) y su centro está en la recta $8x - 4y + 9 = 0$.**
***c)* Tiene su centro en el punto (6, 5) y es tangente a la recta $4x - 3y + 5 = 0$.**

a) $(x - 20{,}2)^2 + (y - 20{,}2)^2 = (22{,}2)^2$
b) $(x + 0{,}54)^2 + (y - 1{,}18) = (3{,}53)^2$
c) $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = (2{,}8)^2$

33 **Hemos construido una cometa que tiene forma de arco, cuya parte curva es un arco de parábola. Las medidas de la cometa están indicadas en la figura, longitud $a = 1{,}50$ m, evergadura $b = 1$m, flecha $c = 25$ cm.**



Tomando como ejes de coordenadas los indicados en el dibujo, encuentra:
***a)* La ecuación de la parábola de la cual forma parte el arco de la cometa.**
***b)* Las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.**

a) La ecuación de la parábola es $y^2 = 100x$.
b) El foco es el punto (25, 0) y la recta directriz es $x = -25$.

34 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que el cuadrado de su distancia a $x + y = 2$ sea igual al cuadrado de su distancia al origen.**

La ecuación del lugar geométrico es $x^2 + y^2 + 4x + 4y — 4 = 0$, que se corresponde a una circunferencia de centro (–2, 2) y radio $\sqrt{12}$.

35 ***a)* Dados los puntos A (2, 1) y B (5, 4), halla la ecuación de la circunferencia de diámetro AB. *b)* Halla la ecuación de una de las rectas tangentes a esta circunferencia que sea paralela al diámetro AB.**

a) La ecuación es $x^2 + y^2 - 7x - 5y + \frac{53}{4} = 0$

b) Una recta tangente es $y = x + 2{,}17$

36 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que el cuadrado de su distancia a $x + y = 2$ sea igual al cuadrado de la suma de sus distancias a los ejes coordenados.**

La solución coincide con la de actividad número 34.

37 **Halla el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de distancias a los ejes coordenados es igual al cuadrado de su distancia al origen.**

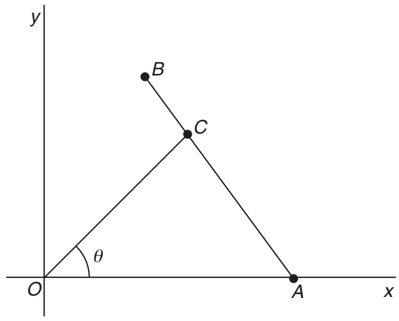
La ecuación del lugar geométrico es $x^2 + y^2 - x - y = 0$, que se corresponde a la circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

38 **Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (–1, 0) y (2, 1), cuyo centro está en la recta $y - 2x + 3 = 0$.**

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 5/3)^2 + (y - 1/3)^2 = 5/9$$

39 **En la figura adjunta se representan dos varillas, *AB* y *OC*; la varilla *AB* tiene un orificio en el punto *C*, en el que se articula un extremo de la varilla *OB*.**



Se sabe que $\overline{OC} = \overline{AC} = 2\ \overline{CB} = a$, dado. El extremo *O* de la segunda varilla permanece fijo; el extremo *A* de la otra se mueve recorriendo una recta fija (el eje de abscisas) que pasa por *O*.

a) En función del ángulo θ, halla las coordenadas de *A*, de *B* y de *C*.

b) Halla el lugar geométrico del punto *B*, indicando el tipo de curva de que se trata.

a) Las coordenadas buscadas son:

$A\ (2a\cos\theta, 0)$, $B\left(\frac{a}{2}\cos\theta, \frac{3a}{2}\operatorname{sen}\theta\right)$ y $C\ (a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta)$

b) El lugar geométrico es la elipse de semiejes

$\frac{a}{2}$ y $\frac{3a}{2}$, y de ecuación $\frac{x^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} = 1$

40 **Se tienen los puntos del plano *A* (0, 3) y *B* (4, 1).**

a) ¿Cuántas circunferencias contienen simultáneamente a *A* y *B*?

b) Averigua qué condición deben cumplir las coordenadas de los centros de todas esas circunferencias.

c) De todas las circunferencias que contienen a *A* y a *B*, halla la ecuación de la que tiene su centro en el eje de abscisas, si es posible.

a) Todas las de la familia de ecuación:

$$x^2 + y^2 + \left(-\frac{14}{4} - \frac{1}{6}t\right)x + \left(-3 - \frac{1}{3}t\right)y + t = 0, \text{ con } t \in R$$

b) Todos los centros están sobre la recta $4x - 2y + 15 = 0$

c) La ecuación es $x^2 + y^2 - \frac{15}{2}x - 9 = 0$

41 **Encuentra las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma (diferencia) de cuadrados de sus distancias a las bisectrices de los ejes coordenados sea una cantidad constante. Clasifica dichos lugares según los valores de la constante anterior.**

Si consideramos la suma de los cuadrados de las distancias, se obtiene la ecuación $x^2 + y^2 = k$, que son circunferencias siempre que el k sea positivo.
En el caso de la diferencia, se obtiene $xy = -k/2$, que son hipérbolas equiláteras.

42 **Por el origen *O* se traza una recta r variable y llamamos *P* al punto en que *r* corta la recta *y* = 1. Desde el punto *A* (1, 0) se traza la recta *AP* y la perpendicular a ella *s*. Halla el lugar geométrico de los puntos *X*, intersección de *r* y *s* al variar la recta *r*.**

El lugar geométrico tiene de ecuación $x^2 + y^2 - xy - x + y = 0$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

43 **Sea el punto del plano que cumple la propiedad de que la suma de sus distancias a los ejes coordenados es igual al cuadrado de su distancia al origen. ¿Qué figura forman estos puntos? Encuentra su ecuación.**

Es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - x - y = 0$

44 **Dados los puntos *A* (–2, 1) y *B* (3, 4), halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos *P* tales que el ángulo *APB* sea recto.**

Es la circunferencia de centro (1/2, 5/2) y radio $\sqrt{34}/2$

45 **Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta *x* = –2 y el punto (2, –3). ¿Qué figura geométrica representan?**

Es la parábola de ecuación $x = \frac{1}{8}y^2 + \frac{6}{8}y + \frac{9}{8}$

46 **Considérese la hipérbola *xy* = 1. Halla la ecuación a la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 2. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.**

La ecuación de la secante es $x + 2y = 3$.
Las ecuaciones de las tangentes buscadas son:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad y + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}(x + \sqrt{2})$$

47 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de las distancias a *A* (4, 0) y *B* (0, 6) sea 76. ¿Qué representa la ecuación obtenida? ¿Qué sería la recta 3*x* + 4*y* – 43 = 0 respecto a ella?**

La ecuación del lugar geométrico es $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$.
Es la circunferencia de centro (2, 3) y radio 1.
La recta $3x + 4y - 43 = 0$ es exterior a la circunferencia anterior.

48 **Se desea plantar un seto en un jardín con la forma de alguna cónica y, para ello, se dispone de una cuerda de 10 m de longitud.**

a) Indica qué tipos de cónicas se pueden trazar con la ayuda de la cuerda, utilizando toda su longitud, y de qué manera habría que proceder en cada caso.

b) Calcula todos los elementos de las curvas que se pudieran obtener.

a) Se pueden trazar circunferencias de radio menor o igual que 10 m.
Se pueden trazar elipses, con el procedimiento del jardinero, utilizando cuerdas de 10 m.
b) En la circunferencia hay que dar el centro y el radio.
El semieje mayor de las elipses no puede superar los 10 metros.

49 Halla la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos *A* (3, 1) y *B* (–2, –1) y cuyo centro está en la recta $x - 2y - 1 = 0$.

La ecuación es: $(x - 7/12)^2 + (y + 5/24) = 7{,}3$

50 Dados los puntos *A* (1, 1) y *B* (2, –2):
a) Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro *AB*.
b) Comprueba que el punto *T* (3, –1) está en la circunferencia.
c) ¿Cuáles son las coordenadas del punto diametralmente opuesto a *T*?

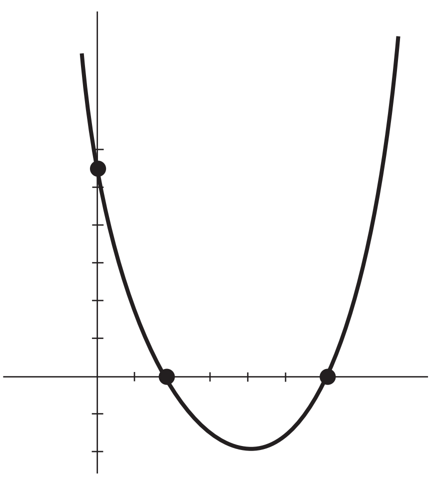
a) La ecuación es $(x - 3/2)^2 + (y + 1/2)^2 = 2{,}5$
b) Se cumple que $(3 - 3/2)^2 + (-1 + 1/2)^2 = 2{,}5$
c) El punto diametralmente opuesto a T es (0, 0)

51 Determina un punto de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos *A* (1, 1) y *B* (3, 9), en el que la tangente a la parábola sea paralela a la recta *AB*.

El punto buscado es (2, 4)

52 Una parábola tiene su eje paralelo al de ordenadas y pasa por los puntos *A* (2, 0), *B* (6, 0) y *C* (0, 6). Se pide:
a) Determina la ecuación de la parábola.
b) Calcula sus elementos principales: vértice, foco, eje y directriz.
c) Dibuja la curva.

a) La ecuación de la parábola es $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6$
b) El vértice es el punto (4, –2)
El foco es el punto (4, –1,5)
La directriz es la recta y = –2,5
El eje es la recta $x = 4$
c) El dibujo aproximado es el adjunto.



53 Dada la hipérbola de ecuación $5x^2 - 6y^2 = 36$, calcula los parámetros *a, b* y *c* y las ecuaciones de las asíntotas.

Los parámetros son: $a = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$, $b = \sqrt{6}$ y $c = \dfrac{\sqrt{66}}{\sqrt{5}}$

La ecuaciones de las asíntotas son: $y = \dfrac{\sqrt{30}}{6}x$ e $y = -\dfrac{\sqrt{30}}{6}x$

54 Halla la ecuación de las tangentes trazadas a la circunferencia $x^2 + y^2 - 25$ desde el punto (8, 0).

Las rectas tangentes son $y = 0{,}8\,(x - 8)$ e $y = -0{,}8\,(x - 8)$

55 Dadas las circunferencias
C_1: $x^2 + y^2 - 16 = 0$, C_2: $2x^2 + 2y^2 - 3x - 8y - 10 = 0$, encuentra:
a) La ecuación del eje radical.
b) Las coordenadas de un punto que teniendo igual potencia respecto de las dos circunferencias equidiste de los ejes coordenados.

a) La ecuación del eje radical es $3x + 8y - 22 = 0$
b) El punto buscado es (2, 2)

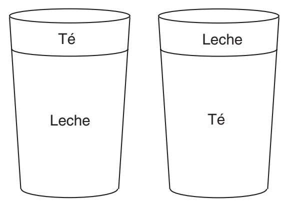
56 Deduce razonadamente la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x + y = 0$ y por vértice el punto (2, 1).

El foco de dicha parábola es el punto (2,5; 1,5)
La ecuación de la parábola es $x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 6y + 17 = 0$

Resolución de problemas

1. LECHE Y TÉ. Un par de amigos se junta a merendar y uno de ellos pide un vaso de leche y el otro un vaso de té. Deciden hacer mezclas del siguiente modo: toman una cucharada de leche y la echan en el té, después toman una cucharada del té donde pusieron una cucharada de leche y la echan en la leche. ¿Habrá más leche en el té o más té en la leche?

Como comenzamos con dos vasos llenos el uno de té y el otro de leche, al final la leche que hay en el té es la misma cantidad que el té que hay en la leche; como se puede ver en el siguiente dibujo.



2. JUEGO PARA DOS. Dos amigas dicen alternativamente un número natural del 1 al 10. La primera dice un número y la segunda dice otro, sumándole a éste el que dijo la anterior, y así sucesivamente. Gana la partida la primera jugadora que consiga llegar a 100. Encuentra la estrategia ganadora para la primera jugadora. ¿Y cuál sería para la segunda?

Comenzando el juego desde el final, observamos que la 1.ª jugadora (G) ganará siempre y cuando deje a la 2.ª jugadora (P) con 89 en la penúltima jugada.
Para ello, simulamos una partida.

1.ª jugada { G dice 2
P lo que sea de 1 a 1

2.ª jugada { G, el número necesario para sumar 12 ó
P, el número que sea de 1 a 10

3.ª jugada { G, el número necesario para sumar 23 ó
P, el número que sea de 1 a 10

...

Así sucesivamente G siempre tiene que decir el número necesario para sumar un múltiplo de 11 más 1: 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89.

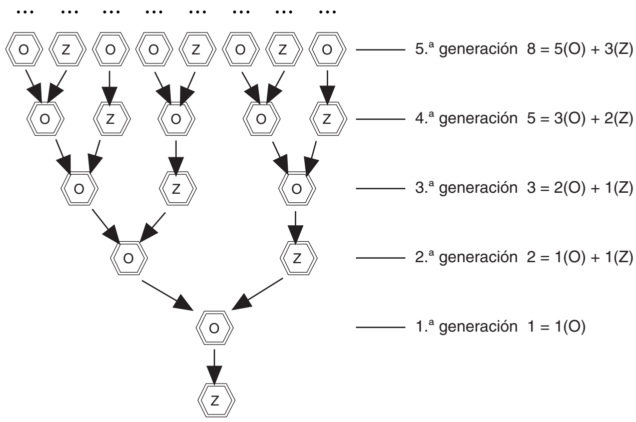
Penúltima jugada { G, dice el número necesario para sumar
P, el número que sea de 1 a 10

Ultima jugada { G dice un número de forma que obtiene 1

Por lo tanto, la estrategia ganadora para el primer jugador es en la 1.ª jugada decir cualquier número del 1 al 10 y en la siguiente jugada, a la vista de la suma que haya obtenido el 2.º jugador, el 1.er jugador debe decir un número de modo que deje la suma en un múltiplo de 11 más 1, y así sucesivamente en las siguientes jugadas, hasta que en la penúltima deje al 2.º jugador como resultado de la suma 89, de esta forma gana la partida.
La estrategia ganadora para el 2.º jugador es la misma: ir diciendo números del 1 al 10 que dejen como resultado de la suma al 1.er jugador un número que sea múltiplo de 11 más 1, así en todas las jugadas; en la penúltima debe dejar al 1.er jugador como resultado de la suma 89 y de esta forma ganará la partida.

3. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y LAS ABEJAS. Las abejas macho (zánganos) nacen de huevos no fecundados, es decir, sólo tienen madre. Las abejas hembra (obreras) nacen de huevos fecundados, es decir, tienen madre y padre. ¿Cuántos antecesores tiene un zángano en la décima generación anterior a él? ¿Cuántos antecesores, en total, tiene un zángano en la vigésima generación anterior a él?; de éstos, ¿cuántos son machos y cuántas hembras? ¿En qué generación anterior a este zángano tiene 17.711 antecesores?

En el siguiente diagrama vemos la genealogía de las abejas. Designamos con Z a los zánganos y con O a las obreras.



Obtenemos la sucesión:
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... que es una sucesión de Fibonacci.
• En la décima generación anterior a él un zángano tiene 89 antecesores, de los cuales 34 son machos y 55 son hembras. Como puedes ver en la siguiente tabla:

Generación	**1.ª**	**2.ª**	**3.ª**	**4.ª**	**5.ª**	**6.ª**	**7.ª**	**8.ª**	**9.ª**	**10.ª**
Antecesores	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Antecesores machos		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Antecesores hembras	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Continuando las sucesiones, obtenemos:
• En la vigésima generación anterior a él tiene 10.946 antecedores, de los cuales 4.181 son machos y 6.765 son hembras.
• En la vigésima primera generación anterior a él tiene 17.711 antecesores.

BLOQUE TEMÁTICO II:
GEOMETRÍA

UNIDAD DIDÁCTICA 8

Curvas y superficies

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Familiarizarse con algunas formas geométricas presentes en la naturaleza y en la arquitectura.
2. Conocer los diferentes tipos de coordenadas que se utilizan tanto en el plano como en el espacio.
3. Determinar los elementos de las superficies esféricas y de sus secciones planas.
4. Estudiar algunas formas geométricas relacionando sus ecuaciones con sus características geométricas.
5. Reconocer algún lugar geométrico sencillo del espacio.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Deben buscarse entre las experiencias del alumno sus conocimientos de la geometría en el plano desarrollada en los cursos precedentes.
Puede orientarse su desarrollo, poniendo el énfasis en una metodología heurística, haciendo primar los procedimientos y técnicas.
Buscaremos reforzar el razonamiento inductivo a través de la experimentación de situaciones concretas. No debe olvidarse fomentar el razonamiento deductivo mediante la aplicación de conceptos y propiedades, así como de las relaciones entre estas últimas.

Actividades iniciales

1. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas del plano que cumplen las siguientes condiciones:
***a)* Pasa por los puntos (1, 2) y (–3, 1).**
***b)* Pasa por el punto (1, –2) y tiene por vector direccional (–1, 2).**

Las ecuaciones son:
a) $x = 1 - 4t$, $y = 2 - t$
b) $x = 1 - t$, $y = -2 + 2t$

2. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas del espacio que cumplen las siguientes condiciones:
***a)* Pasa por los puntos (1, 1, 0) y (0, 1, 1).**
***b)* Pasa por el punto (1, –1, 2) y tiene por vector direccional (1, 0, 1).**

Las ecuaciones son:
a) $x = 1 - t$, $y = 1$, $z = t$
b) $x = 1 + y$, $y = -1$, $z = 2 + t$

3. Halla las ecuaciones paramétricas de los planos del espacio que cumplen las siguientes condiciones:
***a)* Pasa por los puntos (1, 1, 0) y (–1, 2, 3) y (0, 1, 2).**
***b)* Pasa por el punto (1, 2, 3) y tiene por vectores generadores (–1, 1, -2) y (0, 1, 3).**
***c)* Pasa por el punto (1, 0, 1) y tiene por vector normal (1, -1, 3).**

Las ecuaciones son:

a) $\begin{cases} x = 1 - 2t - s \\ y = 1 + t \\ 2 = 3t + 2s \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t + s \\ z = 3 - 2t + 3s \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4 + t - 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Describe las curvas siguientes dadas por sus ecuaciones paramétricas y halla sus ecuaciones cartesianas:

a) $\begin{cases} x = t - 5 \\ y = 5 - t \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t + 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$ ***d)*** $\begin{cases} x = sen\ 2t \\ y = cos\ t \end{cases}$

a) Es la recta $x + y = 0$
b) Es la recta $3x - 2y + 13 = 0$
c) Es la parábola $x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 12 = 0$
d) Es la curva de ecuación cartesiana $4y^4 + x^2 + 4y^2 = 0$.

2 Encuentra las ecuaciones paramétricas de las curvas siguientes:
a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$ ***b)*** $3x - 2y = 12$
c) $x^2 - y^2 = 25$ ***d)*** $5x^2 + 3y^2 = 30$

Las ecuaciones paramétricas buscadas son:

a) $\begin{cases} x = 2 + cos\ t \\ y = 3 + sen\ t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$

b) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -6 + 3t \end{cases}$, $t \in R$

c) $\begin{cases} x = 5/cos\ t \\ y = 5 \cdot tg\ t \end{cases}$, $t \in R$

d) $\begin{cases} x = \sqrt{6}\ cos\ t \\ y = \sqrt{10}\ sen\ t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi)$

3 Comprueba que las expresiones $x = \frac{1}{2} p\ tg^2$, $y = p\ tg\ t$ son ecuaciones paramétricas de la parábola.

Eliminando tg t se obtiene $x = \frac{1}{2p} y^2$

4 Comprueba que las expresiones
$$x = a\ \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = b\ \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$
son ecuaciones de la hipérbola.

Haz lo mismo para $x = a\ \frac{t^2 + 1}{2t}$, $y = b\ \frac{t^2 - 1}{2t}$

Eliminando t en las primeras expresiones, se obtiene
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
Lo mismo ocurre con las otras expresiones.

5 Encuentra una ecuación en coordenadas polares del tipo $\rho = f(\theta)$ para las curvas:
a) $3x - 4y = 5$ ***b)*** $4x - y^2 = 0$
c) $3x^2 + 5y^2 = 15$ ***d)*** $x^2 + y^2 = 3$

Las ecuaciones buscadas son:

a) $\rho = \frac{5}{3\ cos\ \theta - 4\ sen\ \theta}$

b) $\rho = \frac{4\ cos\ \theta}{sen^2\ \theta}$

c) $\rho = \sqrt{\frac{15}{3\ cos^2\ \theta + 5\ sen^2\ \theta}}$

d) $\rho = 3$.

6 **Encuentra las ecuaciones cartesianas de las curvas siguientes:**

a) $\rho = 2 \cos \theta$ ***b)*** $\rho = 2 / \cos \theta$

c) $\rho = 2 + \cos \theta$ ***d)*** $\rho = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen} \theta}$

Las ecuaciones cartesianas son:

a) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

b) $x = 2$

c) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 - 2xy^2 - x^2 - 2y^2 = 0$.

d) $2x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$.

7 **Comprueba que las expresiones $x = t \cos t$, y = $\operatorname{sen} t$ son ecuaciones paramétricas de una espiral. Establece a cuál de las espirales estudiadas en el texto corresponde.**

Calculando $x^2 + y^2$ que en coordenadas polares es el cuadrado del radio vector, se obtiene:

$\rho^2 = x^2 + y^2$, $\rho^2 = t^2 \cos^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t$, $\rho^2 = t^2 (\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)$,
$\rho^2 = t^2$, $\rho = t$

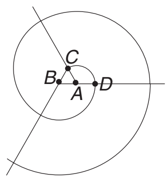
Se trata de una espiral arquimediana.

8 **Construye mediante el procedimiento explicado en el texto una espiral equiangular, de manera que el punto *A* tenga de coordenadas, medidas en centímetros (15, 0) y el punto *B* (0, –10). Describe el procedimiento para construir espirales equiangulares que giren en sentido contrario al descrito en el procedimiento del texto.**

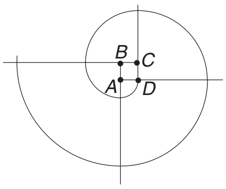
Utilizando una escuadra y siguiendo las instrucciones del texto no hay dificultad para realizar la construcción pedida.

9 **Describe la construcción de las siguientes espirales:**

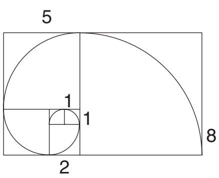
a)



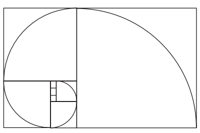
b)



c)



d)



a) Espiral de tres centros.
A partir de un triángulo equilátero se van construyendo arcos, haciendo centro en cada uno de los vértices.

b) Espiral de cuatro centros.
La construcción es análoga a la anterior, partiendo de un cuadrado.

c) Espiral áurea.
Construida con cuadrantes de circunferencias a partir de cuadros cuyos lados miden 1, 1, 2, 3, 5, 8...

d) Espiral áurea.
La construcción es análoga a la anterior.

10 **Comprueba que las funciones $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ e $y = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ son inversas, respectivamente, de $y = sh\, x$, $y = ch\, x$ e $y = Th\, x$**

Realizando la composición de cada una de ellas con su inversa, se obtiene la función identidad $f(x) = x$.

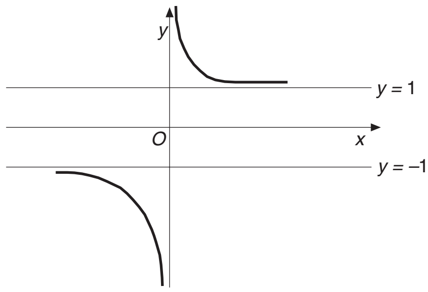
11 **Las funciones cotangente hiperbólica, secante hiperbólica y cosecante hiperbólica se definen, respectivamente:**

$y = cth\, x = \dfrac{ch\ x}{sh\ x}$ **, y** $sech\, x = \dfrac{1}{ch\ x}$

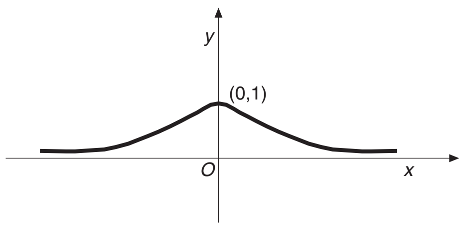
$y = cosech\, x = \dfrac{1}{sh\ x}$

Estudia sus principales propiedades y realiza su representación gráfica.

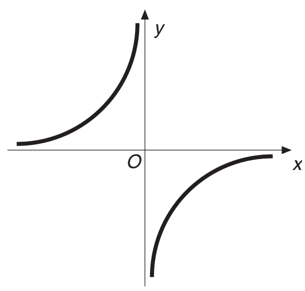
Para la función $y = Cth\, x = \dfrac{ch\, x}{sh\, x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, la gráfica es:



Para la función $y = sech\, x = \dfrac{1}{ch\, x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$, la gráfica es:



Para la función $y = cosech\, x = \dfrac{1}{sh\, x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$, la gráfica es:



12 **Comprueba que las expresiones $x = \dfrac{a}{t^2 + 1}$,**

$y = \dfrac{a}{t^2 + 1}$ **son ecuaciones paramétricas de la cisoide.**

Eliminando el parámetro *t,* se obtiene la ecuación
$x\,(x^2 + y^2) = ay^2$.

13 **Encuentra las ecuaciones en coordenadas cartesianas de la cicloide.**

Eliminando el parámetro t se obtiene la ecuación

$$x = R\ arc\ cos\ \frac{R - y}{R} - \sqrt{2\ Ry - y^2}$$

14 **Encuentra las ecuaciones en coordenadas cartesianas de las concoides de Nicomedes y de los caracoles de Pascal.**

Las concoides de Nicomedes, de ecuación polar $\rho = \dfrac{a}{cos\ \theta} \pm b$, tienen por ecuación cartesiana la expresión $(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2$.

Los caracoles de Pascal, de ecuación polar $\rho = a\ cos\ \theta + h$, tiene por ecuación cartesiana la expresión $(x^2 + y^2 - ax)^2 = h^2 (x^2 + y^2)$.

15 **Encuentra la ecuación de las siguientes superficies en otros tipos de coordenadas. (Si está expresada en cartesianas, ponerla en cilíndricas y esféricas, etc.).**
a) $x^2 + y^2 = 9z$ ***b)*** $y = 2x^2 + z$ ***c)*** $z = a$
d) $x = k$ ***e)*** $r = k$ ***f)*** $\rho = k$
g) $xy = z$ ***h)*** $\rho\ cos\ \theta\ sen\ \phi = cos\ \phi$ ***i)*** $x^2 - y^2 = k^2$

Las expresiones se recogen en la tabla que sigue.

Coordenadas cartesianas	Coordenadas cilíndricas	Coordenadas esféricas
a) $x^2 + y^2 = 9z$	$r = 9z$	$p\ sen^2\ \theta - 9\ cos\ \theta = 0$
b) $y = 2x^2 + z$	$r\ sen\ \phi = 2\ r^2\ cos^2\ \phi + z$	$2\ p\ sen^2 \theta\ cos^2\ \phi + cos\ \phi - sen\ \theta\ sen\ \phi = 0.$
c) $z = a$	$z = a$	$p\ cos\ \theta = a$
d) $z = k$	$r\ cos\ \phi = a$	$p\ sen\ \theta\ cos\ \phi = a$
e) $k^2 + y^2 = k^2$	$r = k$	$p\ sen\ \theta = k$
f) $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$	$r^2 + z^2 = k^2$	$p = k$
g) $xy = z$	$r^2\ sen\ \phi\ cos\ \phi = z$	$p\ sen^2\ \theta\ sen\ \phi\ cos\ \phi - cos\ \theta = 0$
h) $xy = z$	$r^2\ sen\ \phi\ cos\ \phi = z$	$p\ cos\ \theta\ sen\ \phi = cos\ \phi$
i) $x^2 - y^2 = k^2$	$r^2\ (cos^2\ \phi - sen^2\ \phi) = k^2$	$p^2\ sen^2\ \theta\ (cos^2\ \phi - sen^2\ \phi) = k^2$

16 **Determina las coordenadas esféricas y cilíndricas de los puntos *P*** $(\sqrt{3}, 1, -2\ \sqrt{3})$ **y *Q*** $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 1)$ **.**

Para el punto $P\ (\sqrt{3},\ 1,\ -2\sqrt{3})$,
- las coordenadas cilíndricas son: $r = 2$, $\phi = 30°$ y $z = -2\sqrt{3}$.
- las coordenadas esféricas son: $p = 4$, $\theta = 4$ y $\phi = 30°$.

Para el punto $Q\ (2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 1)$,
- las coordenadas cilíndricas son: $r = 4$, $\phi = 45°$ y $z = 1$.
- las coordenadas esféricas son: $p = \sqrt{17}$, $\theta = 75°\ 57'$ y $\phi = 45°$.

17 **Determina las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas esféricas son (2, 30°, 45°).**

Las coordenadas cartesianas son $x = 0{,}707$; $y = 0{,}707$; $z = 1{,}732$.

18 **Determina las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas cilíndricas son (2, 60°, –2).**

Las coordenadas cartesianas son: $x = 1$; $y = 1{,}732$; $z = -2$.

19 **Halla la ecuación de la superficie esférica de centro el punto *C* (1, 3, –1) y radio 3.**

La ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 2 = 0$$

20 **Halla el centro y el radio de la esfera de ecuación** $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 20 = 0$

El centro es el punto C (1, –2, 3) y el radio vale 2.

21 **Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos *P* (5, 1, 3), *Q* (1, 2, 0), *R* (–2, –2, 1) y *S* (1, 1, –1).**

La ecuación es

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 7x + 5y - 9z - 13 = 0.$$

22 **Determina la ecuación del plano tangente a la esfera** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ **en el punto (2, 4, 4).**

El plano tangente es x + 2y + 2z - 18 = 0.

23 **Calcula el radio de la circunferencia intersección del plano** $x + 2y + 2z + 5 = 0$
y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 19 = 0$**.**

La esfera tiene centro C (1, 1, 2) y radio 5.
La distancia del centro al plano es $d = 4$.
El radio de la circunferencia es $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

24 **Halla las ecuaciones, en coordenadas polares, de la esfera de centro (0, 0, 1) y radio 1.**

Las ecuaciones en polares son: $p - 2\ cos\ \theta = 0$.

25 **Averigua el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$ **y el plano** $2x - 2y + z - 2 = 0$**.**

El centro es el punto P (13/9, – 4/9, –16/9).
El radio es 4,42.

26 **Halla la superficie esférica que pasa por *A* (4, 1, –3) y *B* (3, 2, 1) y tiene su centro en la recta**

$$\frac{x - 8}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z + 4}{-1}$$

La esfera es $(x - 2)^2 + y^2 + (2 + 1)^2 = 3^2$

27 **Determina el área de una superficie esférica que es tangente a los planos** π_1 **y** π_2 **de ecuaciones**
π_1: $3x - y + 5z = 5$, π_2: $3x - y + 5z = 12$.

Las distancia entre los planos es 1,18. El radio de la esfera es 0,59 y el área de la superficie esférica es
$4\pi r^2 = 4\pi\ (0{,}59)^2 = 4{,}398$.

28 **Halla la intersección de la esfera de centro (3, 1, 0) y radio 2 con la recta de ecuaciones paramétricas** $x = 2 + t, y = t, z = 1 - t$.

La intersección de la esfera y la recta son los puntos:

$P\ (4{,}15;\ 2{,}15;\ –1{,}15)$ y $Q\ (1{,}85;\ –0{,}15;\ 1{,}15)$

29 Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio, tales que su razón de distancias a los puntos *P* (3, 4, 2) y *Q* (1, –2, 0) es 2/3.

Es la esfera de ecuación

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 – 46x – 88y –– 36z + 241 = 0$$

30 El segmento *PQ* es un diámetro de una superficie esférica, siendo *P* (7, 5, 2) y *Q* (3, 2, 2). Halla su ecuación.

La ecuación es $(x = 5)^2 + (y – 7/2)^2 + (z – 2)^2 = 25$

31 Calcula la menor distancia del punto *P* (–2, 6, –3) a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Calcula la máxima distancia entre los mismos elementos.

La menor distancia está en la recta que une el punto *P* con el centro de la esfera 0.

La distancia buscada es la diferencia entre la distancia entre los puntos *O* y *P* y el radio de la esfera. Esta distancia numérica es 5.

La distancia mayor está en la recta tangente desde el punto *P* (situada en el plano tangente). Por el teorema de Pitágoras, la distancia máxima d vale $d = \sqrt{7^2 – 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Resolución de problemas

1. PRIMOS GEMELOS. Hay infinitos pares de números primos gemelos, es decir, de primos cuya diferencia es igual a 2. Ejemplo: 7 y 5 son primos gemelos, ya que 7 – 5 = 2.

Ésta es una conjetura que está sin demostrar.

Hasta el número 100 podemos encontrar varios primos gemelos: 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31; 41 y 43; 71 y 73.

2. NÚMEROS PRIMOS GENERADOS. El polinomio $n^2 – n + 41$ cuya indeterminada *n* es entera genera números primos cuando *n* va desde –40 hasta 40. Este polinomio ¿genera primos para cualquier entero *n*?

En efecto, el polinomio $n^2 – n + 41$ genera números primos para valores de n comprendidos entre –40 y 40.

Por ejemplo:

$n = 25 \Rightarrow n^2 – n + 41 = 641$ que es un número primo.

Para cualquier valor de «n» no genera números primos, pues, por ejemplo, para $n = 41 \Rightarrow n^2 – n + 41 = 41^2 – 41 + 41 = 41^2$ que es un número compuesto, no es un número primo.

3. NÚMERO MÁGICO. Toma un número de tres cifras. Forma el número que se obtiene al escribir a la derecha del anterior el número repetido. Este número de 6 cifras lo dividimos por 7 y al cociente obtenido por 11 y al último cociente por 13. ¿Qué se observa?

Tomamos un número de tres cifras cualesquiera, 729, y le aplicamos lo que dice el problema:

$$\frac{739739}{7 \cdot 11 \cdot 13} = 739$$

Observamos que obtenemos el número de partida. Veamos que esto se cumple con cualquier número y para ello partimos de un número cualquiera *xyz*:

$xyzxyz = 100\,000x + 10\,000y + 1\,000z + 100x + 10y + z =$
$= 1\,001 \cdot (100x + 10y + z) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot xyz$

Por tanto, al dividir *xyzxyz* por 7, por 11 y por 13, obtenemos el número de partida *xyz*.

BLOQUE TEMÁTICO II:
ANÁLISIS

UNIDAD DIDÁCTICA 9

Números reales. Funciones reales

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Comprender los conceptos asociados al conjunto de los números reales.
2. Manejar intervalos, entornos y subconjuntos de R, estudiando en ellos su acotación.
3. Estudiar el dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, acotación, simetrías y periodicidad de las funciones dadas mediante su gráfica o mediante su expresión analítica.
4. Representar gráficas de funciones que se ajusten a unas condiciones dadas.
5. Saber componer funciones y encontrar la inversa de una función dada.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Revisando los conceptos relativos a números reales y a funciones reales que el alumno ya posee de cursos anteriores.
Consolidando los conceptos asociados a funciones reales de variable real mediante un tratamiento más analítico.

RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES

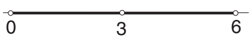
Actividades iniciales

1. Representa en la recta real los siguientes conjuntos:
***a)* [–1, 4]** ***b)* (–1, 4)** ***c)* $E(-1, 4)$**
***d)* $E^*(3, 3)$** ***e)* (–∞, 5]** ***f)* $E^+(3, 3)$**

[–1, 4] 

(–1, 4) 

E(–1, 4) = (–5, 3) 

E*(3, 3) = (0, 6) – {3} 

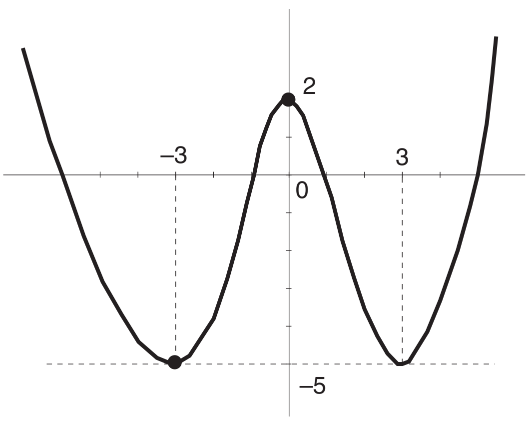
(–∞, 5) 

$E^+(3, 3)$ = (3, 6) 

2. Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. En caso afirmativo, determina, si existen, los extremos relativos, máximos y mínimos.
$A = \{x \in R \mid |x - 2| < 3\}$
$B = \{x \in R \mid 3 \le x < 4\}$
$C = (-2, 1) \cup (0, 2]$

$A = \{x \in R \mid |x - 2| < 3\} = \{x \in R \mid -1 < x < 5\}$
A está acotado superiormente por 5 e inferiormente por –1, luego, *A* está acotado. No tiene máximos ni mínimos.
$B = \{x \in R \mid 3 \le x < 4\}$
B está acotado superiormente por 4 e inferiormente por 3, luego, *B* está acotado. Tiene mínimo, el 3.
$C = (-2, 1) \cup (0, 2)$
C está acotado superiormente por 2 e inferiormente por –2, luego *C* está acotado. Tiene máximo, el 2.

3. Dibuja una gráfica de una función que responda a las siguientes características:
***a)* $Dom\, f = R$; $Im\, f = [-5, +\infty]$**
***b)* Estrictamente decreciente en (–∞, –3); estrictamente creciente en (–3, 0).**
***c)* Simétrica respecto del eje de ordenadas.**
***d)* Máximo relativo en (0, 2) y mínimo relativo en (–3,–5).**

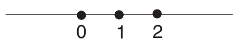


Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Representa sobre la recta real los siguientes conjuntos:
***a)* $A = \{x \in R \mid x > 3$ y $x > 5\}$**
***b)* $B = \{x \in Z \mid x \ge 4$ y $x < 6\}$**
***c)* $C = \{x \in N \mid x > -5$ y $x \le 2\}$**
***d)* $D = \{x \in R \mid x > 2{,}5$ y $x < 5{,}2\}$**
***e)* $E = \{x \in R \mid x < -1$ ó $x \ge 3\}$**
***f)* $F = \{x \in Z \mid x \le 3$ ó $x \ge 2\}$**
***g)* $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$**
***h)* $H = (-6, -2) \cap [-4, 8)$**

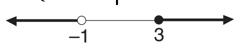
a) $A = \{x \in R \mid x > 5\} = (5, +\infty)$ 

b) $B = \{x \in Z \mid 4 \le x < 6\} = \{4, 5\}$ 

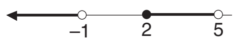
c) $C = \{x \in N \mid -5 < x \le 2\} = \{0, 1, 2\}$ 

d) $D = \{x \in R \mid 2{,}5 < x < 5{,}2\} = (2{,}5; 5{,}2)$

e) $E = \{x \in R \mid x < -1$ o $x \ge 3\} = (-\infty, -1) \cup [3, +\infty)$



f) $F = \{x \in Z \mid x \le 3$ o $x \ge 2\} = Z$

g) $G = (-\infty, -1) \cup [2, 5)$ 

h) $H = (-6, -2) \cap [-4, 8) = [-4, -2)$ 

2 Define por comprensión, dentro del conjunto de los números, los siguientes subconjuntos:
***a)* [–3, 5]** ***b)* (–3, 5]** ***c)* (–3, 5)** ***d)* [–3, 5)**
***e)* [2, +∞)** ***f)* (2, +∞)** ***g)* (–∞, 2]** ***h)* (–∞, 2)**
***i)* $E(3, 1)$** ***j)* $E^*(3, 1)$** ***k)* $E^+(3, 1)$** ***l)* $E^-(3, 1)$**
***m)* $E(1, 3)$** ***n)* $E(-2, 1)$** ***o)* $E^*(-3;0, 2)$**

a) $[-3, 5] = \{x \in R \mid -3 \le x \le 5\}$
b) $(-3, 5] = \{x \in R \mid -3 < x \le 5\}$
c) $(-3, 5) = \{x \in R \mid -3 < x < 5\}$
d) $[-3, 5) = \{x \in R \mid -3 \le x < 5\}$
e) $[2, +\infty) = \{x \in R \mid x \ge 2\}$
f) $(2, +\infty) = \{x \in R \mid x > 2\}$
g) $(-\infty, 2] = \{x \in R \mid x \le 2\}$
h) $(-\infty, 2) = \{x \in R \mid x < 2\}$
i) $E(3, 1) = (2, 4) = \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$
j) $E^*(3, 1) = (2, 4) - \{3\} = \{x \in R \mid 2 < x < 4;\ x \ne 3\}$
k) $E^+(3, 1) = (3, 4) = \{x \in R \mid 3 < x < 4\}$
l) $E^-(3, 1) = (2, 3) = \{x \in R \mid 2 < x < 3\}$
m) $E(1, 3) = (-2, 4) = \{x \in R \mid -2 < x < 4\}$
o) $E^*(-3; 0{,}2) = (-3{,}2; -2{,}8) - \{-3\} = \{x \in R \mid -3{,}2 < x < 2{,}8;\ x \ne -3\}$

3 Dibuja los intervalos $I_1 = (-\infty, 5)$, $I_2 = (-5, +\infty)$, $I_3 = (0, 8]$. Halla el conjunto $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ y define este conjunto por comprensión.

$I_1 = (-\infty, 5)$ 

$I_2 = (-5, +\infty)$ 

$I_3 = (0, 8]$ 

$I_1 \cap I_2 \cap I_3 = (0,5)$ 

$\{x \in R \mid 0 < x < 5\}$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) **$[1, 5] \cup E(7, x) = [1, 10)$**
b) **$E(3, 2) \cap E(2, +1) = (1, x)$**
c) **$(-2, 3] \cap E(x, 2) = (-1, 3)$**
d) **$[2, x) \cup [4, 8] = [2, 8]$**

a) $[1, 5] \cup (7 - x, 7+x) = [1, 10) \Rightarrow x = 3$
b) $E(3, 2) \cap E(2, 1) = (1, x) \Rightarrow (1, 5) \cap (1, 3) = (1, x) \Rightarrow x = 3$
c) $(-2, 3] \cap (x - 2, x + 2) = (-1, 3) \Rightarrow x = 1$
d) $[2, x) \cup [4, 8] = [2, 8] \Rightarrow x \in [4, 8]$

5 Estudia la acotación de los conjuntos *N, Z, Q* y *R*.

N está acotado inferiormente por 0, superiormente no está acotado; luego no está acotado.
Z, Q, R no están acotados ni superior ni inferiormente.

6 Estudia si los siguientes conjuntos están o no acotados. Determina, si existen, los extremos máximo y mínimo.

a) **$A = (-5, 7)$**
b) **$B = [-5, 7]$**
c) **$C = [-5, 7)$**
d) **$D = (-5, 7]$**
e) **$E(-3, 1)$**
f) **$F = (-6, 1) \cup [0, 3)$**
g) **$G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$**
h) **$H = [-6, 1] \cap (0, 3)$**
i) **$I = \{x \in R \mid x > 3 \text{ o } x < 1\}$**
j) **$J = \left\{x \in R \mid x = \frac{1}{3^n};\ n \in N\right\}$**

Los conjuntos *A, B, C, D* están acotados inferiormente por cualquier número menor o igual que (–5) y superiormente por cualquier número mayor o igual que 7; luego estos conjuntos están todos acotados.

- *A* no tiene máximos ni mínimos.
- *B* tiene mínimo en –5 y máximo en 7.
- *C* tiene mínimo en –5 y no tiene máximo.
- *D* tiene máximo en 7 y no tiene mínimo.
- $E(-3, 1) = (-4, -2)$ está acotado y no tiene máximo ni mínimo.
- $F = (-6, 1) \cup [0, 3) = (-6, 3)$ está acotado y no tiene máximo ni mínimo.
- $G = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ no está acotado superiormente, por tanto, *G* no está acotado.
- $H = [-6, 1] \cap (0,3) = (0, 1]$ está acotado y tiene máximo en 1.
- $I = \{x \in R \mid x > 3 \text{ o } x < 1\} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ no está acotado.
- $J = \{x \in R \mid x = \frac{1}{3^n};\ n \in N\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right\}$

  J está acotado superiormente por $\frac{1}{3}$, pero no está acotado inferiormente, luego no está acotado. Tiene máximo en $\frac{1}{3}$

7 Escribe los siguientes conjuntos en forma de intervalos y represéntalos gráficamente:

a) **$A = \{x \in R \mid |x| \le 3\}$**
b) **$B = \{x \in R \mid |x - 2| < 1\}$**
c) **$C = \{x \in R \mid |3 - x| < 2\}$**
d) **$D = \{x \in R \mid 2|x + 1| \le 5\}$**

a) $A = \{x \in R \mid |x| \le 3\} = [-3, 3]$ 

b) $B = \{x \in R \mid |x - 2| < 1\} = (1, 3)$ 

c) $C = \{x \in R \mid |3 - x| < 2\}; -2 < 3 - x < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 < -x < -1 \Rightarrow 5 > x > 1 \Rightarrow 1 < x < 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = (1, 5)$ 

d) $D = \{x \in R \mid 2|x + 1| \le 5\}$
$-5 \le 2x + 2 \le 5 \Rightarrow -7 \le 2x \le 3 \Rightarrow -3{,}5 \le x \le 1{,}5$
$D = [-3{,}5;\ 1{,}5]$ 

8 Estudia la acotación de *A* ∪ *B* y de *A* ∩ *B* sabiendo que *A* y *B* son dos conjuntos de números reales acotados.

- *A* acotado ⇒ existen P_1 y K_1 cotas inferior y superior, respectivamente, de modo que para todo $x \in A \Rightarrow P_1 \le x \le K_1$.
- *B* acotado ⇒ existen P_2 y K_2 cotas inferior y superior, respectivamente de modo que para todo $x \in B \Rightarrow P_2 \le x \le K_2$.
- Veamos si $A \cap B$ está acotado.

  $$\text{Sea } x \in A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow P_1 \le x \le K_1 \\ \text{y } x \in B \Rightarrow P_2 \le x \le K_2 \end{cases}$$

  Sea K = mínimo (K_1, K_2) y P = máximo $(P_1, P_2) \Rightarrow$
  $\Rightarrow P \le x \le K \Rightarrow (A \cap B)$ está acotado.
- Veamos si $A \cup B$ está acotado:
  Sea $x \in A \cup B \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow P_1 \le x \le K_1 \Rightarrow A \cup B \text{ acotado} \\ x \in B \Rightarrow P_2 \le x \le K_2 \Rightarrow A \cup B \text{ acotado} \\ x \in A \text{ y } x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \cup B \text{ acotado} \end{cases}$$

9 Encuentra, si existen, el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:

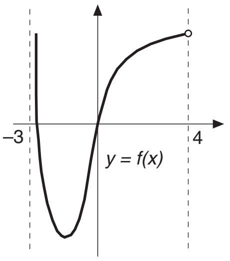
a) **$A = \{x \in R \mid 1 < x \le 3\}$**
b) **$B = \left\{\frac{n+2}{n+1} \mid n \in N\right\}$**

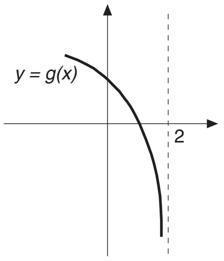
Ínfimo de *A* es 1 y supremo de *A* es 3

Ínfimo de *B* es 1 y supremo de *B* es $\frac{3}{2}$

pues $B = \left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, ...\right\}$

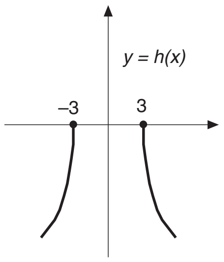
10 **Estudia el dominio de las siguientes funciones:**

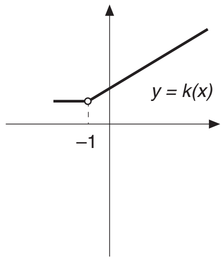




$$l(x) = x^3 - 2x^2 \qquad m(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

$$p(x) = 3^{x^2 - 9} \qquad q(x) = \ln\,(x^2 - 6x)$$





$$n(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 12} \qquad o(x) = \sqrt[4]{2x - 5}$$

$$r(x) = \cos\left(\sqrt[3]{x + 5}\right) \qquad s(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{x + 3}\right)$$

Dom f = (–3, 4)
Dom g = (–∞, 2)
Dom h = (–∞, -3] ∪ [3, +∞)
Dom k = *R* – {–1}
Dom l = *R*
Dom m = *R*
Dom n = *R* – {3, 4}
Dom o = $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$
Dom p = *R*
Dom q = (–∞, 0) ∪ (6, +∞)
Dom r = *R*
Dom s = *R* – {–3}

11 **Estudia la simetría y periodicidad de las siguientes funciones:**

$f(x) = x^4 - 2x^2$

$g(x) = \cos\,(2x)$

$h(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

$k(x) = |\operatorname{sen} x|$

$l(x) = x \cdot e^{x^2}$

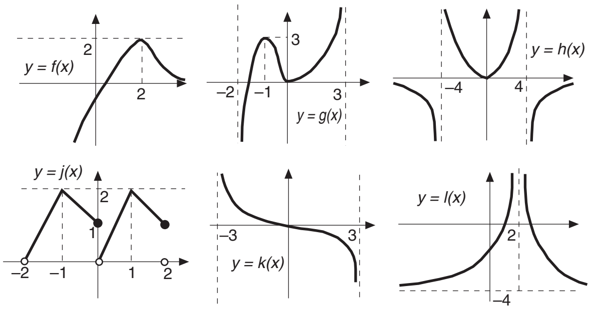
$m(x) = |x - 2|$

$n(x) = [x - E[x]]^2$

$o(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

- $f(x) = x^4 - 2x^2$; $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow$ simétrica respecto al eje de ordenadas. No periódica.
- $g(x) = \cos 2x$; $g(-x) = \cos 2(-x) = \cos 2x \Rightarrow g(x) = g(-x)$ $\Rightarrow$ simétrica respecto al eje de ordenadas. Periódica de período ∏.
- $h(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. No simétrica, ni periódica.
- $k(x) = |\operatorname{sen} x|$. Simétrica respecto al eje de ordenadas. Periódica de período ∏.
- $l(x) = x\, e^{x^2}$. Simétrica respecto al origen de coordenadas, pues $l(-x) = -x\, e^{x^2} = -l(x)$. No periódica.
- $m(x) = |x - 2|$ ni simétrica ni periódica.
- $n(x) = [x - E(x)]^2$ no simétrica y periódica de período 1.
- $o(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Simétrica respecto al origen de coordena pues $o(-x) = -o(x)$. No periódica.

12 **Analiza en cada una de las siguientes funciones el dominio, el recorrido, la simetría, la periodicidad, la acotación, monotonía, extremos absolutos y relativos.**



$\boxed{y = f(x)}$

Dom f = R; Im f = (-∞, 2]; ni simétrica ni periódica; Acotada superiormente por 2; estrictamente creciente de (–∞, 2) y estrictamente decreciente (2, +∞). Máximo relativo en (2, 2).

$\boxed{y = g(x)}$

Dom g = (–2, 3); *Im g = R*; ni simétrica ni periódica; no acotada; Estrictamente creciente en (–2, –1) ∪ (0, 3) y estrictamente decreciente en (–1, 0). Máximo relativo en (–1, 3) y mínimo relativo en (0, 0).

$\boxed{y = h(x)}$

Dom h = (–∞, –4) ∪ (–4, 4) ∪ (4, +∞) = R – {–4, 4}; *Im h = R*; simétrica respecto al eje de ordenadas; no periódica; no acotada; estrictamente creciente en (0, 4) ∪ (4, +∞) y estrictamente decreciente en (–∞, –4) ∪ (–4, 0). Mínimo relativo en (0, 0).

$\boxed{y = j(x)}$

Dom j = R; Im j = (0, 2]; no simétrica; periódica de período 2; acotada inferiormente por 0 y superiormente por 2. Estrictamente creciente en (0, 1) y estrictamente decreciente en (1, 2), considerando la función en (0, 2).

$\boxed{y = k(x)}$

Dom k = (–3, 3); *Im k = R*; simétrica respecto al origen de coordenadas; no periódica; no acotada; estrictamente decreciente en (–3, 3).

$\boxed{y = l(x)}$

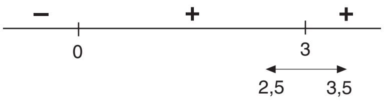
Dom $l = R - \{2\}$; *Im* $l = (-4, +\infty)$; ni simétrica ni periódica; acotada inferiormente por -4, en general no acotada; estrictamente creciente en $(-\infty, 2)$ y decreciente estrictamente en $(2, +\infty)$.

13 **Prueba, usando las definiciones de extremos relativos, que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ tiene un mínimo relativo en el punto $(1, -4)$ y un máximo relativo en el punto $(3, 0)$.**

- Para probar que existe un mínimo relativo en $(1, -4)$ tomamos un entorno $E^*(1; 0{,}5)$ $\forall x \in E^*(1; 0{,}5) \Rightarrow f(x) > f(1)$ $\Rightarrow f(x) - f(1) > 0 \Rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x - (-4) > 0$.
  Es decir: $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0$.
  Veamos el signo de $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4)$

  Luego $\forall x \in E^*(1; 0{,}5) \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $x = 1$; $y = f(1) = -4$.

- Para probar que existe un máximo relativo en $(3, 0)$ tomamos un entorno $E^*(3; 0{,}5)$ y veamos que $f(x) < f(3)$ $\forall x \in E^*(3; 0{,}5)$.
  Veamos que $f(x) - f(3) < 0 \Rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x < 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x > 0 \Rightarrow x(x-3)^2 > 0$



  $\Rightarrow \forall x \in E^*(3; 0{,}5) \Rightarrow f(x) < f(3)$ luego tiene máximo relativo en $(3, 0)$.

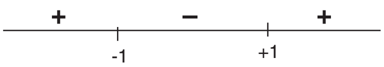
14 **Resuelve las ecuaciones:**

a) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$ ***b)*** $x^2 - 2\,|x| - 3 = 0$

a) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$

Resolvemos esta inecuación: $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$

Hallamos los ceros y estudiamos los signos: $x = 1$ $x = -1$



Solución: $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

b) $x^2 - 2\,|x| - 3 = 0$ $\quad |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

- Si $x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$
  $\Rightarrow \boxed{x = 3}\ \boxed{x = -1}$. Sólo vale $\boxed{x = 3}$, pues $x \geq 0$
- Si $x < 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}\ \boxed{x = -3}$
  Sólo vale $\boxed{x = -3}$, pues $x < 0$

15 **Dada la función $f(x) = ln\left[\dfrac{1-x}{1+x}\right]$, demuestra que $\forall\, a,b \in (-1, 1)$ se cumple que: $f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$**

$f(a) = ln\,\dfrac{1-a}{1+a}$

$f(b) = ln\,\dfrac{1-b}{1+b}$

$f(a) + f(b) = ln\,\dfrac{1-a}{1+a} + ln\,\dfrac{1-b}{1+b} = ln\left[\left[\dfrac{1-a}{1+a}\right]\cdot\left[\dfrac{1-b}{1+b}\right]\right] =$

$= ln\,\dfrac{1 + ab - a - b}{1 + a + b + ab} \quad (1)$

$f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right) = ln\left[\dfrac{1 - \dfrac{a+b}{1+ab}}{1 + \dfrac{a+b}{1+ab}}\right] = ln\,\dfrac{1 + ab - a - b}{1 + a + b + ab} \quad (2)$

Como (1) = (2), queda probada la igualdad pedida.

16 **Sabiendo que $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$, halla $f(x)$.**

$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

Hacemos $x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$

$f(t) = (t-1)^2 - 3(t-1) + 2 = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = t^2 - 5t + 6$, luego:

$$\boxed{f(x) = x^2 - 5x + 6}$$

17 **Para qué valores de «a» la función $f(x) = x^3 + ax$ es estrictamente creciente en todo su dominio de definición.**

f es estrictamente creciente si siendo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$

$f(x_1) = x_1^3 + ax_1$

$f(x_2) = x_2^3 + ax_2$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 + ax_1 - (x_2^3 + ax_2) = (x_1^3 - x_2^3) + a(x_1 - x_2)$

$(x_1^3 - x_2^3) + a(x_1 - x_2) < 0$

$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2 + a) < 0 \quad (1)$

Como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$. La igualdad (1) será cierta si $x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2 + a > 0$

$\Rightarrow \boxed{a > 0}$, pues como $x_1 < x_2$, entonces

$x_1^2 + x_2 x_1 + x_2^2 > 0 \Rightarrow$ queda $\underline{a > 0}$.

18 **Indica cuáles de las siguientes funciones son pares, cuáles impares y cuáles ni pares ni impares:**

$f(x) = ln\left[x + \sqrt{1 + x^2}\right]$ $\qquad g(x) = |x| - x^2$

$h(x) = sen\ x + cos\ x$ $\qquad k(x) = log\left[\dfrac{2-x}{2+x}\right]$

- $f(x) = ln\left[x + \sqrt{1 + x^2}\right]$
  $f(-x) = ln\left[-x + \sqrt{1 + (-x)^2}\right] = ln\left[-x + \sqrt{1 + x^2}\right]$
  $-f(-x) = -ln\left[-x + \sqrt{1 + x^2}\right] = ln\left[-x + \sqrt{1 + x^2}\right]^{-1} =$

$= ln \dfrac{1}{-x + \sqrt{1 + x^2}} = ln \dfrac{-x - \sqrt{1 + x^2}}{(-x + \sqrt{1 + x^2})\,(-x - \sqrt{1 + x^2})} =$

$= ln\left[x + \sqrt{1 + x^2}\right]$

Como $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f$ es una función impar.

- $g(x) = |x| - x^2$; $g(-x) = |-x| - (-x)^2 = |x| - x^2$
  g es una función par, pues $g(x) = g(-x)$
- $h(x) = sen\,x + cos\,x$; $h(-x) = sen(-x) + cos(-x) =$
  $= -sen\,x + cos\,x \Rightarrow h(x)$, no es ni par ni impar
- $k(x) = log\left(\dfrac{2 - x}{2 + x}\right)$

  $k(-x) = log\left[\dfrac{2 - (-x)}{2 + (-x)}\right] = log\left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right)$

  $-k(-x) = -log\left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right) = log\left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right)^{-1} = log\left(\dfrac{2 - x}{2 + x}\right)$

  Luego, como $k(x) = -k(-x) \Rightarrow k(x)$, es una función impar.

19 **Demuestra que $f(x) = x^n$ con $n \in N$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Demuestra, asimismo, que en $(-\infty, 0)$ la función es estrictamente creciente si n es impar y estrictamente decreciente si n es par.**

- $f(x) = x^n$
  $\forall\, x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$ hemos de demostrar:
  $f(x) = x^n \Rightarrow f(0) = 0$
  Si $x > 0 \Rightarrow x^n > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)\ \forall n \Rightarrow$
  $\Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$
- Veamos que pasa si $x < 0$:
  $x^n < 0$ si n es impar $\Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f$ creciente
  $x^n > 0$ si n es par $\Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f$ decreciente

20 **Dadas las funciones $f(x) = 1$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; halla las funciones:**

a) $g \circ f \circ h$ ***b)*** $f \circ g \circ h$ ***c)*** $h \circ g \circ f$

a) $(g \circ f \circ h)\,(x) = (g \circ f)\left[h(x)\right] = (g \circ f)\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right) =$

$= g\left[f\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)\right] = g(1) = \boxed{2}$

b) $(f \circ g \circ h)\,(x) = (f \circ g)\left[h(x)\right] = (f \circ g)\left[\dfrac{1}{x^2 + 1}\right] =$

$= f\left[g\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)\right] = f\left[\left(\dfrac{1}{x^2 + 1}\right)^2 + 1\right] = \boxed{1}$

c) $(h \circ g \circ f)\,(x) = (h \circ g)\left[f(x)\right] = (h \circ g)\left[1\right] =$

$= h\left[g(1)\right] = h\left[2\right] = \dfrac{1}{2^2 + 1} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

21 **La función $f(x) = \left(\dfrac{x + 2}{x}\right)^3$ es una función compuesta de dos funciones, ¿cuáles son?**

$f(x) = (g \circ h)\,(x)$ siendo $h(x) = \dfrac{x + 2}{x}$ y $g(x) = x^3$

Comprobación:

$(g \circ h)\,(x) = g\left[h(x)\right] = g\left[\dfrac{x + 2}{x}\right] = \left(\dfrac{x + 2}{x}\right)^3 = f(x)$

21 **Sea la función $f(x) = \dfrac{3x - 1}{4}$ y $g(x) = 2 - 5x$. Comprueba que $\left[f \circ g\right]^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.**

- $(f \circ g)\,(x) = f\left[g(x)\right] = f\left[2 - 5x\right] = \dfrac{3(2 - 5x) - 1}{4} = \dfrac{5 - 15x}{4}$

  $y = \dfrac{5 - 15x}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5 - 4y}{15} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{5 - 4x}{15}$

- $f(x) = \dfrac{3x - 1}{4} \Rightarrow y = \dfrac{3x - 1}{4} \Rightarrow x = \dfrac{1 + 4y}{3} \Rightarrow$

  $\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1 + 4x}{3}$

- $g(x) = 2 - 5x \Rightarrow y = 2 - 5x \Rightarrow x = \dfrac{2 - y}{5} \Rightarrow$

  $\Rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{2 - x}{5}$

  $(g^{-1} \circ f^{-1})\,(x) = g^{-1}\left[f^{-1}(x)\right] = g^{-1}\left[\dfrac{1 + 4x}{3}\right] =$

  $= \dfrac{2 - \dfrac{1 + 4x}{3}}{5} = \dfrac{5 - 4x}{15} \Rightarrow \boxed{(g^{-1} \circ f^{-1})\,(x) = \dfrac{5 - 4x}{15}}$

Luego queda probado que: $(f \circ g)^{-1}\,(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})\,(x)$.

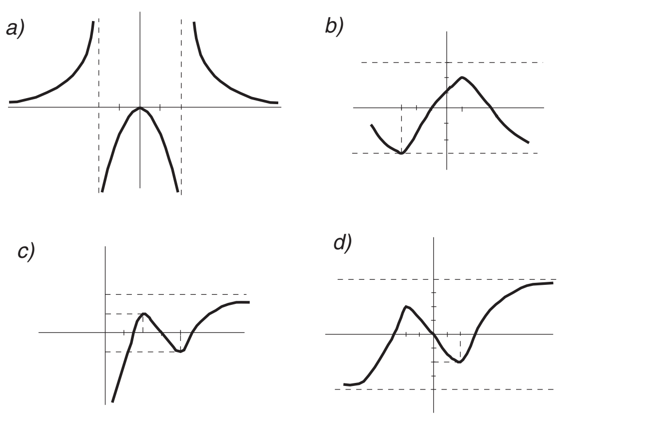
23 **Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones que verifican las siguientes condiciones:**

a) ***Dom f = R* – {+2, –2}; *Im f = R*; estrictamente creciente en (–∞, –2) ∪ (–2, 0); estrictamente decreciente en (0, +2) ∪ (2, +∞) y *f* es par.**

b) ***Dom f = R*; *Im f* = [–3, 3); mínimo relativo en (–3, –3) y máximo relativo en el punto (1, 2).**

c) ***Dom f* = (0, +∞); f acotada superiormente por 2; máximo relativo en (2, 1) y mínimo relativo en el punto (4, –1).**

d) ***Dom f = R*; *Im f* = (–4, 4); máximo relativo en (–2, 2); mínimo relativo en el punto (2, –2) y *f* impar.**



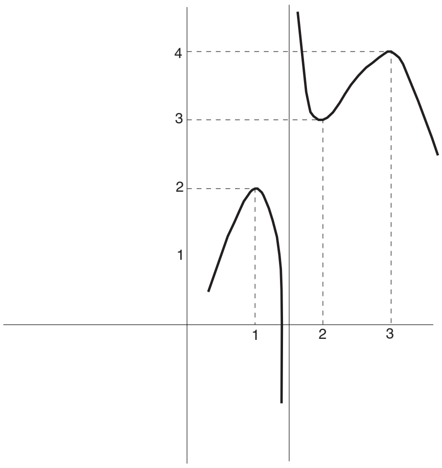
24 **Encuentra el dominio de las siguientes funciones:**

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \qquad g(x) = \frac{e^x}{x} \qquad h(x) = \frac{x}{e^x}$$

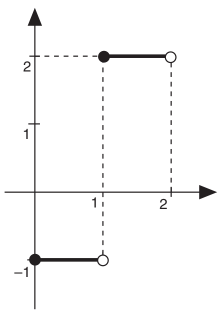
Dom f $= R^+ - \{0\} \Rightarrow$ *Dom f* $= (0, +\infty)$
Dom g $= R - \{0\}$
Dom h $= R$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

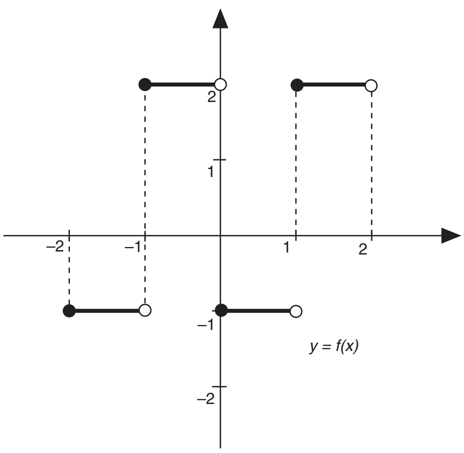
25 **Dibuja, si es posible, la gráfica de una función *f* que verifique *f*(1) = 2, *f*(2) = 3, *f*(3) = 4 y que alcance en *x* = 1 y *x* = 3 sendos máximos relativos y en *x* = 2 un mínimo relativo.**



26 **La figura adjunta representa la gráfica de una función $y = f(x)$ en el intervalo [0, 2). Dibuja la gráfica de dicha función en el intervalo [–2, 2) y determina su expresión analítica en cada uno de los siguientes casos:**
***a)* *f* es periódica de período 2.**
***b)* *f* es par.**
***c)* *f* es impar.**

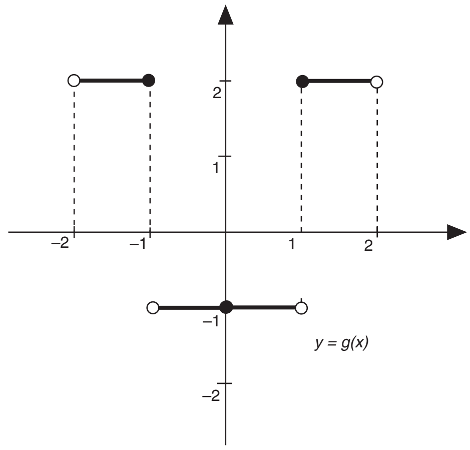


a)



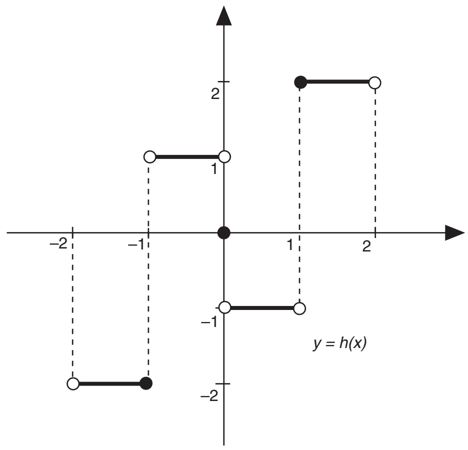
$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } 0 \le x < 1 \text{ y } -2 \le x < -1 \\ 2 \text{ si } 1 \le x < 2 \text{ y } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

b)



$$g(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } -1 < x < 1 \\ 2 \text{ si } -2 < x \le -1 \text{ y } 1 \le x < 2 \end{cases}$$

c)



$$h(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } -2 < x \le -1 \\ 1 \text{ si } -1 < x \le 0 \\ -1 \text{ si } -0 \le x < 1 \\ 2 \text{ si } 1 \le x < 2 \\ \text{o si } x = 0 \end{cases}$$

27 **Estudia el dominio de las funciones:**

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) \qquad g(x) = \frac{x\,(\ln x)^2}{(x-1)^2}$$

Dom f $= \left\{x \in R \,\middle|\, \frac{x+2}{x^2} > 0\right\} = [-2, 0) \cup (0, +\infty)$

Dom g $= \{x \in R \,|\, (x-1)^2 \neq 0 \text{ y } x > 0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ *Dom f* $= (0, 1) \cup (1, +\infty)$

28 **Un establecimiento de hostelería abre sus puertas a las 9 de la noche, sin ningún cliente, y las cierra cuando todos se han marchado. Se supone que la función que representa el número de clientes, *C*, en función del número de horas que lleva abierto el establecimiento, *h*, es: $C = 80h - 10h^2$.**
a) **Determina el número máximo de clientes que van una determinada noche al establecimiento.**

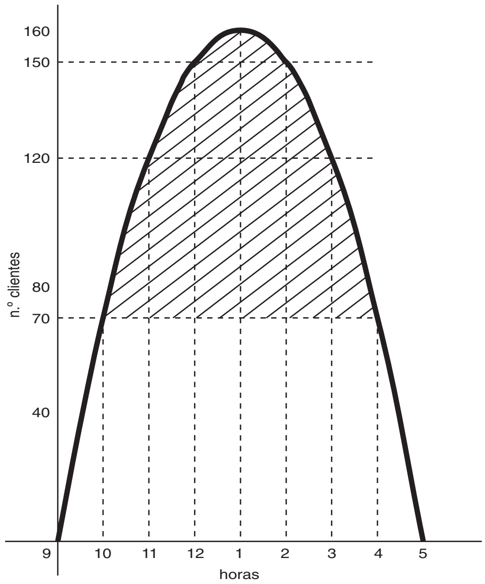
b) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70, ¿entre qué horas debemos hacerlo?

c) Si deseamos ir cuando haya menos de 150 personas y más de 70 y, además, queremos que durante nuestra estancia disminuya el número de clientes, ¿entre qué horas debemos ir?

d) ¿A qué hora cierra el establecimiento?

$C = 80\,h - 10\,h^2$ — C = número de clientes; h = n.º de horas a partir de 9

Hacemos un gráfico que ilustre la situación:



a) El número máximo de clientes es de 160.

$$b)\ 70 < 80\,h - 10\,h^2 < 150 \Rightarrow \begin{cases} 10\,h^2 - 80\,h + 70 < 0 \\ \text{y } 10\,h^2 - 80\,h + 150 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \text{Sol} = (1, 7) \\ \text{Sol} = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty) \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{Solución} = (1, 3) \cup (5, 7)$$

Hay que ir entre las 10 y las 12 de la noche o bien entre las 2 y las 4 de la madrugada.
Corresponde a la zona rayada de la gráfica.

c) Debemos ir entre las 2 y las 4 de la madrugada. Corresponde a la zona de la derecha, dentro de la zona rayada.

d) El establecimiento cierra a las 5 de la madrugada.

29 **Se sabe que $y = f(x)$, $y = g(x)$ son dos funciones crecientes en $x = a$. Analiza si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser, entonces, creciente en $x = a$. Si la respuesta es afirmativa, justifícala y en caso contrario pon un contraejemplo.**

La curva $y = f(x) - g(x)$ no tiene por qué ser creciente. Por ejemplo:
$f(x) = x$ es creciente en $x = 1$
$g(x) = 2x$ es creciente en $x = 1$
$y = f(x) - g(x) = x - 2x = -x$ es decreciente en $x = 1$.

30 **Define y dibuja la función:**
$f(x) = \big|\,|x| - 1\,\big| + \big|x^2 + 2|x|\,\big|$.

$$\big|\,|x| - 1\big| = \begin{cases} |x| - 1 \text{ si } |x| - 1 \geq 0 \\ -\big[|x| - 1\big] \text{ si } |x| - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \geq 1 \\ -x - 1 \text{ si } x \leq -1 \\ -x + 1 \text{ si } 0 < x < 1 \\ x + 1 \text{ si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\big|x^2 + 2|x|\,\big| = x^2 + 2|x| = \begin{cases} x^2 + 2x \text{ si } x \geq 0 \\ x^2 - 2x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{f}(x) = \big|\,|x| - 1\big| + \big|x^2 + 2|x|\,\big| = \begin{cases} x^2 - 3x - 1 \text{ si } x \leq -1 \\ x^2 - x + 1 \text{ si } -1 < x < 0 \\ x^2 + x + 1 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 3x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

31 **La función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punto de abscisa «e». Demuestra que se verifica: $x^e < e^x$; $\forall\, x > 0$.**

La función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ tiene un máximo relativo en el punt $p\,(e, f(e)) = \left(e, \dfrac{1}{e}\right)$. Luego $\dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{1}{e} \Rightarrow e\,\ln x < x \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln x^e < x \Rightarrow \boxed{x^e < e^x}\ \forall x > 0$

32 **Calcula el valor de $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$ sabiendo que es solución de la ecuación: $x^4 - 4\,x^2 - x + 2 = 0$**

La ecuación $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$ tiene como soluciones:

$$x = 2\ ;\ x = -1\ ;\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\ ;\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} \Rightarrow a^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 2 = a \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ ó } a = -1$$

La solución válida es $\boxed{a = 2}$, pues a no puede ser < 0

BLOQUE TEMÁTICO III:
ANÁLISIS

UNIDAD DIDÁCTICA 10

Límites de funciones

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Comprender el concepto de límite de una función en un punto.
2. Comprender el concepto de límite en el infinito.
3. Calcular límites elementales y resolver indeterminaciones.
4. Determinar las ramas infinitas y las asíntotas de una función.
5. Interpretar los límites finitos e infinitos en la representación gráfica de funciones.

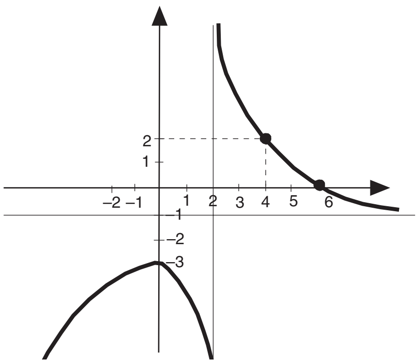
¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Utilizando la representación gráfica de funciones en la comprensión del concepto de límite de una función en un punto y de límites infinitos, así como en el cálculo de los mismos.
Induciendo al alumno al uso del rigor y la notación matemática en la definición de conceptos y demostraciones de algunas propiedades.
Insistiendo en el uso de las tablas relativas al cálculo de límites sencillos y a las operaciones con límites de funciones convergentes y funciones que tienden a infinito.
Resolviendo indeterminaciones de los tipos propuestos.

Actividades iniciales

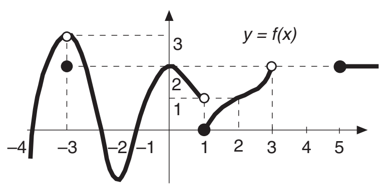
1. Representa gráficamente una función que satisfaga las siguientes propiedades:

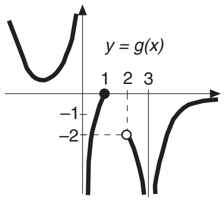
- ***Dom f = R* – {2, 4}** • **Asíntota horizontal:** $y = -1$
- **Asíntota vertital:** $x = 2$ • $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$ • $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
- $f(6) = 0; f(0) = -3$



Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Determina en las siguientes funciones los datos pedidos:





• $f(-3)$	• $f(-2)$	• $f(0)$	• $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$	• $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$
• $f(4)$	• $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$	• $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$
• $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$	• $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$
• $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$	• $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$	• $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

$\boxed{y = f(x)}$

$f(-3) = 2; f(-2) = 0; f(0) = 2; f(4)$ no definida

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 3; \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2; \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

$\boxed{y = g(x)}$

$\lim\limits_{x\to 3} g(x) = -\infty; \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = -2; \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ no existe

2 Representa gráficamente funciones que satisfagan, respectivamente, las siguientes condiciones:

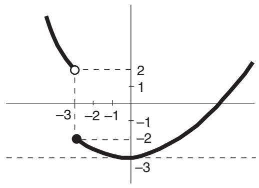
a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 2; \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = -2; f(-3) = -2;$
Dom f = R; Im f $= [-3, +\infty)$

b) g **estrictamente decreciente en (0,6); asíntota vertical en** $x = 6$; $\lim\limits_{x\to -3} g(x) = -2;$ **no existe** $g(3)$

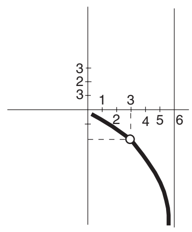
c) h **acotada inferiormente por 2;** $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = 2;$ **asíntota vertical en** $x = 2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$

d) Dom l $= (0, +\infty) = R^+$; ***Im l = R***; $l(2) = 3;$
$\lim\limits_{x\to 2^-} l(x) = 1; \lim\limits_{x\to 2^+} l(x) = 5; \lim\limits_{x\to 5^-} l(x) = -\infty;$
$\lim\limits_{x\to 5^+} l(x) = +\infty$

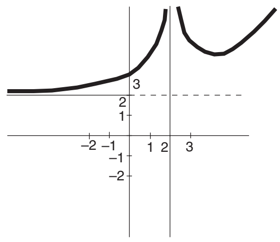
a)



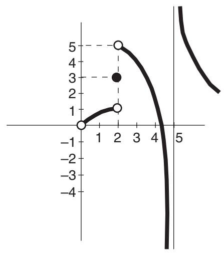
b)



c)



d)



3 Determina, si existen, las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$ ***c)*** $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Asíntotas verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +1}\ \boxed{x = -1}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

Asíntotas verticales: $x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x + 2} = \pm\infty$ no existen

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - m \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y = x - 2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

Asíntotas verticales: no existen

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

Asíntotas oblicuas: no existen

4 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

$\lim\limits_{x \to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{+\infty} = +\propto$

No existe $\lim\limits_{x \to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$

5 Halla los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}$ con su asíntota oblícua.

La asíntota oblicua tendrá por ecuación $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^3 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x^2 + x}{2x^2 - 1} = -2$$

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $\boxed{y = x - 2}$

Para hallar los puntos de corte de la asíntota oblicua con la función $f(x)$, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = \dfrac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow \text{el punto es } P\,(2,\ 0)$$

6 Calcula el límite cuando x tiende a 2 y cuando x tiende a –2 de la función $f(x) = |x^2 - 4|$.

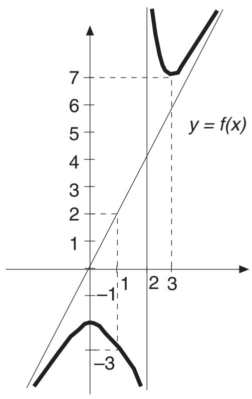
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ si } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) \text{ si } x^2 - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ si } x \leq -2;\ x \geq 2 \\ -x^2 + 4 \text{ si } -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2 + 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (-x^2 + 4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = 0$$

7 Determina en la función cuya gráfica se adjunta los datos siguientes:

- **Dom *f***
- **Im *f***
- **Monotonía**
- **Extremos relativos**
- **Asíntotas**
- **Acotación**
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2(x)]$



Dom f = $R - \{2\}$;

Im f = $(-\infty, -2] \cup [7, +\infty)$

Estrictamente creciente $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Estrictamente decreciente $(0, 2) \cup (2, 3)$

Máximo relativo $(0, -2)$; Mínimo relativo $(3, 7)$

Asíntota vertical: $x = 2$; Asíntota oblicua $y = 2x$

No acotada.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 0$

8 Siendo $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{2x+3} - 3\right)\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)}{(x - 3)\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{(x - 3)\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{2}{\left(\sqrt{2x+3} + 3\right)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

9 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-4}$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x^4$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{3}{x^3}\right]$ ***d)*** $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{x^{-2}}{5}\right]$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left[\dfrac{x^5}{3}\right]$ ***f)*** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{2}{x^5}\right]$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{x^2 + 1} + \dfrac{3}{x + 2}\right]$ ***h)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{-x}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3^{-x}$ ***j)*** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{3}\right]^x$

k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}}$ ***l)*** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}$

a) 0 *b)* $+\infty$ *c)* $+\infty$ *d)* $+\infty$ *e)* 0 *f)* 0

g) 0 *h)* 0 *i)* $+\infty$ *j)* 0 *k)* $+\infty$ *l)* $-\infty$

10 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\right]$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to 2}\,[x-1]^{\frac{3}{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]$ ***d)*** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ ***f)*** $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1+x}{2+x}\right]^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}\right]$ ***h)*** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{3x^2-5}{[3x^2+x]}\right]^{x^2-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$ ***j)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}$ ***l)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+1}\cdot\dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)\,(x^2+4)}{(x+1)\cdot x}=\dfrac{32}{6}=\dfrac{16}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}\overset{1^\infty}{=}e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3}{x-2}\cdot(x-1-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}3}=e^3$

c) $\lim\limits_{x\to +8}\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\overset{\infty-\infty}{=}$

$\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to +8}\dfrac{\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]\left[\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right]}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to +8}\dfrac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +8}\dfrac{\dfrac{12x}{x}-\dfrac{14}{x}}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}+\dfrac{2x}{x}-\dfrac{3}{x}}=3$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2\,(x-1)\,(x+1)}{(x-1)^2}=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +8}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +8}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}}{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=1$

f) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}\underset{\frac{0}{0}}{=}$

$\underset{\frac{0}{0}}{=}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}\underset{\frac{0}{0}}{=}$

$\underset{\frac{0}{0}}{=}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\,(\sqrt{x}+1)}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}\underset{1^\infty}{=}e^{\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-1)\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}-1\right)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(x^2-1)\;(-5-x)}{3x^2+x}}=e^{-\infty}=0$

i) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{2}{(x-2)}}=+\infty$

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)\,(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)\,(\sqrt{x+3}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)\,(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\,(\sqrt{x+3}+2)=8$

k) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}}\overset{1^\infty}{=}e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+4}{x+4}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cdot(x^2-x)}{(x-1)\,(x+4)}}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{(x+4)}}=e^{\frac{1}{5}}$

l) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x^2+5}-3)\,(\sqrt{x^2+5}+3)\,(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)\,(\sqrt{x+7}-3)\,(\sqrt{x+7}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)\,(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)\,(\sqrt{x^2+5}+3)}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)\,(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}=4$

11 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\;(5x)}{sen\;(2x)}$ ***b)*** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg^2\;(x-2)}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\;(7x)}{4x^2}$ ***d)*** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-\sqrt{9x^2+4x-2}}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\,[1+3x]^{\frac{4}{x}}$ ***f)*** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{2x^2+3}{4x^2+5}\right]^{\frac{x}{2}}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ln\;(x-1)}{2x-4}$ ***h)*** $\lim\limits_{x\to -\infty}[ln\;(2x-3)-ln\;(x+1)]$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{2x}$ ***j)*** $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ a>0}}\dfrac{x^2-2ax+a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{2x-1}{2x+5}\right]^{\sqrt{x^2+3x}-x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,(5x)}{sen\,(3x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg^2\,(x-2)}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)}{(x+2)}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\,(7x)}{4x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(7x)^2/2}{4x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^2}{8x^2}=\dfrac{7}{8}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-\sqrt{9x^2+4x-2}}{3}\overset{\infty-\infty}{=}$

$\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(3x-\sqrt{9x^2+4x-2})\,(3x+\sqrt{9x^2+4x-2})}{3\,(3x+\sqrt{9x^2+4x-2})}=$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 4x}{9x + 3\sqrt{9x^2 + 4x - 2})} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{4x}{x}}{\frac{9x}{x} + 3\sqrt{\frac{9x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{2}{x^2}})} = \frac{-4}{9 + 3\sqrt{9}} = \frac{-4}{18} = \frac{-2}{9}$$

e) $\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{4}{x}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \to 0} \frac{4}{x}(1+3x-1)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{12x}{x}} = e^{12}$

f) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{4x^2 + 5}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{2}{4}\right)^{-\infty} = 0$

g) $\lim_{x \to 2} \frac{ln\,(x - 1)}{2x - 4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{ln\,[1 + (x - 2)]}{2x - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{2x - 4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{2\,(x - 2)} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x \to +\infty} [ln\,(2x - 3) - ln\,(x + 1)] \overset{\infty - \infty}{=}$

$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} ln \left(\frac{2x - 3}{x + 1}\right) = ln\,2$

i) $\lim_{x \to 0} \frac{2^{3x} - 1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3x \cdot ln\,2}{2x} = \frac{3}{2}\,ln\,2$

j) $\lim_{\substack{x \to a \\ a > 0}} \frac{x^2 - 2ax + a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to a} \frac{(x - a)^2\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})\,(\sqrt{x} + \sqrt{a})} =$

$= \lim_{x \to a} (x - a)\,(\sqrt{x} + \sqrt{a}) = 0$

k) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 5}\right)^{\sqrt{x^2+3x} - x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 1}\right)^{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x} - x} \overset{1^{\infty - \infty}}{=}$

$\overset{1^{\infty - \infty}}{=} 1^{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x} - x)(\sqrt{x^2+3x} + x)}{\sqrt{x^2+3x} + x}} = 1^{\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x}} = 1^3 = 1$

12 Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^3 - 9x}$

Asíntotas verticales: son los ceros del denominador

$$x^3 - 9x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}\ \boxed{x = 3}\ \boxed{x = -3}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 + 3}{x^3 - 9x} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

13 Calcula el valor de a ($a \neq 0$) para que se verifique

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1}\right]^{ax} = e^{-5}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1}\right)^{ax} \underset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \to +\infty} ax\left(\frac{x^2+5x}{x^2+1} - 1\right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{ax\,(5x-1)}{x^2+1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{5ax^2 - ax}{x^2+1}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{5a} \Rightarrow e^{5a} = e^{-5} \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

14 Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$ y estudia si la gráfica corta a las asíntotas.

Asíntotas verticales: son los ceros del denominador

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 4}\ \boxed{x = -1}$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = \pm\infty$ no tiene

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 - 3x^2 - 4x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} - x\right) \overset{\infty - \infty}{=}$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 4x - 2}{x^2 - 3x - 4} = 4$$

La asíntota oblicua es $y = x + 4$.
Veamos si la curva corta a esta asíntota y, para ello, resolvemos el sistema:

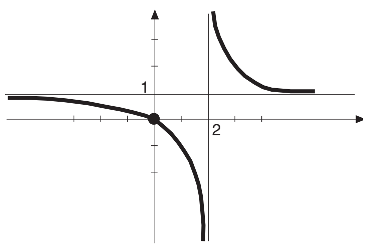
$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} \\ y = x + 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = x + 4 \Rightarrow \\ x = -\frac{7}{8},\ y = \frac{25}{8} \end{array}$$

Se cortan en el punto $\left(-\frac{7}{8}, \frac{25}{8}\right)$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

15 Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$



16 Encuentra las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$

¿Cuántas asíntotas oblicuas puede tener una función racional?, ¿cuántas horizontales?, ¿cuántas verticales?

Asíntotas verticales: $\boxed{x = 2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \pm\infty$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 3}{2x - 4}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{2x^2 - 4x} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 3}{2x - 4} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 3}{2x - 4} = 1$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y = \frac{1}{2}x + 1}$

- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas oblicuas correspondientes a los límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a los límites cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales como le pasa a las funciones tangente, cotangente, etc.

17 Determina el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right] = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{4x + 5}{4x + 3}\right]^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{4x^2 + 1}{4x^2 + \Pi}\right]^{ax^2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x \overset{\infty - \infty}{=}$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4x + 5}{4x + 3}\right)^x \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{4x+5}{4x+3} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{4x+3}} = e^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{4x^2 + \Pi}\right)^{ax^2} \underset{a \neq 0}{\overset{1^\infty}{=}} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} ax^2\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\Pi} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a\,(1-\Pi)\,x^2}{4x^2+\Pi}} =$$

$$= e^{\frac{a\,(1-\Pi)}{4}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{1 - \Pi}}$$

18 Calcula los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}\right]$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{8}}\right]$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{3x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x)^2}{3x^2} = \dfrac{4}{3}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{8}} \overset{\infty - \infty}{=}$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{11}{8}}{\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}} = \frac{1}{2}$$

19 Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

***a)* Si $a \notin Dom\, f$, ¿puede existir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?**

***b)* Si $a \in Dom\, f$, ¿puede ser $x = a$ asíntota vertical?**

a) Si. Por ejemplo $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

$0 \notin Dom\, f$, pero existe $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$

b) No es posible pues las asíntotas verticales son los valores de x para los cuales $y \to \pm\infty$.

20 Discute el siguiente límite en función de los valores de a:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x + 4} - \sqrt{ax}\right]$$

1.º Si $a = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x + 4} - \sqrt{ax} = +\infty$

2.º Si $a \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x + 4} - \sqrt{ax} \overset{\infty - \infty}{=}$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{3x + 4} - \sqrt{ax}\right)\left(\sqrt{3x + 4} + \sqrt{ax}\right)}{\sqrt{3x + 4} + \sqrt{ax}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 4 - ax}{\sqrt{3x + 4} + \sqrt{ax}} = \begin{cases} 0 \text{ si } a = 3 \\ -\infty \text{ si } a > 3 \\ +\infty \text{ si } 0 < a < 3 \end{cases}$$

21 Calcula los siguientes límites:

- $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right]$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg^2\, x - x^2}{x^2}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} \left(\dfrac{1}{x}\right)$

- $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right) \overset{\infty - \infty}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x + 1 - 3}{1 - x^3} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{1 - x^3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)\,(x + 2)}{(x^2 + x + 1)\,(1 - x)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x + 2)}{(x^2 + x + 1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2\, x - x^2}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2\, x}{x^2} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2} - 1 =$
  $= 1 - 1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{sen\, x}{x} = 0$, pues $sen\, x \in [-1,1]$
- $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, pues $sen\, \dfrac{1}{x} \in [-1,1]$

$\boxed{22}$ Calcula el valor de m que haga cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\frac{3-x}{2-x}\right]^{mx} = \frac{e}{e^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3-x}{2-x}\right)^{mx} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty} mx\left(\frac{3-x}{2-x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{mx}{2-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} e^{-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-m} = \frac{e}{e^2} \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

$\boxed{23}$ Obtén las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$$

Asíntotas verticales: $\boxed{x = 2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2} = \pm\infty$ no tiene.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2 + x - 5}{x - 2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 5}{x - 2} - x\right) \overset{\infty - \infty}{=}$$

$$\overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = 3$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y = x + 3}$

$\boxed{24}$ Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas y en caso afirmativo hállalas:

$$f(x) = ln\,(x - 1)$$
$$g(x) = e^{x-1}$$

- $f(x) = ln\,(x - 1)$

Para $x = 1$ $y \to -\infty$ tiene «media» asíntota vertical en $\boxed{x = 1}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\,(x - 1) = +\infty$ no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{ln\,(x - 1)}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} ln\,(1 - x) - 0 \cdot x = +\infty$$

No tiene asíntotas oblicuas.

- $g(x) = e^{x-1}$

Asíntotas verticales: no tiene.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{x-1} = +\infty\ ;\ \lim_{x\to -\infty} e^{x-1} = 0$$

tiene «media» asíntota horizontal $\boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

BLOQUE TEMÁTICO III:
ANÁLISIS

UNIDAD DIDÁCTICA 11

Continuidad de las funciones

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Comprender el concepto de función continua en un punto.
2. Interpretar y clasificar las discontinuidades de una función dada mediante una gráfica o de forma analítica.
3. Estudiar la continuidad de funciones dadas haciendo uso de la continuidad de las funciones elementales y de las operaciones con funciones continuas.
4. Valorar la gran utilidad que tiene la representación gráfica de una función en el estudio de la continuidad.

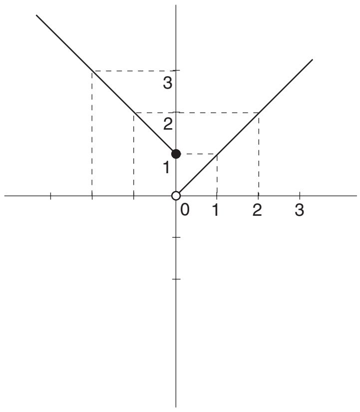
¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Utilizando profusamente las representaciones gráficas de funciones en la comprensión del concepto de continuidad de una función y en la clasificación de las discontinuidades que puedan presentar.
Mediante funciones definidas a trozos estudiando continuidades laterales por medio de límites.
Redefiniendo funciones que presentan discontinuidades evitables en alguno de los puntos.

Actividades iniciales

1. Representa gráficamente la siguiente función y estudia su continuidad en $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 \text{ si } & x \le 0 \\ x \text{ si } & x > 0 \end{cases}$$



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x + 1 = 1 = f(0)$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \ne f(0)$

En $x = 0$ la función no es continua.

2. ¿Puedes definir la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ en algún punto de modo que f sea continua en todo R?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

No es continua en $x = 1$, pues no está definida. Evitemos la discontinuidad, definiéndola:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x - 1} & \text{si } x \ne 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3. Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \le 0 \\ 1 - x^2 \text{ si } 0 < x \le 1 \\ x \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$ y $x = 1$.

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1$

  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2) = 1$

  $f(0) = e^0 = 1$

Luego existe $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, por tanto esta función es continua en $x = 0$.

- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1 - x^2) = 0$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1$

  $f(1) = 1 - 1^2 = 0$

Por tanto, $f(x)$ es continua por la izquierda en $x = 1$, pero no lo es por la derecha.
La función $f(x)$ no es continua en $x = 1$.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases} 5 - \dfrac{|x|}{x} \text{ si } x \ne 0 \\ 5 \text{ si } x = 0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \le 2 \\ x + 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} \text{ si } x<>3 \ (x\ne 3) \\ 6 \text{ si } x = 3 \end{cases} \qquad l(x)=\begin{cases} 2x-1 \text{ si } x > -1 \\ 3 \text{ si } x \le -1 \end{cases}$$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 5 - \dfrac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} 5 - \dfrac{(-x)}{x} = 6$

  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 5 - \dfrac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 5 - \dfrac{x}{x} = 4$

  $f(0) = 5$

  $f(x)$ no es continua ni por la derecha, ni por la izquierda en $x = 0$.

- $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 3 = g(2)$

  $\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 1) = 3 = g(2)$

  $g(x)$ es continua en toda la recta real.

- $\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3^-} \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} (x + 3) = 6$

  $\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} (x + 3) = 6$

  $h(3) = 6$

  $h(x)$ es continua en toda la recta real.

- $\lim_{x\to -1^-} l(x) = \lim_{x\to -1^-} 3 = 3$

  $\lim_{x\to -1^+} l(x) = \lim_{x\to -1^+} (2x - 1) = -3$

  $l(-1) = 3$

  $l(x)$ es continua por la izquierda en $x = -1$, pero no lo es por la derecha. Luego $l(x)$ no es continua en $x = -1$.

2 Calcula K, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo R.

$$f(x)=\begin{cases} sen\ (3x) \text{ si } x \le \dfrac{\Pi}{2} \\ 2k + cos\ (2x) \text{ si } x > \dfrac{\Pi}{2} \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} \text{ si } x \neq 2 \\ k \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} 1+|x| \text{ si } x<0 \\ k \text{ si } x=0 \\ \dfrac{3}{2}x+1 \text{ si } x>0 \end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+2}{x^2-1} \text{ si } x \neq -1 \\ k \text{ si } x=-1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to \frac{\Pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\Pi}{2}^-} sen\,(3x) = sen\,\dfrac{3\Pi}{2} = -1$

  $\lim\limits_{x \to \frac{\Pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\Pi}{2}^+} 2k + cos\,(2x) = 2K + cos\Pi = 2k - 1$

  $f\left(\dfrac{\Pi}{2}\right) = sen\,\dfrac{3\Pi}{2} = -1$

  $f(x)$ es continua en $x = \dfrac{\Pi}{2}$ si $2K - 1 = -1 \Rightarrow K = 0$.

  Para $K = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en todo R.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+2}{x-2} = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{x-2} = +\infty$

  $g(x)$ no es continua en $x = 2$ para ningún valor de K.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 + |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 - x = 1$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{3}{2}x + 1\right) = 1$

  $h(0) = K$.
  $h(x)$ es continua en $x = 0$ si $K = 1$.
  Para $K = 1$, la función $h(x)$ es continua es todo R.

- $\lim\limits_{x \to -1^-} l(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x+2}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)} =$

  $= \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{x-1} = -1$

  $\lim\limits_{x \to -1^+} l(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+2}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)} =$

  $= \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2}{x-1} = -1$

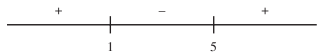
  $l(-1) = K$.
  $l(x)$ es continua en $x = -1$ si $K = -1$.
  Para $K = -1$, la función $l(x)$ es continua en todo R.

3 **Estudia la continuidad de la función**

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5|$$

$$f(x) = |x^2 - 6x + 5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \text{ si } x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ -(x^2 - 6x + 5) \text{ si } x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $(x^2 - 6x + 5)$. Los ceros de la función son $x = 1$ y $x = 5$.



Luego:
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$ si $x \leq 1$ o $x \geq 5$
$x^2 - 6x + 5 < 0$ si $1 < x < 5$.
Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \text{ si } x \leq 1 \text{ o } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 \text{ si } 1 < x < 5 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y $x = 5$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(1)$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(1)$

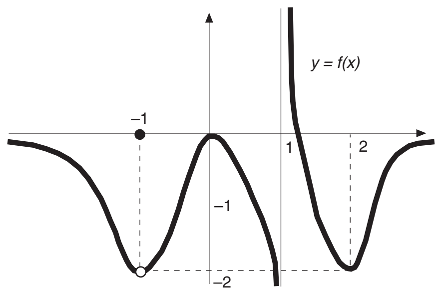
  Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (-x^2 + 6x - 5) = 0 = f(5)$

  $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (x^2 - 6x + 5) = 0 = f(5)$

  Luego $f(x)$ es continua en $x = 5$.
  Por tanto, la función $f(x)$ es continua en toda la recta real.

4 **Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$ en los puntos de abscisa $x = -1$; $x = 1$, $x = 2$. Si existiesen puntos de discontinuidad, indica el tipo. Determina el dominio, recorrido, máximos y mínimos absolutos y relativos si los hubiera, y asíntotas.**



- En $x = -1$, la función $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable.
- En $x = 1$, la función $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinitivo.
- En $x = 2$, la función $f(x)$ es continua.
- $Dom\,f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- $Im\,f = R$.
- No tiene ni máximo absoluto ni mínimo absoluto.
- Tiene dos mínimos relativos en los puntos $(-1, -2)$ y $(2, -2)$ y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.
- Asíntota vertical: $x = 1$.
  Asíntota horizontal: $y = 0$.

5 **Halla el valor de a para el cual la función f dada por $(ax - 3)$ si $x < 4$ y por $(-x^2 + 10x - 13)$ si $x \geq 4$ es continua.**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 \text{ si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 13 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

Esta función $f(x)$ es continua en todos los números reales, excepto en $x = 4$. Veamos qué ocurre en $x = 4$.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} ax - 3 = 4a - 3$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -x^2 + 10x - 13 = 11$$

$f(4) = 11$

Para que esta función sea continua en $x = 4$ se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$$

Por tanto, $4a - 3 = 11 \Rightarrow \frac{7}{2} = a$

6 Halla el dominio y estudia la continuidad de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x} - 2\sqrt{2}}$$

- $Dom\, f = \{x \in R \mid 4 + x \geq 0 \text{ y } 4 - x \geq 0\}$

  Resolvemos el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + x \geq 0 \\ 4 - x \leq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x \geq -4 \\ \Rightarrow \quad x \leq 4 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \text{ Solución } [-4,4]$$

  $Dom\, f = \{x \in R \mid x \in [-4, 4]\} = [-4, 4]$

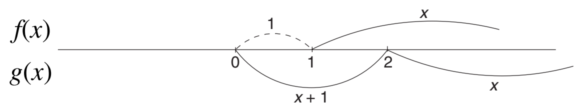
- La función $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio. Es decir es continua $\forall\, x \in [-4, 4]$.

7 Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ si } x \in [0,1) \\ x \text{ si } x \in [1,+\infty) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \in [0,2) \\ x \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f+g}$ ***b)*** $\boldsymbol{f \cdot g}$ ***c)*** $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$



a)

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x \in [0,1) \\ 2x + 1 \text{ si } x \in [1,2) \\ 2x \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$

- $\lim_{x\to 0^+} (f + g)(x) = \lim_{x\to 0^+} x + 2 = 2 = f(0)$

  No existe $\lim_{x\to 0^-} (f + g)(x)$, por tanto $(f + g)$ no es continua en $x = 0$

- $\lim_{x\to 1^-} (f + g)(x) = \lim_{x\to 1^-} (x + 2) = 3 = f(1)$

  $\lim_{x\to 1^+} (f + g)(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x + 1) = 3 = f(1)$

  La función $(f + g)$ es continua en $x = 1$.

- $\lim_{x\to 2^-} (f + g)(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x + 1) = 5 \neq f(2)$

  $\lim_{x\to 2^+} (f + g)(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x = 4 = f(2)$

  La función $(f + g)$ no es continua en $x = 2$.

  Por tanto la función $(f + g)$ no es continua en $x = 1$ y tampoco es continua en $x = 2$.

b)

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x \in [0,1) \\ x(x + 1) \text{ si } x \in [1,2) \\ x^2 \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Los mismo que para la función anterior estudiamos la continuidad en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Y obtenemos que la función $f \cdot g$ no es continua en $x = 0$ y tampoco en $x = 2$.

c)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x + 1} \text{ si } x \in [0,1) \\ \frac{x}{x + 2} \text{ si } x \in [1,2) \\ 1 \text{ si } x \in [2,+\infty) \end{cases}$$

Haciendo lo mismo que en las funciones anteriores obtenemos que la función $\frac{f}{g}$ no es continua en $x = 0$, ni en $x = 1$, ni en $x = 2$.

8 Halla los puntos de discontinuidad de la siguiente función y clasifícalos:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}}$$

Esta función $f(x)$ tiene dos puntos de discontinuidad en los ceros del denominador $x = 0$ y $x = 2$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \to +\infty$$

En $x = 0$, $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinito.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x + 2)}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(x + 2)}{x} = 2$$

En $x = 2$ $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable.

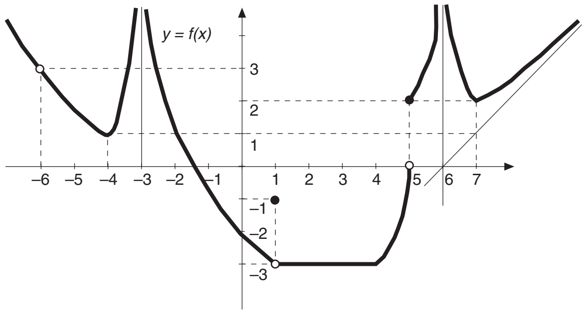
9 Demuestra que la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 8x + 2}$ corta al eje de abscisas en el intervalo (0, 2). ¿Se puede decir lo mismo de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x - 5}{x - 1}}$?

$f(x) = x^3 - 8x + 2$.

$f(x)$ es continua en $[0, 2]$ y además $f(0) = 2$ y $f(2) = -6$, es decir, signo $f(0) \neq$ signo $f(2)$, por tanto la función $f(x)$ verifica el teorema de Bolzano, luego existe $C \in (0, 2)$ tal que $f(c) =$ $= 0 \Rightarrow \exists\, c \in (0, 2)$ tal que $c^3 - 8c + 2 = 0$, es decir corta al eje de abscisas.

No podemos decir lo mismo de la función $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$, puesto que esta función no es continua en $x = 1$; luego no es continua en $[0, 2]$, por lo que no se puede aplicar el teorema de Bolzano.

10 En la siguiente función, estudia: los puntos de discontinuidad y clasificación de ellos, dominio, recorrido, extremos absolutos y relativos y asíntotas.



- En $x = -6$ tiene un punto de discontinuidad evitable. Lo mismo en $x = 1$.
  En $x = -3$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto infinito. Lo mismo en $x = 6$. En $x = 5$ tiene un punto de discontinuidad no evitable de salto finito.
- $Dom\, f = R - \{-6, -3, 6\}$
- $Im\, f = [-3, +\infty)$
- $f(x)$ tiene mínimo absoluto en –3. No tiene máximo absoluto.
- $f(x)$ tiene dos mínimos relativos en los puntos (–4, 1) y (7, 2). No tiene máximo relativo.
- Asíntotas verticales: $x = -3$; $x = 6$.
  Asíntota oblicua: $y = x - 6$.

11 Halla el valor de *a* para el cual la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 + 3x + -4}$$

tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$.

a debe valer –2, puesto que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)}{(x+4)} = \frac{3}{5}$$

Para $a = -2$, $f(x)$ tiene en $x = 1$ un punto de discontinuidad evitable.

12 Demuestra que existe un número real para el cual la igualdad siguiente es cierta: $3\, sen\, x = e^{-x} \cdot \cos x$.

Para demostrar que la igualdad es cierta hay que probar que la función $f(x) = 3\, sen\, x - e^{-x} \cos x$ verifica el teorema de Bolzano.

1.º $f(x)$ es continua en $\left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$.

2.º $f(0) = -1 < 0$ y $f\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 3 > 0$, es decir signo $f(0) \neq$ signo $f\left(\frac{\Pi}{2}\right)$

$f(x)$ cumple Bolzano en $\left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$, luego $\exists\, c \in \left(0, \frac{\Pi}{2}\right)$, tal que $f(c) = 0$.

13 Si f es continua en $x = 2$ y $f(2) < 0$. ¿Existe un entorno de 2 en el cual $f(x)$ es negativa?

Por el teorema de conservación del signo como $f(x)$ es continua en $x = 2$ y $f(2) \neq 0$ existe un entorno de 2 en el cual el signo de $f(x)$ es el mismo que en $f(2)$, en este caso negativo.

14 Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ln\,(-x) & \text{si } x < -2 \\ sen\,(\Pi x) & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 4 \\ x^2 - 12 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$.

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} ln(-x) = ln\, 2 \neq f(-2)$
  $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} sen\,(\Pi x) = sen\,(-2\Pi) = 0 = f(-2)$
  $f(x)$ no se continua en $x = -2$.

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} sen\,(\Pi x) = sen\, 2\Pi = 0 = f(2)$
  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 0 = 0 = f(2)$
  $f(x)$ es continua en $x = 2$.

- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} 0 = 0 \neq f(4)$
  $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} x^2 - 12 = 4 = f(4)$
  $f(x)$ no es continua en $x = 4$.

15 Si f es continua en [2, 7], siendo $f(2) = -2$ y $f(7) = 4$, ¿podemos afirmar que la función $g(x) = f(x) - 1$ tiene al menos una solución en (2, 7)?

$g(x) = f(x) - 1$ es continua en [2, 7] por ser diferencia de dos funciones continuas en [2, 7].
Además $g(2) = f(2) - 1 = -2 - 1 = -3 < 0$ y $g(7) = f(7) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$ por tanto, signo $g(2) \neq$ signo $g(7)$.
Por todo lo anterior podemos afirmar que $g(x)$ verifica el teorema de Bolzano, es decir, $\exists\, c \in (2, 7)$, tal que $g(c) = 0$, es decir existe al menos una solución de $g(x)$ en (2, 7).

16 ¿Es posible redefinir la función: $f(x) = 2 + x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)$ para que sea continua en $x = 0$?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2 + x \cdot sen\,\frac{1}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2 + x \cdot sen\,\frac{1}{x} = 2$$

Redefinimos $f(x) = \begin{cases} 2 + x \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Esta función es continua en $x = 0$.

17 **La función $f(x) = tgx$ no tiene máximo absoluto en $[0, \Pi]$, ¿contradice este hecho el teorema de Weierstrass?**

No contradice el teorema de Weierstrass, puesto, que $f(x) = tgx$ no es continua en $x = \frac{\Pi}{2}$; por tanto, no es continua en $[0,\Pi]$. Debido a esto, a $f(x)$ no se le puede aplicar el teorema de Weierstrass.

18 **Halla $\sqrt[5]{37}$ con error menor que una décima. Nota: Aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^5 - 37$.**

$f(x) = x^5 - 37$ es continua en [2, 2'1]; además $f(2) = 32 - 37 < 0$ y $f(2, 1) = 40{,}8 - 37 > 0$, por tanto $f(x) = x^5 - 37$ verifica el teorema de Bolzano $\Rightarrow \exists\, c \in (2, 2{,}1)$, de modo que $f(c) = 0 \Rightarrow c^5 - 37 = 0 \Rightarrow c = \sqrt[5]{37} \in (2, 2{,}1)$.

19 **Calcula m y b para que la función f sea continua en todo R:**

$$f(x) = \begin{cases} 4\ sen\ x \text{ si } x \le -\frac{3\Pi}{2} \\ m\ sen\ x + b \text{ si } -\frac{3\Pi}{2} < x < \frac{3\Pi}{2} \\ 4\ cos\ x \text{ si } x \ge \frac{3\Pi}{2} \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en $x = -\frac{3\Pi}{2}$; $x\ \frac{3\Pi}{2}$

- $\lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^-} 4\,sen\,x = 4 = f\left(-\frac{3\Pi}{2}\right)$

  $\lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{3\Pi}{2}^+} m\ sen\ x + b = m + b$

  $f(x)$ es continua en $x = -\frac{3\Pi}{2}$ si $m + b = 4$

- $\lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^-} m\ sen\ x + b = -m + b$

  $\lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{3\Pi}{2}^+} 4\,cos\,x = 0$

  $f(x)$ es continua en $x = \frac{3\Pi}{2}$ si $-m + b = 0$

  De todo esto deducimos que $f(x)$ es continua en todo R si:

$$\left.\begin{array}{r} -m + b = 0 \\ +m + b = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} b = 2 \\ m = 2 \end{array}}$$

20 **Demuestra que la ecuación $\Pi^x = e$ tiene solución en (0, 1). ¿Lo cumple también la ecuación $Ø^x = e$ siendo Ø el número de oro?**

- Para ver si la ecuación $\Pi^x = e$ tiene soluciones en (0, 1), veamos si $f(x) = \Pi^x - e$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en [0, 1].
  $f(x)$ es continua en [0, 1].

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \Pi^0 - e = 1 - e < 0 \\ f(1) = \Pi^1 - e = \Pi - e > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } f(0) \ne \text{signo } f(1)$$

Por tanto, $f(x)$ verifica Bolzano $\Rightarrow \exists\, c \in (0, 1)$, tal que $f(c) = = 0 \Rightarrow \exists\, c \in (0, 1)$ tal que $\Pi^c = e$.

- Para la ecuación $\Phi^x = e$ hacemos el mismo estudio:
  $f(x) = \Phi^x - e$ es continua en [0, 1]
  $f(0) = \Phi^0 - e = 1 - e < 0$
  $f(1) = \Phi^1 - e = \Phi - e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - e < 0$

Como signo $f(0)$ = signo $f(1)$ no se puede explicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \Phi^x - e$, por lo que no podemos asegurar que existe una solución de la ecuación $\Phi^x = e$ en (0, 1).

21 **La función $f(x) = cotg\ x$ tiene distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{3\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}\right]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?**

A la función $f(x) = cotg\ x$ no se le puede aplicar el teorema de Bolzano, puesto que no es continua en $x = \Pi \in \left[\frac{3\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}\right]$, luego $f(x)$ no es continua en $\left[\frac{3\Pi}{4}, \frac{5\Pi}{4}\right]$. Así que le falla una de las hipótesis de este teorema.

22 **Si f y g son dos funciones discontinuas en $x = a$, ¿son también discontinuas en $x = a$ las siguientes funciones?**

a) $f + g$ ***b)*** $f \cdot g$ ***c)*** $\frac{f}{g}$

En general no tienen porque ser discontinuas.
Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{2\,|x|}{x} = \begin{cases} 2 \text{ si } x \ge 0 \\ -2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{-2\,|x|}{x} = \begin{cases} -2 \text{ si } x \ge 0 \\ 2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Estas funciones son discontinuas en $x = 0$.
Sin embargo:

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) + g(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$$f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} -4 \text{ si } x \ge 0 \\ -4 \text{ si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} -1 \text{ si } x \ge 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = -1 \text{ y es continua en } x = 0$$

Por tanto, como hemos encontrado un contraejemplo, en general dos funciones pueden ser discontinuas en un punto y su suma, producto y cociente ser funciones continuas en ese punto.

23 **Demuestra que cualquier polinomio cuyos términos sean todos de grado impar tiene al menos una raíz.**

Sea $f(x) = a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + a_{2n-1}\, x^{2n-1} + \ldots + a_1\, x$

Un polinomio con todos los términos de grado impar.
$f(x)$ es continua en toda la recta real y como:

$$\lim_{x\to -\infty} a_{2n+1}\, x^{2n+1} + ... + a_1 x \to -\infty < 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} a_{2n+1} \cdot x^{2n+1} + ... + a_1 x \to +\infty > 0$$

Es posible encontrar un intervalo de modo que el signo en los extremos sea distinto. Por todo ello $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, por lo que tiene solución.
Es decir si $f(a) < 0 \Rightarrow f(-a) > 0$
$\Rightarrow$ se cumple Bolzano en $[-a, a]$
$\Rightarrow \exists\, c \in (-a, a)$, tal que $f(c) = 0$
$\Rightarrow f(x)$ tiene una raíz en $(-a, a)$

24 **¿Es continua la función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el intervalo cerrado [0, 3]? ¿Y en el intervalo [1, 3]? ¿Está acotada en estos intervalos?**

La función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ no es continua en [0, 3], puesto que no es continua en $x = 0$. La función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ sí es continua en [1, 3], por lo que podemos asegurar, por el teorema de la acotación en un intervalo cerrado, que $f(x)$ está acotada en [1, 3].

25 **Sea f una función que cumple $f(-2) \le 0$, $f(0) > 0$. ¿Es siempre cierto que $\exists\, c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$?**

Para que sea cierto que $\exists\, c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$, la función $f(x)$ debe verificar el teorema de Bolzano que es el que nos garantiza que exista esta solución. La función dada no verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, pues no podemos decir nada acerca de su continuidad en $[-2, 0]$.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

26 **Demuestra que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } -1 \le x \le 0 \\ -x \text{ si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0$, ¿qué tipo de discontinuidad presenta en los puntos de abscisa $x = -1$; $x = 0$ y $x = 1$?

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x + 1) = 1 = f(0)$.
  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \ne f(0)$.
  En $x = 0$, la función $f(x)$ es continua por la izquierda pero no por la derecha, por lo que en $x = 0$ la función $f(x)$ es discontinua.
- En $x = 0$, $f(x)$ presenta una discontinuidad no evitable de salto finito.
- En $x = -1$ y en $x = 1$, la función $f(x)$ presenta una discontinuidad no evitable esencial, pues no existe el límite a izquierda en $x = -1$ ni a derecha de $x = 1$.

27 **La función $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax + 12}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$, ¿para qué valor de a?**

Para $a = 4$, puesto que:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)}{x^2 - x + 6} = -\frac{1}{3}$$

$f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$ para $a = 4$.

28 **Estudia el dominio y la continuidad de la función:**

$$f(x) = \ln \left[\frac{x + 2}{x^2}\right]$$

- $Dom\, f = \left\{x \in R \;\middle|\; \dfrac{x+2}{x^2} > 0 \text{ y } x \ne 0\right\}$
  Por tanto, $Dom\, f = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio.

29 **Demuestra que si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y existe un número real K que satisfaga $K > f(b)$ y $K < f(a)$. Entonces debe existir un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = K$.**

Veamos si la función $g(x) = f(x) - K$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[a, b]$.
- $g(x)$ es continua en $[a, b]$ por ser diferencia de dos funciones continuas en $[a, b]$
- $\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - k > 0 \text{ pues } k < f(a) \\ g(b) = f(b) - k < 0 \text{ pues } k > f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{signo } g(a) \ne g(b)$

Por tanto, $g(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en $[a, b]$.
Luego podemos afirmar que $\exists\, c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(c) - K = 0 \Rightarrow f(c) = K$

30 **La función f se define en [–1, 1] del siguiente modo: vale –1 si $x \le 0$ y vale $2x^3 - 1$ si $x \ge 0$. Explica si f verifica el teorema de Bolzano.**

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \le 0 & \text{en } [-1, 1] \\ 2x^3 - 1 \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$$

Veamos si $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en [–1, 1]. Para ello se debe verificar:
1.º $f(x)$ debe ser continua en [–1, 1]. Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$ que es el único punto en el cual puede presentar problemas.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = f(0).$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x^3 - 1) = -1 = f(0)$

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ la función es continua en $x = 0 \Rightarrow f(x)$ es continua en $[-1, 1]$.

2.º $f(-1) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ luego signo $f(-1) \neq$ signo $f(1)$
Por lo tanto, $f(x)$ verifica el teorema de Bolzano en $[-1, 1]$.

31 Si g es una función polinómica, ¿qué se puede afirmar sobre la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^3 - x}$?

$f(x)$ es discontinua en todos los ceros del denominador. En $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$. En estos puntos la discontinuidad de $f(x)$ será evitable si estos valores anulan el numerador y será no evitable en aquellos que anulan $g(x)$. Es decir, si $g(0) = 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ $f(x)$ tiene un punto de discontinuidad evitable, en caso contrario sería no evitable. Con $x = 1$ y $x = -1$ se haría igual.

32 Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto $c \in (-\Pi, \Pi)$ al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ si } -\Pi \le x \le 0 \\ a + x^2 \text{ si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} \text{ si } 1 \le x \le \Pi \end{cases}$$

1.º Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $[-\Pi, \Pi]$.
- $\lim_{x\to -\Pi^+} f(x) = \lim_{x\to -\Pi^+} \cos x = \cos(-\Pi) = -1 = f(\Pi).$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 1 = f(0)$

  $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} a + x^2 = a$

  $f(x)$ es continua en $x = 0$ si $a = 1$
- $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} a + x^2 = a + 1$

  $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{b}{x} = \dfrac{b}{1} = b = f(1)$

  $f(x)$ es continua en $x = 1$ si $a + 1 = b$
- $\lim_{x\to \Pi^-} f(x) = \lim_{x\to \Pi^-} \dfrac{b}{x} = \dfrac{b}{\Pi} = f(\Pi)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-\Pi, \Pi]$, pues:
- $f(x)$ es continua por la derecha en $x = -\Pi$
- $f(x)$ es continua por la izquierda en $x = \Pi$
- $f(x)$ es continua en $(-\Pi, \Pi)$ si $a = 1$ y $a+1 = b \Rightarrow \boxed{a=1; b=2}$

2.º $f(-\Pi) = -1 < 0$ y $f(\Pi) = \dfrac{2}{\Pi} > 0$, por tanto signo $f(-\Pi) \neq$ signo $f(\Pi)$
La función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano para $a = 1$; $b = 2$.

33 Dadas las funciones f y g definidas en R por

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} \qquad g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } x \ge 0 \end{cases}$$

estudia la continuidad de la función $g \circ f$.

Vamos a definir primeramente la función $(g \circ f)(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + x}{2} \text{ si } x \ge 0 \\ \dfrac{x - x}{2} \text{ si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \ge 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de $g \circ f$ en $x = 0$.

$\lim_{x\to 0^-} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f(0).$

$\lim_{x\to 0^+} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 = f(0).$

$g \circ f$ es continua en toda la recta real.

34 Demuestra que cualquier función polinómica de tercer grado tiene siempre una raíz real. ¿Qué podemos afirmar de funciones polinómicas de cuarto grado?

- La función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ verifica las hipótesis del teorema de Bolzano, puesto que:

1.º $f(x)$ es continua en toda la recta real

2.º $\lim_{x\to +\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d \to \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to -\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d \to \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Es deci,r siempre es posible encontrar un intervalo en el que se verifique que el signo en los extremos es distinto. Luego podemos encontrar un intervalo en el que la función verifique las hipótesis del teorema de Bolzano y aplicando este teorema en ese intervalo existe un valor en el cual la función polinómica se anula, es decir, existe una raíz real.
De una función polinómica de cuarto grado no podemos afirmar que verifique Bolzano, por lo cual no podemos afirmar nada de que exista una raíz real.

BLOQUE TEMÁTICO III:
ANÁLISIS

UNIDAD DIDÁCTICA 12

Derivadas

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Comprender el concepto de derivada de una función en un punto, así como su significado geométrico.
2. Saber estudiar la derivabilidad de una función en un punto, haciendo uso de las derivadas laterales.
3. Saber encontrar, haciendo uso de la definición, la función derivada de la función dada.
4. Saber hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a una curva en un punto dado.
5. Utilizar las operaciones con funciones derivadas y las reglas de derivación en el cálculo de derivadas de funciones dadas.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Insistiendo en el concepto de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica.
Utilizando la definición, calcular funciones derivadas de las funciones dadas.
Haciendo múltiples ejercicios dirigidos con el fin de que el alumno memorice, de forma progresiva, las derivadas de las funciones elementales.
Proponiendo al alumno gran variedad de ejercicios en los que aparezcan funciones compuestas de funciones diversas, para que éste adquiera gran soltura en la derivación e interpretación.
Haciendo ver al alumno de la necesidad de utilizar derivadas laterales para el estudio de la derivabilidad de algunas funciones y la interpretación gráfica de las mismas.

Actividades iniciales

1. Dada la función $g(x) = \sqrt{3x+1}$, calcula el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1} - \sqrt{3x+1}}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3x+3h+1} - \sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x+3h+1-3x-1}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h+1} + \sqrt{3x+1}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

2. Dada la función $f(x) = |2x-4|$, calcula:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$f(x) = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 \text{ si } x \geq 2 \\ -2x+4 \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(2+h)-4-0}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2(2+h)+4-0}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h}{h} = -2$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 5] para las funciones:

$f(x) = 7 - 2x$ **$g(x) = 4x^2 - 3x + 5$**

$k(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ **$h(x) = \sqrt{x+4}$**

- $f(x) = 7 - 2x$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{-3-3}{3} = -2$$

- $g(x) = 4x^2 - 3x + 5$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{g(5)-g(2)}{5-2} = \frac{90-15}{3} = 25$$

- $K(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{k(5)-k(2)}{5-2} = \frac{\frac{15}{26} - \frac{6}{5}}{3} = -0{,}21$$

- $h(x) = \sqrt{x+4}$

$$tv_m\,[2, 5] = \frac{h(5)-h(2)}{5-2} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{3} = 0{,}18$$

2 Una pelota lanzada hacia arriba, desde una altura de 2 m, sigue la ecuación de movimiento dada por la función $h = 2 + 25t - 4{,}9t^2$, siendo h la altura en metros y t el tiempo en segundos. Calcula la velocidad media entre los instantes 1s y 2s. Calcula las velocidades instantáneas en esos dos instantes. ¿Cuál es el punto más alto que alcanza la pelota?

$$V_m = tv_m\,[1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 32{,}4; f(t) = 2 + 25\,t - 4{,}9\,t^2$$

$$V_i\,(1) = tv_i\,[1] = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 + 25\,(1+h) - 4{,}9\,(1+h)^2 - [2+25-4{,}9]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{25\,h - 9{,}8\,h - h^2 \cdot 4{,}9}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h\,(15{,}2 - 4{,}9\,h)}{h} =$$

$$= 15{,}2$$

$$V_i\,(2) = tv_i\,[2] = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 + 25\,(2+h) - 4{,}9\,(2+h)^2 - [2+50-19{,}6]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{25\,h - 19{,}6\,h - 4{,}9\,h^2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h\,(5{,}4 - 4{,}9\,h)}{h} = 5{,}4$$

El punto más alto lo alcanzará en el instante en el cual la velocidad instantánea sea 0.

$$V_i\,(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\,(t_0+h) - f\,(t_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 + 25\,(t_0+h) - 4{,}9\,(t_0+h)^2 - \left[2 + 25\,t_0 - 4{,}9\,t_0^2\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(25 - 9{,}8\,t_0 - 4{,}9\,h)}{h} = 25 - 9{,}8\,t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{25}{9{,}8} = 2{,}6 \text{ s}$$

El punto más alto lo alcanza a los 2,6 s.
La altura para este tiempo es:

$$h = 2 + 25 \cdot 2{,}6 - 4{,}9 \cdot 2{,}6^2 = 33{,}876 \text{ m}$$

El punto más alto que alcanza la pelota está a 33,876 + 2 = = 35,876 m del suelo.

3 Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

1) $f(x) = -3$; $f'(2)$ **2) $g(x) = \dfrac{-5}{x}$; $D[g\,(1)]$**

3) $H(x) = 3x^2 - 2x + 2$; $H'(-1)$ **4) $k(x) = (2x-1)^2$; $D[k(2)]$**

5) $l(x) = \sqrt{x+3}$; $l'(6)$ **6) $t(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ $D[t(0)]$**

$$1)\ f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3-(-3)}{h} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 0}$$

2) $D\,[g(1)] = g'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{-5}{1+h} - \dfrac{-5}{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-5+5+5h}{h\,(1+h)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5}{1+h} = 5 \Rightarrow \boxed{D[g(1)] = 5}$

3) $H'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{H(-1+h)-H(-1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(-1+h)^2 - 2(-1+h) + 2 - 7}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3 - 6h + 3h^2 + 2 - 2h + 2 - 7}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3h-8)}{1+h} =$

$= -8 \Rightarrow \boxed{H'(-1) = -8}$

4) $D[k(2)] = k'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k(2+h)-k(2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{[2(2+h)-1]^2 - 3^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4h^2 + 12h + 9 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h\,(4h+12)}{h} = 12$

5) $l'(6) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{l(6+h)-l(6)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h} - 3}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{9+h} - 3\right)\left(\sqrt{9+h} + 3\right)}{h\left(\sqrt{9+h} + 3\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{h\left(\sqrt{9+h} + 3\right)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{9+h} + 3} = \dfrac{1}{6}$

6) $D[t(0)] = t'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{t(0+h)-t(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{h^2+1} - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2h^2}{(h^2+1)\,h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2h}{h^2+1} = 0$

4 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 2x^3 + x$ en el origen de coordenadas.

$f(x) = 2x^3 + x$

Recta tangente: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$f'(x) = 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

$y - 0 = 1\,(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$

Recta normal: $y - f(0) = \dfrac{-1}{f'(0)} \cdot (x - 0)$

$y - 0 = -1\,(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = -x}$

5 Halla los puntos en los cuales la tangente a la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 30x - 6$ es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 5$.

La pendiente de la recta $y = 6x - 5$ vale 6; por tanto, la pendiente de la recta tangente, al ser paralela a la anterior, también vale 6. Hemos de encontrar el punto $(x_0, f(x_0))$ en el cual $f'(x_0) = 6$.

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 30 \Rightarrow f'(x_0) = 6x_0^2 + 6x_0 - 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x_0^2 + 6x_0 - 30 = 6 \Rightarrow 6x_0^2 + 6x_0 - 36 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0^2 + x_0 - 6 = 0 \Rightarrow x_0 = 2;\ x_0 = -3$

Los puntos son: $(2, -38)$ y $(-3, 57)$.

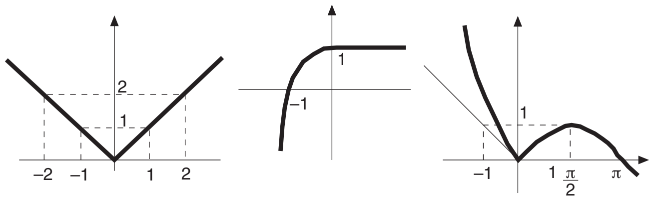
6 Dada la función $y = x^2 - 4x + 3$, encuentra un punto de su gráfica en el cual la recta tangente a ella va paralela a la secante a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 4$.

Recta secante que pasa por los puntos $(1, 0)$ $(4, 3) \Rightarrow y = x - 1$. La pendiente de esta recta vale 1, luego la pendiente de la tangente vale 1 al ser rectas paralelas $\Rightarrow f'(x_0) = 1$.

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 - 4 \Rightarrow 2x_0 - 4 = 1 \Rightarrow x_0 = \dfrac{5}{2}$

El punto pedido es $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{-3}{4}\right)$

7 Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 0$.



$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$H(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen}\, x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

• $f'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h-0}{h} = 1$

$f'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h-0}{h} = -1$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues las derivadas laterales son distintas.

• $g'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1-1}{h} = 0$

$g'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h^2+1-1}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0^-} -h = 0$

$g(x)$ es derivable en $x = 0$.

• $H'(0^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{H(0+h)-H(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\text{sen}\,h - 0}{h} = 1$

$H'(0^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{H(0+h)-H(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h^2 - h}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{h\,(h-1)}{h} = -1$

La función $H(x)$ no es derivable en $x = 0$

8 **Halla los valores de a y b para los cuales la recta tangente a la curva**

$$y = x^2 + ax + b$$

en el punto P (3, 0) tenga de pendiente 2.

La gráfica de la curva dada pasa por el punto P (3, 0) $\Rightarrow 0 = 9 + 3a + b$.

Por otro lado, $f'(3) = 2 \Rightarrow$ como $f(x) = 2x + a \Rightarrow f'(3) = 6 + a \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 + a = 2 \Rightarrow a = -4$

Luego, $a = -4$ y $b = -9 - 3a = 3 \Rightarrow$ $\boxed{a = -4 \text{ y } b = 3}$

9 **Calcula las derivadas sucesivas que se indican:**

a) $f(x) = 2^{3x}$ $f'''(x)$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$ $g^{(4)}(x)$

c) $h(x) = ln\ (x + 2)$ $h^{(5)}(x)$

d) $j(x) = sen\ 3x$ $j^{(10)}(x)$

a) $f(x) = 2^{3x}$; $f'(x) = 2^{3x} \cdot ln\ 2 \cdot 3$; $f''(x) = 2^{3x} \cdot (ln\ 2 \cdot 3)^2$;
$f'''(x) = 2^{3x} \cdot (3 \cdot ln\ 2)^3$

b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$; $g'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$; $g''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

$g'''(x) = \dfrac{-12}{(x-1)^4}$; $g^{(4)}(x) = \dfrac{48}{(x-1)^5}$

c) $h(x) = ln\ (x + 2)$; $h'(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $h''(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

$h'''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}$; $h^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{(x+2)^4}$; $h^{(5)}(x) = \dfrac{24}{(x+2)^5}$

d) $j(x) = sen\ 3x$
$j'(x) = 3\ cos\ 3x$
$j''(x) = -9\ sen\ 3x$
$j'''(x) = -27\ cos\ 3x$
$j^{(4)}(x) = +81\ sen\ 3x$
$j^{(5)}(x) = 243 \cdot cos\ 3x$
...
$j^{(10)}(x) = -sen\ 3x \cdot (3)^{10}$

Aparece un grupo de cuatro funciones derivadas diferentes, después se repiten.

10 **Obtén las derivadas n-ésimas de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = ln\ (x - 1)$ ***b)*** $g(x) = e^x + e^{-x}$ ***c)*** $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $f(x) = ln\ (x - 1)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $f''(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$; $f'''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow$

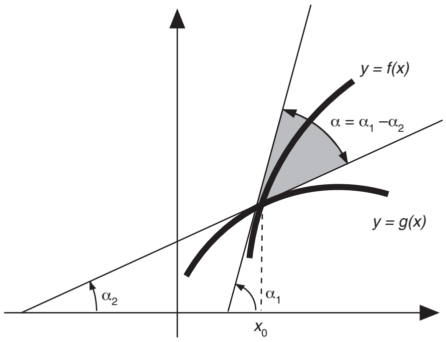
$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(x-1)^n}$

b) $g(x) = e^x + e^{-x}$; $g'(x) = e^x - e^{-x}$; $g''(x) = e^x + e^{-x}$
$g'''(x) = e^x - e^{-x} \Rightarrow g^{(n)}(x) = e^x + (-1)^n \cdot e^{-x}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$h'(x) = -2x^{-3}$; $h''(x) = 6x^{-4}$; $h'''(x) = -24x^{-5}$
$h^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot (n + 1)! \cdot x^{-(n+2)}$

11 **Llamamos ángulo de dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en un punto P de abscisa x_0 al menor de los ángulos α que forman sus respectivas tangentes en el punto P.**



Halla el ángulo que forman los siguientes pares de curvas en todos sus puntos de corte:

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x + 2 \end{array}\right\}$ ***b)*** $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x + 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = -1$

Los puntos de corte son (2, 4) y (–1, 1)

• Recta tangente a $f(x)$ en (2, 4).
$y - f(2) = f'(2)\ (x - 2) \Rightarrow y - 4 = 4\ (x - 2) \Rightarrow y = 4x - 4$
Recta tangente a $g(x)$ en (2, 4)
$y - g(2) = g'(2)\ (x - 2) \Rightarrow y - 4 = 1\ (x - 2) \Rightarrow y = x + 2$
$tg\ \alpha_1 = 4 \Rightarrow \alpha_1 = 75°\ 57'\ 50''$
$tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
El ángulo que forman las curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el punto (2, 4) vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 30°\ 57'\ 50''$

• Recta tangente a $f(x)$ en (–1, 1)
$y - f(-1) = f'(-1)\ (x + 1)$
$\Rightarrow y - 1 = -2\ (x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1 \Rightarrow tg\ \alpha_1 = -2$
Recta tangente a $g(x)$ en (–1, 1)
$y - g\ (-1) = g'\ (-1)\ (x + 1) \Rightarrow y - 1 = 1\ (x + 1) \Rightarrow y = x + 2$
$\Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1$
$tg\ \alpha_1 = -2 \Rightarrow \alpha_1 = 116°\ 33'\ 54''$
$tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
El ángulo que formen $f(x)$ y $g(x)$ en el punto (–1, 1) vale: 71° 33' 54''

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 + x^2 \\ g(x) = x + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Se cortan en (1, 2) y (–1, 0)

• La recta tangente a $f(x)$ en (1, 2) tiene de pendiente 5 $\Rightarrow$
$\Rightarrow tg\ \alpha_1 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 78°\ 41'\ 24''$
La recta tangente a $g(x)$ en (–1, 0) tiene por pendiente 1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
El ángulo que forman en el punto (1, 2) es: 33° 41' 24''

• La recta tangente a $f(x)$ en (–1, 0) tiene de pendiente 1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow tg\ \alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 45°$
La recta tangente a $g(x)$ en (–1, 0) tiene de pendiente 1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow tg\ \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45°$
El ángulo que forman en (–1, 0) vale 0°.

12 **Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

1) $D[x^2]$	**2)** $D[x^3 \cdot x^4]$
3) $D[(x^2 - 3)^5]$	**4)** $D[(3x)^{1/3}]$
5) $D[x \cdot 4^x]$	**6)** $D[(x+1)^3 \cdot (x-1)^2]$
7) $D[3^x \cdot ln^x]$	**8)** $D[(e^{2x} + 3)^4]$
9) $D[ln\ (2 - 3x^2)^4]$	**10)** $D\left[\dfrac{2}{(x^3 - 3x^2)^6}\right]$
11) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4 - 5x^2}}\right]$	**12)** $D\left[(4x+2) \cdot \sqrt{4x - 2}\right]$
13) $D\left[\dfrac{e^x}{x}\right]$	**14)** $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right]$
15) $D[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}]$	**16)** $D[sen\ 4x]$
17) $D[sen^4\ x]$	**18)** $D[sen\ x^4]$
19) $D[tg\ 2x^2]$	**20)** $D[sen\ x + cos\ x]$
21) $D[ln\ (cos\ 2x)]$	**22)** $D[x^x]$
23) $D\left[arc\ tg\ \sqrt{x}\right]$	**24)** $D[(sen\ x)^{arc\ sen\ x}]$

1) $D[x^2] = 2x$

2) $D[x^3 \cdot x^4] = D[x^7] = 7x^6$

3) $D[(x^2 - 3)^5 = 10x(x^2 - 3)^4$

4) $D\left[(3x)^{\frac{1}{3}}\right] = (3x)^{-2/3}$

5) $D\ [x \cdot 4^x] = 4^x + 4^x \cdot ln\ 4 \cdot x$

6) $D\ [(x+1)^3 \cdot (x-1)^2] = (x^2 - 1)\ [5x^2 + 4x - 1]$

7) $D\ [3^x \cdot lnx] = 3^x \cdot ln3 \cdot lnx + \dfrac{3^x}{x}$

8) $D\ [(e^{2x} + 3)^4] = 8e^{2x}\ (e^{2x} + 3)^3$

9) $D\ [ln\ (2 - 3x^2)^4] = D\ [4 \cdot ln\ (2 - 3x^2)] = \dfrac{-24x}{2 - 3x^2}$

10) $D\left[\dfrac{2}{(x^3 - 3x^2)^6}\right] = D\left[2 \cdot (x^3 - 3x^2)^{-6}\right] = \dfrac{-12\ (3x^2 - 6x)}{(x^3 - 3x^2)^7}$

11) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4 - 5x^2}}\right] = \dfrac{5x}{(4 - 5x^2)\ \sqrt{4 - 5x^2}}$

12) $D\left[(4x + 2)\ \sqrt{4x - 2}\right] = 4\sqrt{4x - 2} + \dfrac{4\ (4x+2)}{2\sqrt{4x-2}} = \dfrac{24x-4}{\sqrt{4x-2}}$

13) $D\left[\dfrac{e^x}{x}\right] = \dfrac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x\ (x-1)}{x^2}$

14) $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right] = \dfrac{e^x - e^x \cdot x}{e^{2x}} = \dfrac{e^x\ (1-x)}{e^{2x}} = \dfrac{1-x}{e^x}$

15) $D\ [x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}] = 2x \cdot 2^x \cdot a^{2x} + 2^x \cdot ln2 \cdot x^2 \cdot a^{2x} +$
$+ 2a^{2x}\ lna \cdot x^2 \cdot 2^x$

16) $D\ [sen\ 4x] = 4\ cos\ 4x$

17) $D\ [sen^4\ x] = D\ [(sen\ x)^4] = 4 \cdot sen^3\ x \cdot cos\ x$

18) $D\ [sen\ x^4] = 4x^3 \cdot cos\ x^4$

19) $D\ [tg\ 2x^2] = 4x\ (1 + tg^2\ 2x^2) = \dfrac{4x}{cos^2\ (2x^2)}$

20) $D\ [sen\ x + cos\ x] = cos\ x - sen\ x$

21) $D\ [ln\ (cos\ 2\ x)] = \dfrac{-2\ sen\ 2x}{cos\ 2x} = -2\ tg(2x)$

22) $D\ [x^x] = x^x\ [lnx + 1]$

23) $D\left[arc \cdot\ tg\ \sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2x\ (1 + x)}$

24) $D\ [(sen\ x)^{arc\ \cdot\ sen\ x}] =$

$= (sen\ x)^{arc\ \cdot\ senx}\left[\dfrac{ln\ (sen\ x)}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{cos\ x \cdot\ arc \cdot\ sen\ x}{sen\ x}\right]$

13 **¿En qué puntos o punto la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x + 4$ tiene la menor pendiente?**

Las pendientes de las rectas tangentes a esta curva verifican la relación:

$$y' = 3x^2 + 3 \Rightarrow m = 3x^2 + 3$$

Esta pendiente toma el menor valor posible en el vértice de esta función $y = 3x^2 + 3$ cuadrática, es decir en $x = 0$. Luego la menor pendiente de la recta tangente está en (0, 4) y vale 3.

14 **Demuestra que los triángulos que forman las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2}{x}$ con los semiejes positivos coordenados tienen área constante. ¿Cuál es el valor de esta constante?**

Las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2}{x}$ en el punto $P\left(a, \dfrac{2}{a}\right)$ tienen de ecuación: $y - \dfrac{2}{a} = \dfrac{-2}{a^2}\ (x - a)$ y cortan a los semiejes positivos coordenados en los puntos $A\ (2a, 0)$ y $B\left(0, \dfrac{4}{a}\right)$.

Luego los triángulos que forman estas rectas tangentes tienen de vértices $0\ (0, 0)$, $A\ (2a, 0)$ y $B\left(0, \dfrac{4}{a}\right)$ y de área:

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot \dfrac{4}{a}$ 4 unidades cuadradas $\Rightarrow$ El área es constante y vale 4.

15 **Encuentra los valores aproximados de log 11; $\sqrt[3]{1{,}01}$ y $\sqrt{15{,}8}$.**

- Para calcular log 11 tomamos la función $f(x) = log\ x$ y aplicamos la aproximación que nos da la diferencial:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$$

con $x_0 = 10$ $\quad h = 1$

$f\ (x_0 + h) = log\ 11; f\ (x_0) = log\ 10 = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot ln\ 10} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{1}{10 \cdot ln\ 10}$

Luego: $log\ 11 \approx 1 + \dfrac{1}{10 \cdot ln\ 10} = 1{,}0434294...$

- Para calcular $\sqrt[3]{1{,}01}$ tomamos la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y aplicamos la aproximación que nos da la diferencial para $x_0 = 1$ $\quad h = 0{,}01$

$f(x_0 + h) = \sqrt[3]{1{,}01}; f(x_0) = \sqrt[3]{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \dfrac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1{,}01} \approx 1 + \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}01 = 1{,}00\overset{\frown}{3}$

• Para calcular $\sqrt{15{,}8}$ formamos la función $f(x) = \sqrt{x}$ y aplicamos la aproximación que nos da la diferencial como en los dos casos anteriores. Aquí tomamos: $x_0 = 16 \quad h = -0{,}2$.

$$f(x_0 + h) = f(15, 8) = \sqrt{15{,}8}\,;\ f(x_0) = f(16) = \sqrt{16} = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}$$

$$\sqrt{15{,}8} \approx 4 + \frac{1}{8} \cdot (-0{,}2) = 3{,}975$$

16 Un balón de playa tiene un radio de 15 cm. Un día caluroso se ha dilatado y su radio se ha incrementado 0,2 mm. Determina, de forma aproximada, el aumento de su volumen.

$V(r) = \frac{4}{3}\Pi r^3$

$V'(r) = 4\Pi r^2$

$[\Delta V]_{r = 15;\ h = 0{,}02\text{ cm}} \approx V'(15) \cdot h = 4\Pi \cdot 15^2 \cdot 0{,}02 \Rightarrow$

$[\Delta V]_{r = 15;\ h = 0{,}02\text{ cm}} \approx 56{,}54866776\text{ cm}^3$

Este valor se aproxima mucho al valor exacto:

$\Delta V = V(15 + 0{,}02) - V(15) = \frac{4}{3}\Pi \cdot 15{,}02^3 - \frac{4}{3}\Pi \cdot 15^3 =$
$= 56{,}624099\text{ cm}^3$

17 Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1) $D\left[\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)^3\right]$ **2)** $D[sen^2\, x^2]$

3) $D\left[arc\ sen\ \sqrt{x - 1}\right]$ **4)** $D\left[\frac{cos\ (x - 1)}{cos\ (x + 1)}\right]$

5) $D[x^2 + sen\ x]$ **6)** $D\left[\sqrt{\frac{1 + 7x}{1 - 7x}}\right]$

7) $D[ln\ tg^2\, x]$ **8)** $D[ln^2\,(ln\ x)]$

9) $D\left[(1 - x)\sqrt{1 + x^2}\right]$ **10)** $D\left[\sqrt{\frac{1 - sen\ x}{1 + sen\ x}}\right]$

11) $D\left[ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)\right]$ **12)** $D[x^{tg\,x}]$

13) $D[sen\ \{cos\ (sen\ x)\}]$ **14)** $D\left[arc\ tg\ \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)\right]$

15) $D\left[ln\left(\frac{1}{1 + x}\right) + \frac{1}{1 + x}\right]$ **16)** $D\left[\frac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right]$

17) $D\left[\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right]$ **18)** $D\left[ln\left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)\right]$

19) $D[sen^3\, 2x \cdot cos^2\, 3x]$ **20)** $D[arc\ tg\ (sen\ x)]$

21) $D[arc\ sen\ (tg\ x)]$ **22)** $D\left[ln\ \left(arc\ sen\ \sqrt{x}\right)\right]$

23) $D[x + x^x]$ **24)** $D\left[ln\ \left(e^{2x} + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)\right]$

25) $D[x^{ln\,x}]$ **26)** $D\left[ln\ \left(tg\ \frac{x}{2}\right)\right]$

27) $D[x \cdot e^{2x} \cdot (1 + e^{2x})^2]$ **28)** $D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}\right]$

29) $D\left[\sqrt{x + \sqrt{x}}\right]$ **30)** $D\left[arc\ tg\ \sqrt{\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}}\right]$

31) $D[e^{sen\,x} + e^{cos\,x}]$ **32)** $D[(sen\ x)^{2\,cos\,x}]$

33) $D[ln\ (sen^3\, x)]$ **34)** $D\left[x^{x^x}\right]$

35) $D\left[\frac{1}{2}\ ln\ \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) + arc\ sen\ \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right]$

1) $D\left[\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)^3\right] = 3\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\right) =$

$= \frac{6x^2 - 3}{\sqrt{1 - x^2}}\left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)$

2) $D[sen^2\, x^2] = 4x \cdot sen\ x^2 \cdot cos\ x^2 = 2x \cdot sen\ 2x^2$

3) $D\left[arc \cdot sen\ \sqrt{x - 1}\right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x - 1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x - 1}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{(x - 1)(2 - x)}}$

4) $D\left[\frac{cos\ (x - 1)}{cos\ (x + 1)}\right] =$

$= \frac{-sen\ (x - 1) \cdot cos\ (x + 1) + sen\ (x + 1) \cdot cos\ (x - 1)}{cos^2\ (x + 1)} =$

$= \frac{sen\left[(x + 1) - (x - 1)\right]}{cos^2\ (x + 1)} = \frac{sen\ 2}{cos^2\ (x + 1)}$

5) $D[x^2 + sen\ x] = 2x + cos\ x$

6) $D\left[\sqrt{\frac{1 + 7x}{1 - 7x}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 + 7x}{1 - 7x}}} \cdot \frac{7(1 - 7x) + 7(1 + 7x)}{(1 - 7x)^2} =$

$= \frac{7}{(1 - 7x)\sqrt{1 - 49x^2}}$

7) $D[ln\ tg^2\, x] = D[2 \cdot ln\ (tgx)] = \frac{2(1 + tg^2\, x)}{tg\ x}$

8) $D[ln^2\,(ln\ x)] = 2\ ln\ (ln\ x) \cdot \frac{1}{x\ ln\ x} = \frac{2\ ln\ (ln\ x)}{x \cdot ln\ x}$

9) $D\left[(1 - x) \cdot \sqrt{1 + x^2}\right] = -1 \cdot \sqrt{1 + x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}(1 - x) =$

$= \frac{-2x^2 + x - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$

10) $D\left[\sqrt{\frac{1 - sen\ x}{1 + sen\ x}}\right] =$

$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - sen\ x}{1 + sen\ x}}} \cdot \frac{-cos\ x\ (1 + sen\ x) - cos\ x\ (1 - sen\ x)}{(1 + sen\ x)^2} =$

$= \frac{-cos\ x}{(1 + sen\ x)\sqrt{1 - sen^2\ x}} = \frac{-1}{1 + sen\ x}$

11) $D\left[ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right)\right] =$

$= D\left[ln\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) - ln\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)\right] =$

$= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{-2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

12) $D[x^{tg\,x}] = x^{tg\,x} \cdot \left(\frac{ln\ x}{cos^2\ x} + \frac{tg\ x}{x}\right)$

13) $D[sen\ \{cos\ (sen\ x)\}] =$
$= cos\ \{cos\ (sen\ x)\} \cdot [-sen(sen\ x)] \cdot cos\ x$

14) $D\left[arc\ tg\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right] = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{1\,(x+1)-1\,(x-1)}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{2}{2x^2+2} = \dfrac{1}{x^2+1}$

15) $D\left[ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+\dfrac{1}{1+x}\right] = D\left[-ln\,(1+x)+\dfrac{1}{1+x}\right] =$

$= -\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{-2-x}{(1+x)^2}$

16) $D\left[\dfrac{x^3\cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right] = D\left[x^3\cdot 3^{2x}\cdot e^{-2x}\right] =$

$= 3x^2\cdot 3^{2x}\cdot e^{-2x} + x^3\cdot 3^{2x}\cdot ln\ 3\cdot 2\cdot e^{-2x} -$

$-\ 2x^3\cdot 3^{2x}\cdot e^{-2x} = 3^{2x}\cdot e^{-2x}\,(3x^2+2\ ln\ 3\cdot x^3-2x^3)$

17) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right] = \dfrac{1\cdot\sqrt{a^2-x^2}-\dfrac{-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2} = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

18) $D\left[ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right] = D\left[ln\,(\sqrt{x}-1)-ln\,(\sqrt{x}+1)\right] =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}$

19) $D\,[sen^3\,2x\cdot cos^2\,3x] =$
$= 6\ sen^2\,2x\cdot cos\ 2x\cdot cos^2\,3x - 6\ sen^3\,2x\cdot cos\ 3x\cdot sen\ 3x$

20) $D\left[arc\cdot\ tg\ (sen\,x)\right] = \dfrac{cos\ x}{1+sen^2\ x}$

21) $D\,[arc\ sen\ (tg\ x)] = \dfrac{1+tg^2\ x}{\sqrt{1-tg^2\ x}}$

22) $D\left[ln\ (arc\ sen\sqrt{x}\right] = \dfrac{1}{2\ \sqrt{x-x}\cdot\ arc\ sen\sqrt{x}}$

23) $D\,[x+x^x] = 1+x^x\,(lnx+1)$

24) $D\left[ln\left(e^{2x}+\sqrt{1+e^{2x}}\right)\right] = \dfrac{2\ e^{2x}+\dfrac{2\ e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^{2x}+\sqrt{1+e^{2x}}} =$

$= \dfrac{e^{2x}\left(2\sqrt{1+e^{2x}}+1\right)}{e^{2x}\sqrt{1+e^{2x}}+1+e^{2x}}$

25) $D\left[x^{ln\ x}\right] = x^{ln\ x}\left[\dfrac{2\ ln\ x}{x}\right] = 2\ ln\ x\cdot x^{ln\ x-1}$

26) $D\left[ln\left(tg\ \dfrac{x}{2}\right)\right] = \dfrac{1+tg^2\ \dfrac{x}{2}}{2\ tg\ \dfrac{x}{2}}$

27) $D\,[x\cdot e^{2x}\cdot(1+e^{2x})^2] =$
$= e^{2x}\,(1+e^{2x})+2xe^{2x}\,(1+e^{2x})^2+2\cdot(1+e^{2x})\cdot 2e^{2x}\cdot x\cdot e^{2x} =$
$= e^{2x}\,[1+e^{2x}]\,[1+e^{2x}+2x+6xe^{2x}]$

28) $D\left[\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x}\right] = D[1+e^{-2x}] = -2\ e^{-2x}$

29) $D\left[\sqrt{x+\sqrt{x}}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot 1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x\,(x+\sqrt{x})}}$

30) $D\left[arc\ tg\sqrt{\dfrac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}\right] =$

$= \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}\right)^2}\cdot\dfrac{\dfrac{2\ sen\,x}{(1+cos\,x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-cos\,x}{1+cos\,x}}} =$

$= \dfrac{sen\,x}{\dfrac{2}{1+cos\,x}\cdot(1+cos\,x)\sqrt{1-cos^2\,x}} = \dfrac{1}{2}$

31) $D[e^{sen\,x}+e^{cos\,x}] = e^{sen\,x}\cdot cos\,x - e^{cos\,x}\cdot sen\,x$

32) $D[(sen\,x)^{2\,cos\,x}] =$

$= (sen\,x)^{2cos\,x}\left[-2\ sen\ x\ ln\,(sen\,x)+\dfrac{2\ cos^2\ x}{sen\,x}\right]$

33) $D\,[ln\ (sen^3\,x)] = D\,[3\cdot ln\ (sen\,x)] = \dfrac{3\ cos\,x}{sen\,x}$

34) $D\left[x^{x^x}\right] = x^{x^x}\left[x^x\,(ln\ x+1)\cdot ln\ x+\dfrac{x^x}{x}\right] =$

$= x^{x^x}\cdot x^x\left(ln^2\ x+ln\ x+\dfrac{1}{x}\right)$

35) $D\left[\dfrac{1}{2}\cdot ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)+arc\cdot\ sen\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}}\cdot\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}\ \cdot$

$\cdot\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}-\dfrac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-1}{1-x^2}+\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}} =$

$= \dfrac{1-\sqrt{1-2x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

18 Considérese la hipérbola $x\cdot y = 1$. Halla la ecuación de la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 2$. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.

La recta secante pasará por los puntos $P\ (1, 1)\ Q\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ y su ecuación es:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x+2y-3=0$$

La pendiente de esta recta es $m = -\dfrac{1}{2}$, luego las rectas tangentes paralelas a éste tendrán por pendiente $-\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Las rectas tangentes de pendiente $-\dfrac{1}{2}$ pasarán por los puntos $P\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ Q\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

y sus ecuaciones son:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\left(x - \sqrt{2}\right)$$

$$y + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{2}\right)$$

19 Sea la función $f(x) = x \cdot |x|$. Estudia su derivabilidad en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como es una función definida a trozos vamos a estudiar su derivabilidad en $x = 0$ a través de las derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^+} h = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(0+h)^2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2}{h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} (-h) = 0$$

La función $f(x) = x \cdot |x|$ es derivable en $x = 0$, pues sus derivadas laterales existen y son iguales.

20 Determina de manera razonada todas las funciones f que sean polinómicas de tercer grado y verifiquen $f'(-1) = f'(1) = 0$. ¿Puede existir alguna de las funciones determinadas anteriormente que verifique $f(0) = f(1) = 0$?

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = 3a - 2b + c \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \\ f'(1) = 3a + 2b + c \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = -3a;\ b = 0$$

Las funciones polinómicas de tercer grado que verifican las hipótesis del enunciado son de la forma:

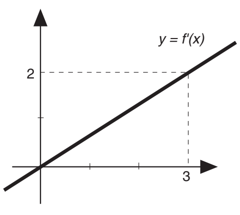
$$f(x) = ax^3 - 3ax + d$$

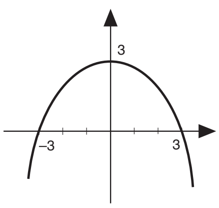
Para que verifique $f(0) = f(1) = 0$, deberán cumplir:

$$\left.\begin{array}{r} d = 0 \\ a - 3a + d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d = 0 \\ a = 0 \end{array}$$

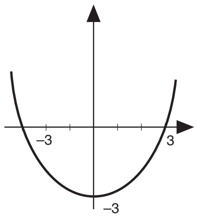
Luego no existe ninguna función polinómica de tercer grado que verifique estas condiciones, excepto el polinomio nulo.

21 La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.

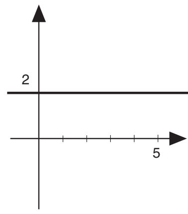




A



B



C

a) Obtén la expresión analítica de $y = f'(x)$.
b) Indica cuál de las gráficas A, B o C corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

a) Expresión analítica de $y = f'(x)$. Es una recta que pasa por los puntos (0, 0) (3, 2), luego su ecuación es: $y = \frac{2}{3}x$.

b) Como $f'(x) = \frac{2}{3}x \Rightarrow f(x)$ ha de ser una función polinómica de 2.º grado, por lo cual la gráfica (C) queda descartada. La gráfica (A) corresponde a una función polinómica de 2.º grado, con coeficiente negativo en el término de 2.º grado, luego su función derivada sería negativa. Por tanto, la solución es la función (B).

22 Determina los coeficientes a y b de la parábola y = $= ax^2 + bx + 2$ sabiendo que la recta tangente en el punto en que $x = 1$ es la recta y = $-2x$.

La recta tangente en el punto en el cual $x = 1$ pasa por el punto (1, –2) y su pendiente vale (–2). Por tanto:

$$-2 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = -4$$

Por otro lado, $f'(1) = -2 \Rightarrow$ como $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 2a + b = -2$
Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -4 \\ 2a + b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -6 \end{array}$$

Luego, la parábola tiene de ecuación:

$$y = 2x^2 - 6x + 2$$

23 Se considera la función $f: R \to R$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.
***a)* Estudia su derivabilidad.**
***b)* Encuentra $f''(x)$.**

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiemos su derivabilidad en $x = 0$ y para ello buscamos las derivadas laterales.

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{1+h} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(1+h)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{h}{1-h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h(1-h)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{1-h} = 1$$

La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.
Luego es derivable $\forall\, x \in R$.

b) Hallamos $f''(x)$ a través de las derivadas laterales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(1+x)^2} & \text{si } x \geq 0 \\[2mm] \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f''(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{(1+h)^2}-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h-h^2}{h(1+h)^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{-2-h}{(1+h)^2} = -2$$

$$f''(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{(1-h)^2}-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2h-h^2}{h(1+h)^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{2-h}{(1+h)^2} = 2$$

La función $f''(x)$ no existe en $x = 0$ para todos los demás valores:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(1+x)^3} & \text{si } x > 0 \\[2mm] \dfrac{2}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

24 Ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $x \cdot y = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ en sus puntos de intersección.

Las curvas se cortan en los puntos que obtenemos al resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right);$$

$$Q\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

Basta con hallar el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas en P, en Q es igual.
Hallamos α_1 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x \cdot y = 1$ en el punto P con el eje de abscisas:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow tg\ \alpha_1 = \frac{-1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 = 148°\ 16'\ 57''$

Hallamos α_2 que es el ángulo que forma la recta tangente a la curva $x^2 - y^2 = 1$ en el punto P con el eje de abscisas.

$$y = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow tg\ \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_2 = 58°\ 16'\ 57''$

Luego, el ángulo que forman las rectas tangentes en P vale: $\alpha_1 - \alpha_2 = 90°$

25 ¿Es derivable en el punto $x = 1$ la función $f(x) = x + |x - 1|$? Justifica la respuesta.

$$f(x) = x + |x-1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)-1-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1-1}{h} =$$

La función $f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues sus derivadas laterales no coinciden.

26 Halla el punto de la curva $y = ln\ (1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.

La recta tangente a la curva en el punto P (1, 0) tiene por pendiente:

$$y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow m = 1$$

La recta perpendicular tendrá por pendiente (–1), por tanto:

$$\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow -1 \Rightarrow 1 + x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$$

Por tanto, el punto buscado es $P\ (-1, ln\ 2) \Rightarrow P\ (-1; 0{,}7)$

27 Busca los puntos de la curva

$$y = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + x + 1$$

que tienen la tangente formando un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

Hemos de buscar los puntos en los cuales la recta tangente tenga por pendiente $m = tg\ 45° = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 21x^2 + 26x + 1 \Rightarrow 4x^3 - 21x^2 + 26x + 1 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^3 - 21x^2 + 26x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = \dfrac{13}{4}$

Obtenemos tres puntos:

$$P\ (0, 1) \qquad Q\ (2, 15) \qquad R\left(\frac{13}{4}, 12{,}8\right)$$

28 Sea la función $f(x) = ln\ (a + bx^3)$. Estudia la relación que tiene que existir entre a y b para que $f'(1) = 1$.

$$f'(x) = \frac{3\,bx^2}{a+bx^3}$$

$$f'(1) = \frac{3\,b}{a+b} \Rightarrow \frac{3\,b}{a+b} = 1 \Rightarrow a = 2b$$

La relación que debe existir entre a y b es: $\boxed{a = 2b}$ con $b \neq 0$

UNIDAD DIDÁCTICA 13

Aplicaciones de las derivadas

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, concavidad hacia las y positivas y concavidad hacía las y negativas de una función.
2. Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de una función dada.
3. Saber optimizar funciones que dependan de una sola variable.
4. Valorar la utilidad de las derivadas en la resolución de problemas de la vida real y en el cálculo de límites.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Utilizando el cálculo de derivadas en el estudio de los intervalos de monotonía y de concavidad de funciones dadas.
Haciendo múltiples ejercicios con el fin de que el alumno sea capaz de determinar los extremos relativos de las funciones dadas.
Proponiendo al alumno gran cantidad de ejercicios encaminados a que asimile los procedimientos que se derivan de las propiedades o teoremas sobre las derivadas.
Proponiendo problemas, en orden creciente de dificultad, en los que hay que maximizar o minimizar funciones de una sola variable.

Actividades iniciales

1. Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones $f(x) = x \cdot |x|$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

• $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2) = 0$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$, luego es continua en toda la recta real.

Estudiemos la derivabilidad en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(0+h)^2 - 0}{h} = 0$$

La función $f(x)$ es derivable en $x = 0$, luego es derivable en toda la recta real.

• $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Esta función es continua en toda la recta real.

Estudiemos su derivabilidad en $x = 0$.

$$g'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{(0+h)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^+} \sqrt[3]{\frac{h^2}{h^3}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

$$g'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{(0-h)^2}}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

La función $g(x)$ no es derivable en $x = 0$.

2. Demuestra que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.

Veamos que para todo $x_1 < x_2$ se cumple que $3^{x_1} < 3^{x_2}$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow 3^{x_1 - x_2} > 1 \Rightarrow \frac{3^{x_2}}{3^{x_1}} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{x_2} > 3^{x_1} \Rightarrow 3^{x_1} < 3^{x_2}$$

Luego queda probado que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.

3. Expresa en función de la longitud de la base el área de un rectángulo cuyo perímetro vale 20 m. ¿Para qué valor de la base el área es máxima?

Llamando «a» a la altura del rectángulo y «b» a la base del mismo, podemos escribir:

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a$$

$$\text{Área} = b \cdot a = a\,(10 - a) = 10a - a^2$$

La función que nos da el área del rectángulo es una función cuadrática cuyo valor máximo lo alcanza en el vértice, es decir para $a = 5$ m.

Luego para este valor de la altura, la base mide $b = 10 - 5 = 5$ m.

Es decir, la base mide 5 m e igual que la altura.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

- **$f(x) = 4x - x^2$**
- **$g(x) = -5x + 3$**
- **$h(x) = \frac{2}{x}$**
- **$s(x) = e^{3x}$**
- **$l(x) = x^3 - 3x^2 + 5$**
- **$p(x) = \frac{x-3}{x+3}$**
- **$q(x) = 2^{-x}$**
- **$v(x) = \sqrt{x^2 - 9}$**

Para resolver este problema hallamos la derivada primera de cada una de estas funciones y estudiamos su signo:

• $f(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 4 - 2x$

$4 - 2x > 0 \Rightarrow -2x > -4 \Rightarrow x < 2$

$4 - 2x < 0 \Rightarrow -2x < -4 \Rightarrow x > 2$

f es estrictamente creciente en $(-\infty, 2)$

f es estrictamente decreciente en $(2, +\infty)$

• $g(x) = -5x + 3 \Rightarrow g'(x) = -5 < 0$

g es estrictamente decreciente en todo R

• $h(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow h'(x) = \frac{-2}{x^2}$

h es estrictamente decreciente en todo R

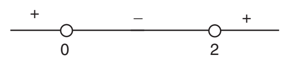
• $S(x) = e^{3x} \Rightarrow s'(x) = 3e^{3x} > 0$

S es estrictamente creciente en todo R

• $l(x) = x^3 - 3x^2 + 5 \Rightarrow l'(x) = 3x^2 - 6x$

Para estudiar el signo de $e'(x)$ calculamos sus ceros, que son $x = 0$ y $x = 2$.

Representamos estos valores en la recta real con lo cual queda ésta dividida en tres intervalos, y estudiamos el signo de l' en cada uno de ellos.



l es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

l es estrictamente decreciente en $(0, 2)$

• $p(x) = \frac{x-3}{x+3} \Rightarrow p'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$

p es estrictamente creciente en todo R

• $q(x) = 2^{-x} \Rightarrow q'(x) = -ln\, 2 \cdot 2^{-x} < 0$

q es estrictamente decreciente en todo R

• $v(x) = \sqrt{x^2 - 9} \Rightarrow v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

v es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$

v es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$

2 **Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:**

a) $y = -x^2 + 6x - 5$ ***b)*** $y = x\,(x-1)^2$

c) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$ ***d)*** $y = \dfrac{x}{\ln x}$

e) $y = \dfrac{2}{1 + x^2}$ ***f)*** $y = \dfrac{8x}{x^2 + 2}$

g) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ ***h)*** $y = x \cdot \ln x$

i) $y = x^2 \cdot e^x$

a) $y = -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow y' = -2x + 6$

$-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$y'' = -2 \Rightarrow y''(3) < 0 \Rightarrow$ la función dada tiene un máximo relativo en (3, 4)

b) $y = x\,(x-1)^2 \Rightarrow y' = (x-1)(3x-1)$

$(x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1\ ;\ x_2 = \dfrac{1}{3}$

$$y'' = 6x - 4 \begin{cases} y''(1) > 0 \\ y''\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un mínimo relativo en (1, 0) y un máximo relativo en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$

c) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12 \Rightarrow y' = 6x^2 - 30x + 36$

$6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = 3\ ;\ x_2 = 2$

$$y'' = 12x - 30 \begin{cases} y''(3) > 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en (3, 15) y un mínimo relativo en (2, 16).

d) $y = \dfrac{x}{\ln x} \Rightarrow y' = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$\dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e$

$y'' = \dfrac{2 - \ln x}{x \cdot (\ln x)^3}\ \{y''(e) > 0$

La función tiene un mínimo relativo en (*e, e*).

e) $y = \dfrac{2}{1 + x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2}$

$\dfrac{-4x}{(1 + x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$y'' = \dfrac{12x^2 - 4}{(1 + x^2)^3}\ \{y''(0) > 0$

La función tiene un máximo relativo en (0, 2).

f) $y = \dfrac{8x}{x^2 + 2} \Rightarrow y' = \dfrac{16 - 8x^2}{(x^2 + 2)^2}$

$\dfrac{16 - 8x^2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2};\ x_2 = -\sqrt{2}$

$$y'' = \dfrac{16x^3 - 96x}{(x^2 + 2)^3} \begin{cases} y''\left(\sqrt{2}\right) < 0 \\ y''\left(-\sqrt{2}\right) > 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto $\left(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$.

g) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$\dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1$

$$y'' = \dfrac{2}{x^3} \begin{cases} y''(1) > 0 \\ y''(-1) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un mínimo relativo en el punto (1, 2) y un máximo relativo en el punto (–1, –2).

h) $y = x \ln x \Rightarrow y' = \ln x + 1$

$\ln x + 1 = 0$

No tiene solución esta ecuación, por tanto esta función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

i) $y = x^2 \cdot e^x \Rightarrow y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x$

$2x\,e^x + x^2\,e^x = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ ;\ x_2 -2$

$$y'' = e^x\,(2 + 4x + x^2) \begin{cases} y''(0) > 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo relativo en el punto $\left(-2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ y un mínimo relativo en el punto (0, 0).

3 **Halla el valor de *a* para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor –1.**

$f(x) = x^2 - 6x + a \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$

$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(3) > 0$

La función tiene un mínimo relativo en el punto (3, –1), luego este punto debe verificar la función:

$$-1 = 9 - 18 + a \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

4 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$ en su punto de inflexión.**

Hallemos el punto de inflexión de la curva

$y = x^3 - 6x^2 + 16x - 11$

$y' = 3x^2 - 12x + 16$

$y'' = 6x - 12 \qquad y''' = 6$

$6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2\ ;\ y'''(2) \neq 0$

Luego el punto de inflexión es (2, 5)

La ecuación de la recta tangente en (2, 5) es:

$$y - 5 = y'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 5 = 4\,(x - 2) \Rightarrow 4x - y - 3 = 0$$

5 **Halla *b* y *c* para que la curva $y = x^3 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4).**

La función $f(x) = x^3 + bx + c$ tiene un máximo relativo en el punto (0, 4), por tanto:

a) $f(0) = 4 \Rightarrow 4 = c$

b) $f'(0) = 0\ ;\ f'(x) = 3x^2 + b \Rightarrow 0 = b$

Luego $c = 4\ ;\ b = 0$

6 **Halla *a, b*, y *c* de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto (6, –12) y se anule para $x = 8$.**

Que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo relativo en el punto (6, –12) significa que:
a) $f(6) = -12 \Rightarrow -12 = 36a + 6b + c$
b) $f'(6) = 0$; $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 12a + b$
Como se anula para $x = 8 \Rightarrow 64a + 8b + c = 0$. Resolviendo el sistema, obtenemos *a, b, c*.

$$\left.\begin{array}{r} 12a + b = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ 64a + 8b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{array}$$

7 **Sea *f* una función estrictamente decreciente y derivable en todo *R*. ¿Puede ser $f'(x) = 0$ en algún punto *x*? ¿Puede ser $f'(x) > 0$ en algún punto *x*? Razona las respuestas.**

Si *f* es estrictamente decreciente en todo *R*, entonces $f'(x) < 0\ \forall\ x \in R$.

8 **Sea *f* una función derivable que presenta máximo en un punto de abscisa x_0. ¿Qué posición, respecto de los ejes coordenados, presenta la recta tangente en x_0?**

Si *f* tiene un máximo en $P(x_0, f(x_0)) \Rightarrow f'(x_0) = 0 \Rightarrow$, la recta tangente en *P* es paralela al eje de abscisas y perpendicular al eje de ordenadas.

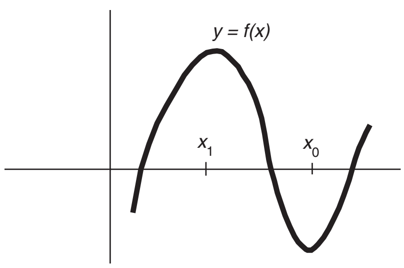
9 **Si una función *f* es tal que en un punto de abscisa $x = a$, verifica:**

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = 0 \text{ y } f''''(a) \neq 0$$

¿Qué particularidad presenta la función en ese punto?

La función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) en $(a, f(a))$.

10 **Si una función continua tiene un máximo y un mínimo relativos, ¿puede ser el valor del mínimo mayor que el valor correspondiente al máximo?**



f presenta un mínimo en el punto de abscisa x_0 y un máximo en el punto de abscisa x_1.

Por definición de mínimo $\forall\ x \in E\ (x_0, E) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, luego como $x_1 + \delta \in E\ (x_0, E) \Rightarrow f(x_1 + \delta) > f(x_0)$ y como por definición de máximo $f(x_1) > f(x_1 + \delta)$, entonces se verifica que $f(x_1) > f(x_0) \Rightarrow$ el valor del máximo es mayor que el del mínimo.

11 **Demuestra que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene siempre extremo relativo en su vértice, siendo máximo si a es negativo y mínimo si a es positivo.**

El vértice de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'\left(\frac{-b}{2a}\right) = 2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b = 0 \Rightarrow$ f tiene extremo relativo en su vértice, pues su derivada primera se anula en él.

$$f''(x) = 2a \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0 \text{ si } a > 0 \\ f''(x) < 0 \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Por tanto, si $a > 0$, entonces la función presenta un mínimo en el vértice y si $a < 0$ presenta un máximo en el vértice.

12 **Una función polinómica de tercer grado tiene siempre un punto de inflexión. Razónalo.**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b = 0 \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a}$
$f'''(x) = 6a \neq 0\ \forall x$, luego para

$x = \frac{-2b}{6a} \Rightarrow f''\left(\frac{-2b}{6a}\right) = 0$ y $f'''\left(\frac{-2b}{6a}\right) \neq 0$

Es decir, la función $f(x)$ tiene siempre un punto de inflexión en
$x = \frac{-2b}{6a}$

13 **Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$ ***b)*** $f(x) = \frac{2}{x}$

c) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$ ***d)*** $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

e) $f(x) = xe^{-2x}$ ***f)*** $f(x) = \ln(x + 4)$

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$

$f'(x) = 6x^2 - 18x \Rightarrow f''(x) = 12x - 18$

$f''(x) = 12x - 18 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

$f''(x) = 12x - 18 < 0 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

f es cóncava hacia las *y* positivas en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

y cóncava hacia las *y* negativas en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

En $x = \frac{3}{2}$ presenta un punto de inflexión en

$$\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{2}\right)$$

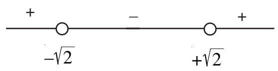
b) $f(x) = \frac{2}{x}$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{x^3}$

Si $x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las *y* positivas en $(0, +\infty)$

Si $x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 0)$
No existe punto de inflexión.

c) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$
$f'(x) = 4x^3 - 24x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24$
Estudiamos el signo de $f''(x) = 12x^2 - 24$.



f es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(+\sqrt{2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia las y negativas en $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.
Esta función tiene dos puntos de inflexión en $\left(\sqrt{2}, -12\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, -12\right)$.

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$$

f es cóncava hacia las y positivas en toda la recta real, pues $f''(x) > 0\ \forall x$
No existen puntos de inflexión.

e) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$
$f'(x) = e^{-2x} - 2x\, e^{-2x} \Rightarrow f''(x) = -4e^{-2x} + 4x\, e^{-2x} \Rightarrow f''(x) =$
$= e^{-2x}(4x - 4)$
f es cóncava hacia las y positivas en $(+1, +\infty)$ y cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$, f tiene un punto de inflexión en $(1, e^{-2})$.

f) $f(x) = ln\,(x + 4)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 4} \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{(x + 4)^2}$$

f es cóncava hacia las y negativas en toda la recta real, pues $f''(x) < 0\ \forall x$. No existen puntos de inflexión.

14 **Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - sen\ x}{x^3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^x$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ cos\ x - sen\ x}{x^3}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{sen^2\ x}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)}{sen\ x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \left[1 + sen\ x\right]^{\frac{cosec\ x}{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \left[x^2 - 2x\right]^{x^2}$ **h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[\sqrt[x]{b} - 1\right]$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \left[tg\ x\right]^{cos\ x}$

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - sen\,x}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1 - cos\,x}{3x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{6x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{cos\,x}{6} = \frac{1}{6}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \left[cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to +\infty} x\left[cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]}$$

Calculamos el límite del exponente aparte:

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] \overset{\infty\,-\,0}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{-\,sen\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Por tanto, el límite pedido vale:

$$\lim_{x\to +\infty} \left[cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x = e^0 = 1$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot cos\,x - sen\,x}{x^3} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{cos\,x - x\ sen\,x - cos\,x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sen\,x}{3x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-cos\,x}{3} = \frac{-1}{3}$$

d) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{sen^2\,x}\right) \overset{\infty\,-\,\infty}{=} \lim_{x\to 0} \frac{sen^2\,x - x^2}{x^2\ sen^2\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2\ sen\,x\ cos\,x - 2x}{2x\ sen^2\,x + 2x^2\ sen\,x \cdot cos\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{cos^2\,x - sen^2\,x - 1}{4x\ sen\,x\ cos\,x + x^2\ cos^2\,x - x^2\ sen^2\,x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{cos\,2x - 1}{2x \cdot sen\,2x + x^2 \cdot cos\,2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\ sen\,2x}{2\ sen\,2x + 6x\ cos\,2x - 2x^2\ sen\,2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-4\ cos\,2x}{10\ cos\,2x - 16x\ sen\,2x - 4x^2\ cos\,2x} = \frac{-4}{10} = \frac{-2}{5}$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)}{sen\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot sen\,\frac{1}{x} - cos\left(\frac{1}{x}\right)}{cos\,x} = -1$$

f) $$\lim_{x\to 0} (1 + sen\,x)^{\frac{cosec\,x}{2}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{cosec\,x}{2}(1 + sen\,x - 1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\,x}{2\ sen\,x}} = e^{\frac{1}{2}}$$

g) $$\lim_{x\to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} \overset{0^0}{\Rightarrow} \text{Haciendo } M = \lim_{x\to 0} (x^2 - 2x)^{x^2}$$

y tomando logaritmos, obtenemos:

$$ln\ M = ln\left[\lim_{x\to 0} (x^2 - 2x)^{x^2}\right] = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot ln\,(x^2 - 2x) \overset{0\,-\,\infty}{=}$$

$$\overset{0\,-\,\infty}{=} \lim_{x\to 0} \frac{ln\,(x^2 - 2x)}{\frac{1}{x^2}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x - 2}{x^2 - 2x}}{\frac{-2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\,(x - 1) \cdot x^3}{2x\,(x - 2)} = 0$$

Por tanto, $\ln M = 0 \Rightarrow M = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - 2x)^{x^2} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\sqrt[x]{b} - 1\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[b^{\frac{1}{x}} - 1\right] \overset{\infty\cdot 0}{=}$

$$\overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{b^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{b^{\frac{1}{x}} \cdot \ln b \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \ln b$$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} (tg\ x)^{\cos x}\ \infty^0 \Rightarrow$ Llamando:

$M = \lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} (tg\ x)^{\cos x}$ y tomando logaritmos:

$$\ln M = \lim_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} \cos x \cdot \ln(tg\ x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} \frac{\ln(tg\ x)}{\frac{1}{\cos x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} \frac{\frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x}}{\frac{sen\ x}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} \frac{\cos x}{sen^2\ x} = 0$$

Por tanto, $\ln M = 0 \Rightarrow M = \lim\limits_{x\to\frac{\Pi}{2}^+} (tg\ x)^{\cos x} = 1$

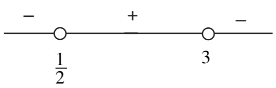
15 Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Determina, si existen, sus máximos y mínimos relativos.

Estudiamos el signo de la derivada primera para ver el crecimiento de la función:

$$f'(x) = \frac{(4x - 3)\,e^x - e^x\,(2x^2 - 3x)}{e^{2x}} = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}$$

Como el denominador es siempre positivo, estudiamos el signo del numerador:

$$-2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = \frac{1}{2}$$



f(x) es estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

f(x) es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$

Los extremos relativos son $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 3$. Para ver si son máximos o mínimos relativos hallamos la derivada segunda $f''(x) = \dfrac{2x^2 - 11x + 10}{e^x}$

$f''(3) < 0 \Rightarrow f(x)$ tiene máximo relativo en el punto $\left(3, \frac{9}{e^3}\right)$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{e^{1/2}}\right)$$

16 Descompón el número 48 en dos sumando tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

Sean x y $48 - x$ los números que hemos de buscar.
La función a optimizar es $S(x) = 5x^2 + 6(48 - x)^2$
$\Rightarrow S(x) = 11x^2 - 576x + 13824$

$S'(x) = 22x - 576 \Rightarrow 22x - 576 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{288}{11}$

$S''(x) = 22 \Rightarrow S''\left(\dfrac{288}{11}\right) > 0 \Rightarrow$ en $x = \dfrac{288}{11}$

la función $S(x)$ presenta un mínimo.

Los números buscados son: $\dfrac{288}{11}$ y $\dfrac{240}{11}$

17 Halla el número positivo cuya suma con 4 veces su recíproco sea mínima.

La función a optimizar es:

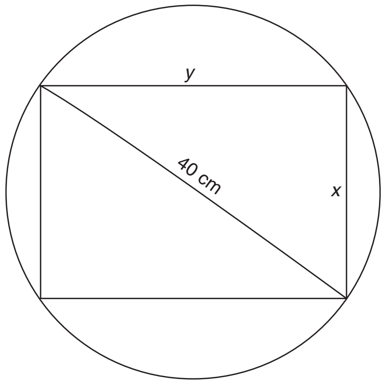
$S(x) = x + \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

$S'(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2} \Rightarrow \dfrac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = -2$

$S''(x) = \dfrac{8}{x^3} \Rightarrow S''(2) > 0$ y $S''(-2) < 0$

La función $S(x)$ presenta un mínimo en $x = 2$.
El número buscado es $x = 2$.

18 Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.



La función a optimizar es $A = x \cdot y$.

Como $x^2 + y^2 = 1600 \Rightarrow y = \sqrt{1600 - x^2}$

$\Rightarrow A(x) = x\sqrt{1600 - x^2} = \sqrt{1600x^2 - x^4}$

$A'(x) = \dfrac{3200x - 4x^3}{2\sqrt{1600x^2 - x^4}} = \dfrac{1600 - 2x^2}{\sqrt{1600 - x^2}}$

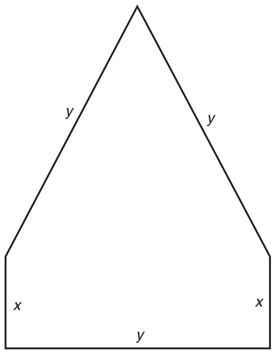
$1600 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 20\sqrt{2}$

$A''(x) = \dfrac{2x^3 - 4800x}{(1600 - x^2)\sqrt{1600 - x^2}}$

$A''(20\sqrt{2}) < 0$ y $A''(-20\sqrt{2}) > 0$

La función $A(x)$ es máxima para $x = 20\sqrt{2}$ e $y = 20\sqrt{2}$. Por lo cual el rectángulo de área máxima es un cuadrado.

19 **Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.**



La función a optimizar es:

$$A = x \cdot y + \frac{y \cdot y \sqrt{3}}{4}$$

Como $2x + 3y = 6{,}6 \Rightarrow x = \dfrac{6{,}6 - 3y}{2}$

La función a optimizar en una sola variable es:

$$A(y) = \frac{6{,}6y - 3y^2}{2} + \frac{\sqrt{3}\, y^2}{4} \Rightarrow A(y) = \frac{13{,}2y - 6y^2 + \sqrt{3} y^2}{4}$$

$$A'(y) = \frac{13{,}2 - 12y + 2\sqrt{3}y}{4} \Rightarrow 13{,}2 - 12y + 2\sqrt{3}y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{13{,}2}{12 - 2\sqrt{3}} = 1{,}5 \text{ m}$$

$$A''(y) = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A''(1{,}5) < 0$$

Luego la superficie es máxima para $y = 1{,}5$ m $\quad x = 1{,}05$ m
La ventana es un rectángulo de base 1,5 m y altura 1,05 m y un triángulo equilátero de lado 1,5 m.

20 **Halla los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:**

$$f(x) = sen\ 2x$$

$f'(x) = 2\ cos\ 2x \Rightarrow 2\ cos\ 2x = 0 \Rightarrow cos\ 2x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\Pi}{2} + K \cdot 2\Pi \Rightarrow x = \dfrac{\Pi}{4} + \Pi K \\[2mm] 2x = \dfrac{3\Pi}{2} + 2\Pi K \Rightarrow x = \dfrac{3\Pi}{4} + \Pi K \end{cases}$$

$f''(x) = -4\ sen\ 2x$

$f(x)$ tiene máximo relativo en todos los puntos de abscisa $x = \dfrac{\Pi}{4} + K\Pi$ y mínimo relativo en todos los puntos de abscisa $x = \dfrac{3\Pi}{4} + \Pi K$

$f''(x) = -4\ sen\ 2x = 0 \Rightarrow sen\ 2x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 + 2\Pi K \\ 2x = \Pi + 2\Pi K \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 + \Pi K \\[2mm] 2x = \dfrac{\Pi}{2} + \Pi K \end{matrix}$$

$f'''(x) = -8\ cos\ 2x$

Como $f'''\ (0 + \Pi K) \neq \cdot\ y\ f'''\left(\dfrac{\Pi}{2} + \Pi\ K\right) \neq 0$ entonces la función $f(x)$ tiene punto de inflexión en todos los puntos de abscisa $x = 0 + \Pi K$ y $x = \dfrac{\Pi}{2} + \Pi K$, es decir, en todos los puntos de abscisa $x = 0 + \dfrac{\Pi}{2} K$

21 **Halla el valor de K que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + K}$ tenga un extremo relativo único. ¿Se trata de un máximo o un mínimo relativo?**

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + K}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (x^2 - 2x + K)}{(x^2 + K)^2}$$

$e^x (x^2 - 2x + K) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + K = 0 \Rightarrow$ para que existe una única solución se debe verificar que $K = 1 \Rightarrow$ la solución única es $x = 1$.

$$f'(x) = \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^x (x-1)(x^3 - 3x^2 + 5x + 1)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow f''(1) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{e^x (x^6 - 6x^5 + 21x^4 - 36x^3 + 15x^2 + 18x - 5)}{(x^2+1)^4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f'''(1) > 0$

Por tanto, en $x = 1$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

22 **Sea la función f tal que:**

- **$f(1) = 1$**
- **$f'(1) = 2$**
- **$f''(1) = f'''(1) = f^{(4)}(1) = 0$**
- **$f^{(5)}(1) = 40$**
- **$f^{(6)} = -120$**

Entonces en $x = 1$ ¿hay máximo o mínimo?, ¿es creciente o decreciente?, ¿tiene algún punto de inflexión?

En $x = 1$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.
Esta función presenta un punto de inflexión en (1, 1).
La función es creciente en $x = 1$.

23 **Dada la función $f(x) = x\ (x - 1)^3$:**

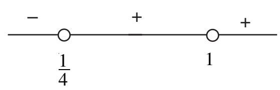
a) **Estudia su monotonía.**
b) **Halla sus extremos relativos.**
c) **Estudia el tipo de concavidad.**
d) **Halla si existen los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = x\ (x - 1)^3$

$f'(x) = (x - 1)^2\ (4x - 1)$.

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

$f'(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2\ (4x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1;\ \ x = \dfrac{1}{4}$



$f'(0) < 0 \qquad f'\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0 \qquad f'(2) > 0$

f es estrictamente creciente en $\left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ y f es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$

b) $f(x) = (x-1)^2 (4x-1)$; $(x-1)^2 (4x-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{4}$

$f'(x) = (x-1)(12x-6)$

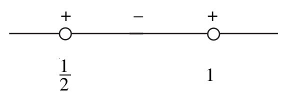
$f'(1) = 0$

$f'\left(\frac{1}{4}\right) > 0$

f tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{4}, \frac{-27}{256}\right)$

c) $f''(x) = (x-1)(12x-6)$;

Estudiamos el signo de la derivada segunda: $x = 1 \quad x = \frac{1}{2}$



$f''(0) > 0 \qquad f''\left(\frac{3}{4}\right)\ 0 \qquad f''(2) > 0$

f es cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ y f es cóncava hacia las y negativas en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

d) $f''(x) = (x-1)(12x-6)$; $(x-1)(12x-6) = 0$

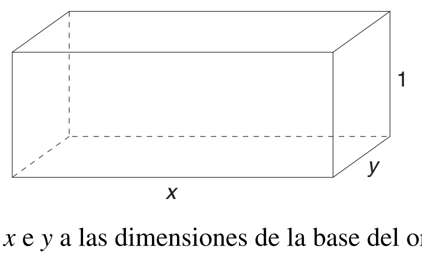
$\Rightarrow x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{2}$

$f'''(x) = 24x - 18$

$f'''\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{16}\right)$

$f'''(1) \neq 0$ pero como $f'(1) = f''(1) = 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ f no tiene punto de inflexión.

24 **Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m³, su altura 1 m y el coste de costrucción por m² es de 5.000 pesetas para la base, 6.000 pesetas para la tapa y 4.000 pesetas para cada lateral.**



Llamamos x e y a las dimensiones de la base del ortoedro. La función a optimizar es:

$C = 5\,000 \cdot x \cdot y + 6\,000\, x \cdot y + 4\,000 \cdot 2 \cdot y \cdot 1 + 4\,000 \cdot 2 \cdot x \cdot 1$

Como $x \cdot y \cdot 1 = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{x}$

La función a optimizar en una sola variable es:

$C(x) = 45\,000 + 54\,000 + \frac{72\,000}{x} + 8\,000\, x \Rightarrow$

$\Rightarrow C(x)\ \frac{8\,000\, x^2 + 99\,000\, x + 72\,000}{x}$

$C'(x) = \frac{8\,000\, x^2 - 72\,000}{x^2} \Rightarrow 8\,000\, x^2 - 72\,000 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$C''(x) = \frac{14\,4000}{x^3}$

$C''(3) > 0 \Rightarrow$ el coste del contenedor es mínimo para $x = 3$m, $y = 3$m; es decir, el contenedor es un prisma de base cuadrada de lado 3 m y altura 1 m.

25 **En la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ halla a, b y c para que la función tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un punto de inflexión en (0, 0).**

Si la función $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 1$, entonces cumple que $f'(1) = 0$ y $f''(1) < 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f'(1) = 3a + b \Rightarrow 3a + b = 0$.

Si la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en (0, 0) entonces se cumple: $f''(0) = 0$ y $f(0) = 0$ $f''(x) = 6ax \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0$

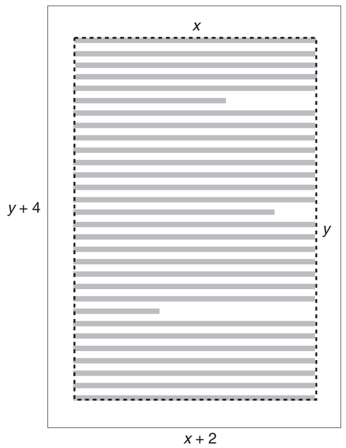
$f(0) = c \Rightarrow c = 0$.

Hay infinitas soluciones para a, b, c

Todas las que verifiquen que $\begin{cases} c = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$

y además con $a < 0$ para que efectivamente en $x = 1$ exista un máximo relativo.

26 **Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.**



Llamando x, y a las dimensiones del texto impreso, obtenemos que la función de optimización buscada es:

$$S = (y+4)(x+2) = xy + 2y + 4x + 8$$

Expresando esta función en una sola variable mediante

$$x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{\mathrm{x}}$$

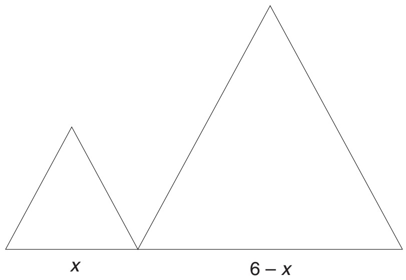
$S(x) = 18 + \frac{36}{x} + 4x + 8 \Rightarrow S(x) = \frac{4x^2 + 26x + 36}{x}$

$S'(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2} \Rightarrow \frac{4x^2 - 36}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$

$S''(x) = \frac{72}{x^3}$ y $S''(3) > 0$

Por tanto, la superficie de la hoja es mínima para $x = 3$ cm $y = 6$ cm, es decir, la hoja tendrá por dimensiones:
$x + 2 = 5$ cm de anchura
$y + 4 = 10$ cm de altura

27 **Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.**



Llamando x a una de las partes, la otra tendrá por longitud $6 - x$.

La altura de un triángulo equilátero de lado l unidades viene dada por: $\frac{l\sqrt{3}}{2}$ unidades.

La función a optimizar es:

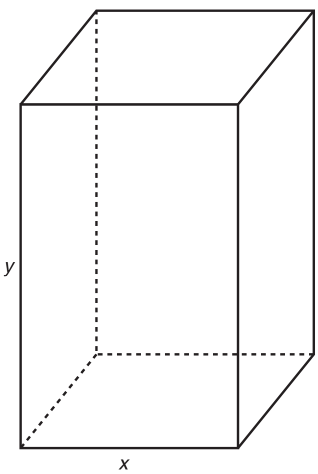
$$S(x) = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2}}{2} + \frac{(6-x)\cdot\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 12x + 36)$$

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(4x - 12) \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3} \Rightarrow S''(3) > 0$$

Por tanto, la función se hace mínima para $x = 3$ cm.
Luego el segmento dado se divide en dos partes iguales de longitud 3 cm cada una de ellas.

28 **Halla las dimensiones de un depósito abierto superiormente en forma de prisma recto de base cuadrada, de 500 m³ de capacidad y que tenga un revestimiento de coste mínimo.**



Llamando x al lado de la base del prisma e y a su altura, obtenemos que la función a optimizar es:

$$C = x^2 + 4xy$$

Como el volumen es de 500 m³, tenemos que

$$x^2 \cdot y = 500 \Rightarrow y = \frac{500}{x^2}$$

La función a optimizar, en una sola variable, es:

$$C(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

$$C'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2x^3 - 2000}{x^2} \Rightarrow \frac{2x^3 - 2000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} \Rightarrow x = 10 \text{ m}$$

$$C''(x) = 2 + \frac{4000}{x^3}\ ;\ C''(10) > 0$$

Por tanto, el coste es mínimo para un depósito de 10 m de lado de la base y de $y = 5$ m de altura.

29 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}[x-1]\cdot tg\left[\frac{\Pi x}{2}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a^x + b^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}$; $a>1$ y $b>1$

d) $\lim\limits_{x\to \Pi}[1 - cos\ 2x]^{\frac{1}{tg\left[\frac{x}{2}\right]}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[2\cdot e^{\frac{1}{x}} - 1\right]^{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x + a^x\right]^{\frac{1}{x}}$; $a>1$

g) $\lim\limits_{x\to \Pi^+}\left[\frac{2}{sen\ x} - \frac{2}{\Pi - x}\right]$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{ln\,(2-e^x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{ln\ x} - \frac{1}{x-1}\right]$

a) $$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right] \overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1 - x}{x\,e^x - x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1}{e^x + x\,e^x - 1} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2e^x + x\,e^x} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot tg\left(\frac{\Pi x}{2}\right) \overset{0 - \infty}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\cdot sen\left(\frac{\Pi x}{2}\right)}{cos\left(\frac{\Pi x}{2}\right)} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{sen\left(\frac{\Pi x}{2}\right) + (x-1)\cdot\frac{\Pi}{2}\cdot cos\left(\frac{\Pi x}{2}\right)}{-\frac{\Pi}{2}\cdot sen\left(\frac{\Pi x}{2}\right)} = -\frac{2}{\Pi}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\cdot ln\,a + b^x\cdot ln\,b}{2}} = e^{\frac{ln\,a + ln\,b}{2}} = e^{ln\sqrt{ab}} = \sqrt{a\cdot b}$$

d) $$\lim_{x\to\Pi}(1 - cos\ 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Este límite presenta la indeterminación 0^0. Para resolverla tomamos logaritmos neperianos.

$$M = \lim_{x\to\Pi}(1 - cos\ 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}} \Rightarrow ln\ M = ln\left[\lim_{x\to\Pi}(1 - cos\ 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\Pi} \frac{\ln(1-\cos 2x)}{tg\,\frac{x}{2}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\Pi} \frac{\frac{2\,sen\,2x}{1-\cos 2x}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \lim_{x\to\Pi}\frac{4\,sen\,2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos 2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\Pi}\frac{8\cos 2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot sen\,2x}{+2\,sen\,2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\Pi}\frac{4\cos 2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\,sen\,x\cdot sen\,2x}{sen\,2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\Pi}\frac{-8\,sen\,2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cos 2x\cdot sen\,x - 2\cos x\,sen\,2x - 4\cos 2x\cdot sen\,x}{2\cos 2x} =$$

$$= 0 \Rightarrow \ln M = 0 \Rightarrow M = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\Pi}(1-\cos 2x)^{\frac{1}{tg\left(\frac{x}{2}\right)}} = 1$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{\frac{1}{x}}-1\right)^{2x} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\left(2e^{\frac{1}{x}}-1-1\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\left(2e^{\frac{1}{x}}-2\right)} \overset{\infty\cdot 0}{=} e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\frac{1}{2x}}} = e^4$$

f) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x+a^x\right)^{\frac{1}{x}}$$

Este límite presenta la indeterminación ∞^0. Para resolverlo, tomamos logaritmos neperianos:

$$M = \lim_{x\to+\infty}\left(x+a^x\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln M = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(x+a^x\right)^{\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+a^x)}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{1+a^x\cdot\ln a}{x+a^x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\cdot(\ln a)^2}{1+a^x\cdot\ln a} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\cdot(\ln a)^3}{a^x(\ln a)^2} = \ln a$$

Luego como $\ln M = \ln a \Rightarrow M = a$
Por tanto, el límite pedido es:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+a^x\right)^{\frac{1}{x}} = a$$

g) $$\lim_{x\to\Pi^+}\left(\frac{2}{sen\,x}-\frac{2}{\Pi - x}\right) \overset{\infty\,-\,\infty}{=} \lim_{x\to\Pi^+}\frac{2\Pi-2x-2\,sen\,x}{(\Pi-x)\cdot sen\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\Pi^+}\frac{-2-2\cos x}{-sen\,x+(\Pi-x)\cos x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\Pi^+}\frac{2\,sen\,x}{-\cos x-\cos x-(\Pi-x)\,sen\,x} = 0$$

h) $$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)}$$

Este límite presenta la indeterminación 0^0. Resolvemos esta indeterminación tomando logaritmos neperianos:

$$M = \lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)} \Rightarrow \ln M = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\ln(2-e^x)\cdot\ln x \overset{0\,\cdot\,\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(2-e^x)}} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{(2-e^x)\ln^2(2-e^x)}{x\cdot e^x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-e^x\ln^2(2-e^x)-2\,e^x\ln(2-e^x)}{e^x+x\,e^x} =$$

Por tanto: $\ln M = 0 \Rightarrow M = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\ln(2-e^x)} = 1$

i) $$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) \overset{\infty\,-\,\infty}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x\ln x+x-1} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\ln x+1+1} = \frac{1}{2}$$

30 Halla *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen^2\,x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1+x^2) - a & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2\,x}{x^2} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{2\,sen\,x\cos x}{2x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

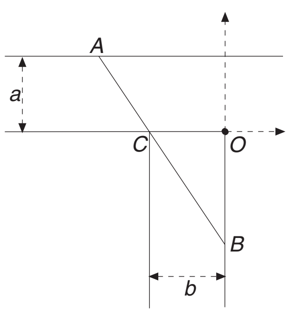
$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x - sen^2\,x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\ln(1+x^2) - a = -a$$

Por tanto, esta función es continua en x = 0 siempre y cuando a = –1, ya que para

$$a = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

31 Calcula la longitud máxima que puede darse a una viga para pasarla horizontalmente de una calle de anchura a a otra perpendicular de anchura b.



Sea AB la viga.
Fijamos unos ejes de coordenadas cartesianas de centro en 0. Respecto a estos ejes coordenados, los puntos A, C, B tienen de coordenadas C (–b, 0) B (0, c). El punto A está en la intersección de la recta CB con $y = a$.

$$\left.\begin{array}{l} r_{CB} \equiv cx - by + cb = 0 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{ba - cb}{c},\ a\right)$$

La longitud de la viga es:

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{ba - cb}{c}\right)^2 + (a - c)^2} = \frac{(a - c)}{c}\sqrt{b^2 + c^2}$$

$$d\ (A, B) = \frac{-c^3 - ab^2}{c^2\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow +c^3 + ab^2 = 0 \Rightarrow c = -\sqrt[3]{ab^2}$$

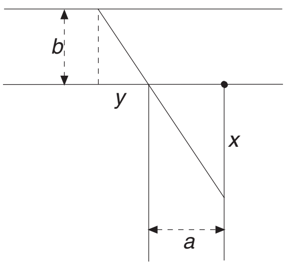
Para c = $-\sqrt[3]{ab^2}$ la función tiene un mínimo, por tanto, la longitud máxima es la distancia del punto A al B, siendo

$$A\left(-\sqrt[3]{a^2b} - b,\ a\right) \text{ y } B\left(0,\ -\sqrt[3]{ab^2}\right)$$

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2b} + b\right)^2 + \left(-\sqrt[3]{ab^2} - a\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}\ m$$

La longitud máxima es: $\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}\ m$.

Otra forma:



$$\frac{x}{a} = \frac{b}{y} \Rightarrow y = \frac{ab}{x}$$

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + x^2}\left(1 + \frac{b}{x}\right)$$

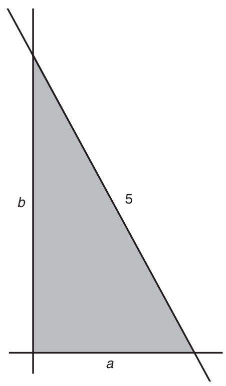
$$l' = \frac{x^3 - ba^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} \Rightarrow x^3 - ba^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{ba^2}$$

Para este valor de x, esta función se hace mínima, por tanto, la longitud máxima de la viga viene dada por:

$$l = \sqrt{a^2 + \sqrt[3]{b^2a^4}}\left(1 + \frac{b}{\sqrt[3]{ba^2}}\right) = \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3\ m$$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

32 Un segmento de longitud 5 cm apoya sus extremos en los semiejes positivos *OX* y *OY*, de manera que forma con éstos un triángulo rectángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.



Llamamos a y b a los catetos del triángulo rectángulo. La función a optimizar es

$$A = \frac{1}{2}\ a \cdot b$$

Como $a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow b = \sqrt{25 - a^2}$. Por tanto,

$$A\ (a) = \frac{1}{2}\ a\sqrt{25 - a^2}$$

$$A'\ (a) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{25 - a^2} + \frac{-2a^2}{2\sqrt{25 - a^2}}\right] = \frac{1}{2}\ \frac{25 - 2a^2}{\sqrt{25 - a^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25 - 2a^2}{2\sqrt{25 - a^2}} = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$A''\ (a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^3 - 75\ a}{(25 - a^2)\sqrt{25 - a^2}}$$

$$A''\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Por tanto, las dimensiones del triángulo de área máxima buscado son

$$a = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ \text{cm} \qquad b = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ \text{cm}$$

33 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]$

$$f\ (x) = x^2 - 2\ |x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \text{ si } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

f(x) en el intervalo $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]$ es:

Monótona creciente en $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \cup \left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

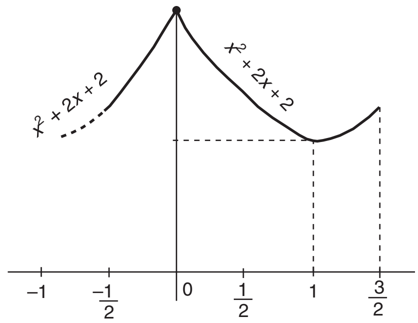
Monótona decreciente en (0, 1)

Tiene un mínimo relativo en (1, 1), pues

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1\ (x \geq 0)$

$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow$ Mínimo (1, 1).

En $x = 1$ tiene un mínimo absoluto que vale 1, como podemos ver a través de la gráfica.



34 Se considera la función *f*, definida en *R*, por:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{si } x \neq 0}$$

$$\boldsymbol{f(0) = 0}$$

Estudia su continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

• Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0)$$

La función $f(x)$ es continua en $x = 0$, pues es continua por la derecha y por la izquierda.

• Veamos la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = 1$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues existen las derivadas laterales pero no coinciden.

35 A un vendedor de ordenadores le cuesta 140.000 pesetas cada modelo de la marca PCHE-COMP. Ha comprobado que, al precio de 240.000 pesetas unidad, vende 30 ordenadores mensualmente y que por cada 2.000 pesetas de descuento en el precio puede vender 3 unidades más al mes. Halla a qué precio debe venderlos para obtener el máximo beneficio posible.

Con un descuento de $(2\,000 \cdot n)$ ptas. venderá $3n + 30$ ordenadores cada mes. La función a optimizar que nos dará el beneficio es:

$B(n) = (240\,000 - 140\,000 - 2\,000 \cdot n) \cdot (3n + 30)$

$B(n) = -6\,000n^2 + 240\,000n + 3\,000\,000$

$B'(n) = -12\,000n + 240\,000 = 0 \Rightarrow n = 20$

$B''(n) = -12\,000 \Rightarrow B''(20) < 0 \Rightarrow$ que para $n = 20$ el beneficio es máximo.

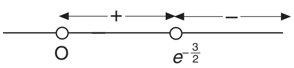
El precio a que debe venderlos es $P = 240\,000 - 2\,000 \cdot 20 = 200\,000$ ptas. cada ordenador.

36 Estudia el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x^2}$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$Dom\, f = \{x \in R \mid x > 0\} = (0, +\infty)$

Determinamos la monotonía estudiando el signo $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2\ln x - 3}{x^3}$$

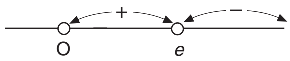


$f(x)$ es estrictamente creciente en $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

y estrictamente decreciente en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$

37 Estudia los intervalos de monotonía y los extremos de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Como aplicación, prueba que si $x > 0$ entonces $x^e \le e^x$.

• Determinamos la monotonía de $f(x)$ estudiando el signo de $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$



$f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, e)$ y estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$.

• Determinemos los extremos:

$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln = 0 \Rightarrow x = e$

$f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$; $f''(e) < 0$.

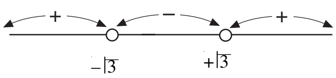
$f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

La función $f(x)$ sólo está definida para $x > 0$ por la monotonía y la existencia de máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$, podemos escribir que

$$f(x) \le \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Rightarrow e \ln x \le x \Rightarrow \ln x^e \le x \Rightarrow \boxed{x^e \le e^x}$$

38 1) Enuncia, en función de la derivada segunda, las condiciones de concavidad o concavidad hacia las *y* positivas y convexidad (o concavidad hacia las *y* negativas) en un punto.
2) Siendo $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 4x + 3)$, calcula:
• Los intervalos en los que *f* es cóncava.
• Los intervalos en los que *f* es convexa.

1) En el libro de texto se pueden ver los enunciados pedidos.
2) $f(x) = e^{-x} \cdot (x^2 + 4x + 3)$.
Para estudiar la concavidad de esta función vemos el signo de la derivada segunda.
$f'(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x + 1)$
$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 3)$



$f(x)$ es cóncava hacia las y positivas si $f''(x) > 0$, es decir en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(+\sqrt{3}, +\infty\right)$, y cóncava hacia las y negativas si $f''(x) < 0$, es decir, en $\left(-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\right)$.

39 Determina *a* y *b* para que el siguiente límite exista y sea finito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + ax + bx^2}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + ax + bx^2}{\operatorname{sen}^3 x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} + a + 2bx}{3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x}$$

Si $a \ne -1$ este límite tiende a infinito. Por tanto, $\boxed{a = -1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + 2b\,x}{3\,sen^2\,x \cdot cos\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 2b}{6\,sen\,x \cdot cos^2\,x - 3\,sen^3\,x}$$

Si $2b \neq +1$, este límite es infinito. Por tanto, para $\boxed{b = +\frac{1}{2}}$ obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + 1}{6\,sen\,x \cdot cos^2\,x - 3\,sen^3\,x} \underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6\,cos^3\,x - 21\,sen^2\,x \cdot cos\,x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

40 Halla los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuya distancia al punto (6, 0) sea mínima.

Los puntos buscados serán de la forma $P\left(x, \pm\sqrt{8x}\right)$

La función a optimizar es:

$$d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\pm\sqrt{8x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 36}$$

$$d(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+36}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$d'(x) = \frac{32}{(x^2-4x+36)\sqrt{x^2-4x+36}}$$

$d''(2) > 0$

Por tanto, para $x = 2$ la distancia es mínima. Los puntos buscados son: P (2, +4), Q (2, –4).

BLOQUE TEMÁTICO III:
ANÁLISIS

UNIDAD DIDÁCTICA 14

Representación gráfica de funciones

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Saber estudiar o analizar cualquier característica de una función dada por medio de su expresión analítica.
2. Representar funciones expresadas analíticamente.
3. Interpretar las gráficas de las funciones.
4. Valorar la utilidad de las gráficas como potentes herramientas que nos muestran sus propiedades.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Comenzar representando funciones no excesivamente complejas y utilizando todas las características que el alumno ya conoce sobre funciones.
Representar los distintos tipos de funciones haciendo hincapié en las características más peculiares de cada uno de ellos.
Utilizar los medios informáticos (calculadoras gráficas y ordenadores) en la representación gráfica de funciones.

Actividades iniciales

1. En las siguientes funciones estudia las características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión:

a) $\boldsymbol{y = 2x^2 - 8x}$ ***b)*** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}}$

a) $f(x) = 2x^2 - 8$

• Dominio: $Dom\, f = R$

• Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P\,(0, 0) \\ Q\,(4, 0) \end{array}$$

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P\,(0, 0)$$

• Simetrías:

$f(x) = 2x^2 - 8x$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 8\,(-x) = 2x^2 + 8x$

$f(x) \neq f(-x) \Rightarrow$ f no es simétrica respecto al eje OY.

$f(x) \neq -f(-x) \Rightarrow f$ no es simétrica respecto al origen de coordenadas.

• Periodicidad: f no es periódica.

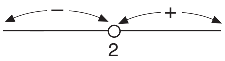
• Asíntotas:

No tiene asíntotas.

• Monotonía:

$f'(x) = 4x - 8$

Estudiamos el signo de $f'(x)$.



$f'(x) < 0$ en $(-\infty, 2)$

$f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$

f es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

• Extremos relativos:

$f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$f''(x) = 4 > 0$

f tiene un mínimo relativo en $(2, -8)$

• Concavidad:

$f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow f$ es cóncava hacia las y positivas en todo R.

• No existen puntos de inflexión.

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

• Dominio: $Dom\, f = R - \{+2, -2\}$

• Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P\,(0, 0)$$

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P\,(0, 0)$$

• Simetrías:

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}\ ;\ g(-x) = \frac{(x-)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Como $-f(x) = +g(-x)$ la función g es simétrica respecto al origen de coordenadas.

• Periodicidad: g no es periódica.

• Asíntotas:

Asíntotas verticales: Las rectas de ecuaciones.

$x = 2$ y $x = -2$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty;\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

No existen las asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

Son de la forma $y = mx + b$.

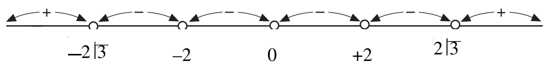
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x\,(x^2 - 4)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

• Monotonía:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} \left\{\begin{array}{l} x^4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{array} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{array}\right.$$



$g'(x) > 0$ en $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right) \Rightarrow g$ es estrictamente creciente en $\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$

$g'(x) < 0$ en $\left(-2\sqrt{3}, -2\right) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup \left(2, 2\sqrt{3}\right. \Rightarrow g$ es estrictamente decreciente en $\left(-2\sqrt{3}, -2\right) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup$ $\cup \left(2, 2\sqrt{3}\right)$

• Extremos relativos:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{array}$$

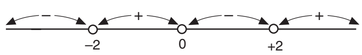
$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^2}$$

$g''\left(2\sqrt{3}\right) > 0 \Rightarrow g$ tiene mínimo relativo en el punto $\left(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right)$

$g''\left(-2\sqrt{3}\right) < 0 \Rightarrow g$ tiene máximo relativo en el punto $\left(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}\right)$.

• Concavidad

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}$$



$g''(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, +2) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, +2)$.
$g''(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y positivas en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
• Puntos de inflexión:

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3}\ ;\ 8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = \frac{-24x^4 - 576x^2 - 384}{(x^2-4)^4}$$

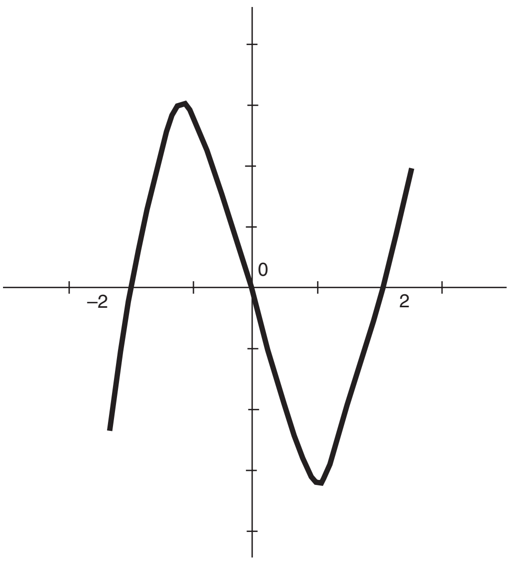
$g'''(0) \neq 0$
Existe un punto de inflexión en el punto (0, 0).

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

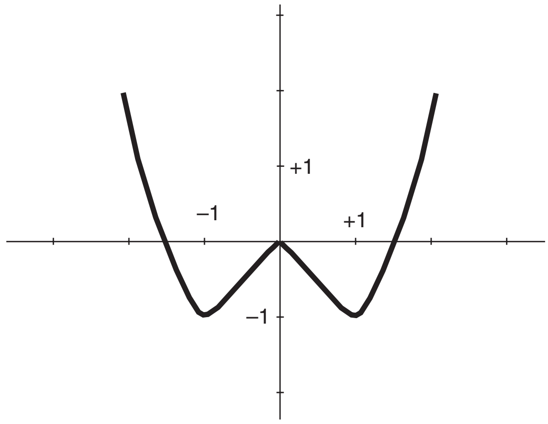
1 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = x(x+2)(x-2)$ ***b)*** $y = x^4 - 2x^2$
c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$ ***d)*** $y = |x^2 - 4x + 3|$
e) $y = -\frac{x^3}{6} + x$ ***f)*** $y = x^4 - 2x^2 - 8$

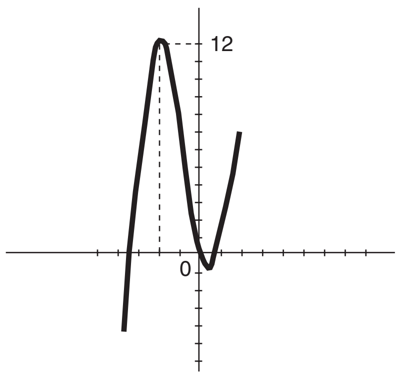
a) $y = x(x+2)(x-2) = f(x)$
• Dominio: $Dom\,f = R$
• Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al Origen y no es periódica.
• Puntos de corte con los ejes:
(0, 0) (–2, 0) (2, 0)
• Asíntotas y ramas infinitas:
No tiene asíntotas.
• Extremos relativos:
Mínimo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$
Máximo $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$
• Puntos de inflexión:
(0, 0)
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
f es positiva en $(-2, 0) \cup (2, \infty)$



b) $y = x^4 - 2x^2 = f(x)$
• Dominio: $Dom\,f = R$
• Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje de ordenadas y no es periódica.
• Puntos de corte con los ejes:
$(0, 0)\,(\sqrt{2}, 0)\,(-\sqrt{2}, 0)$
• Asíntotas y ramas infinitas: No tiene.
• Extremos relativos:
Máximo (0, 0)
Mínimos en (1, 1) y (–1, 1)
• Puntos de inflexión:
$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$
f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

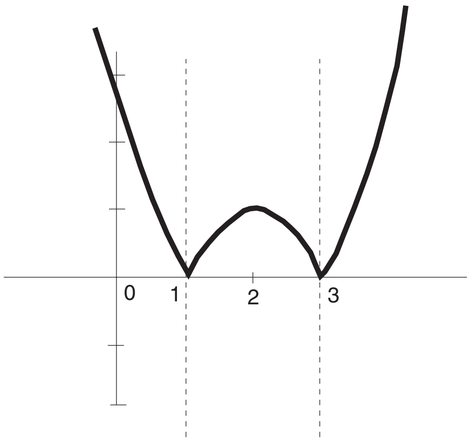


c) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x = f(x)$
• Dominio: $Dom\,f = R$
• Simetrías y periodicidad: Ni es simétrica ni periódica.
• Puntos de corte con los ejes
(0, 0) (0,64; 0) (–3,14; 0)
• Asíntotas y ramas infinitas: No tiene.
• Extremos relativos:
Máximo (–2, 12) Mínimo $\left(\frac{1}{3}, \frac{-19}{27}\right)$
• Puntos de inflexión:
$\left(-\frac{5}{6}; 5{,}65\right)$
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty; -3{,}14) \cup (0; 0{,}64)$
f es positiva en $(-3{,}14; 0) \cup (0{,}64; +\infty)$



d) $y = |x^2 - 4x + 3|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \text{ si } x \le 1 \text{ o } x \ge 3 \\ -x^2 + 4x - 3 \text{ si } 1 < x < 3 \end{cases}$$



e) $y = -\dfrac{x^3}{6}\ f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes:

$$(0,\ 0)\ (\sqrt{6},\ 0)\ (-\sqrt{6},\ 0)$$

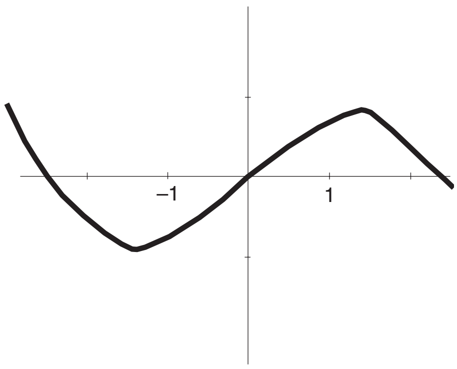
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:

$$\text{Máximo } \left(\sqrt{2},\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \quad \text{Mínimo } \left(-\sqrt{2},\ \frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)$$

- Puntos de inflexión:
  (0, 0)
- Intervalos de signo constante:

  f es positiva en $\left(-\infty,\ -\sqrt{6}\right) \cup \left(0,\ +\sqrt{6}\right)$

  f es negativa en $\left(-\sqrt{6},\ 0\right) \cup \left(+\sqrt{6},\ +\infty\right)$



f) $y = x^4 - 2x^2 - 8 = f(x)$

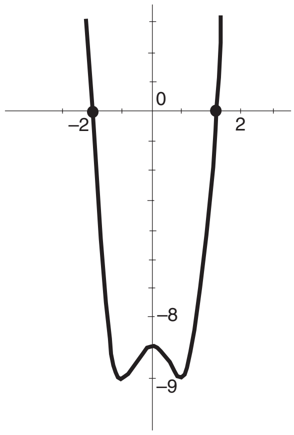
- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje de ordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes:

  (0, –8) (2, 0) (–2, 0)

- Asíntotas y ramas infinitas: No tiene.
- Extremos relativos:
  Máximo (0, –8)
  Mínimos (1, –9) y (–1, –9)
- Puntos de inflexión:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-77}{9}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{-77}{9}\right)$$

- Intervalos de signo constante
  f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
  f es negativa en $(-2, 2)$



2 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $= \dfrac{4}{x^2 - 4}$

b) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

c) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ **curva de Agnesi**

d) $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

e) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$

f) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

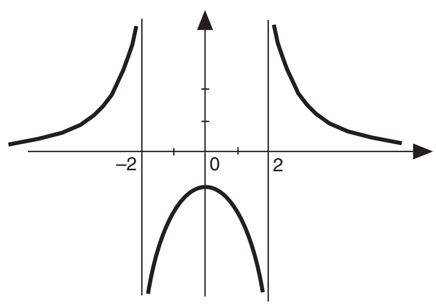
g) $y = \dfrac{x + 1}{(x + 2)(x + 3)(x + 4)}$

h) $y = \dfrac{x}{1 + |x|}$

i) $= \dfrac{(x + 1)(x + 2)\ x}{(x - 1)(x + 3)}$

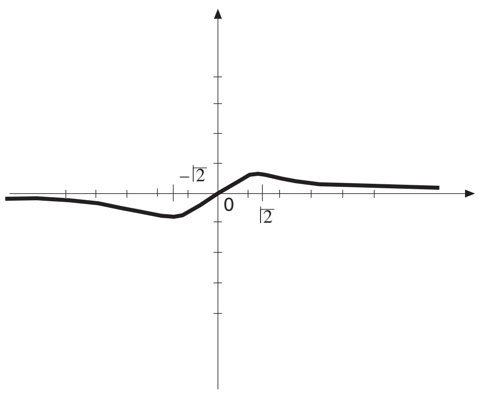
a) $y = \dfrac{4}{x^2 - 4} = \text{f}(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R - \{+2, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto *OY* y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, –1)
- Asíntotas: $x = +2$; $x = -2$; y = 0
- Extremos relativos: Máximo (0, –1)
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
  f es negativa en $(-2, 2)$



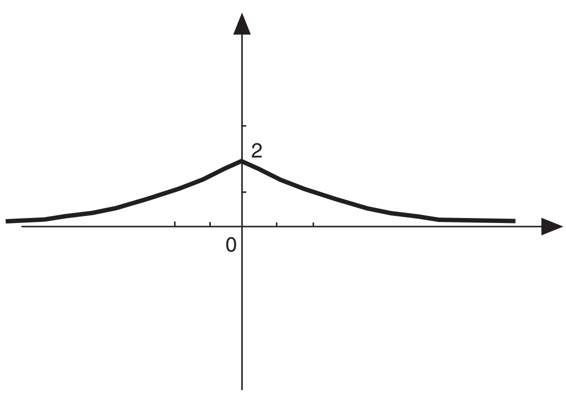
b) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto al origen y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; Mínimo $\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en $(-\infty, 0)$
  f es positiva en $(0, +\infty)$



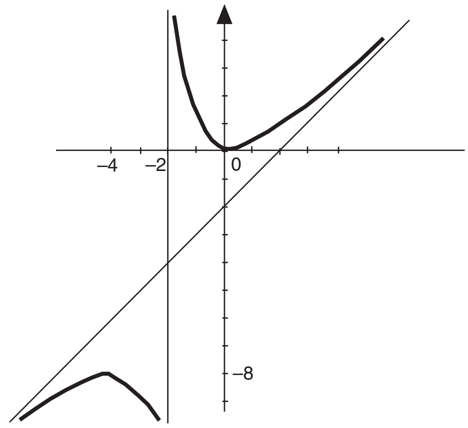
c) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 2)
- Asíntotas: $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo (0, 2).
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en todo su dominio.



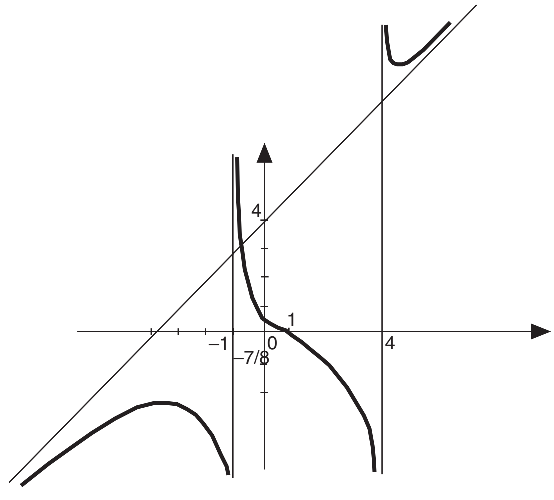
d) $y = \dfrac{x^2}{x + 2} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = R - \{2\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $x = -2$; $y = x - 2$.
- Extremos relativos: Mínimo (0, 0); Máximo (–4, –8).
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en $(-\infty, -2)$.
  f es positiva en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.



e) $y = \dfrac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = f(x)$

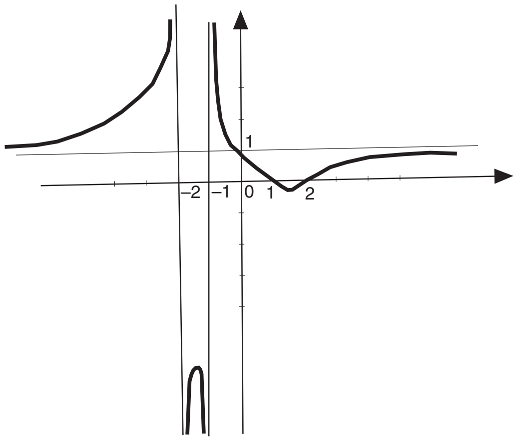
- Dominio: $Dom\, f = R - \{4, -1\}$
- Simetrías y periodicidad: Ni simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)(1, 0)$
- Asíntotas: $x = -1$; $x = 4$; $y = x + 4$
  La curva corta a la asíntota oblicua $y = x + 4$
  en el punto $\left(-\dfrac{7}{8}, \dfrac{25}{8}\right)$
- Extremos relativos: No se pueden hallar fácilmente.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-1, 1) \cup (4, +\infty)$
  f es negativa en $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$.



f) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} = f(x)$

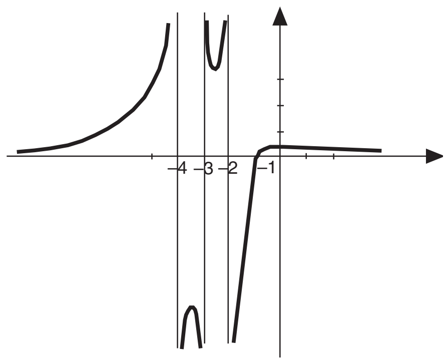
- Dominio: $Dom\, f = R - \{-1, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: No es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 1) (1, 0) (2, 0)
- Asíntotas: $x = -1$; $x = -2$; $y = 1$
- Extremos relativos: Mínimo $\left(\sqrt{2}, -0{,}03\right)$; Máximo $\left(-\sqrt{2}, -34\right)$

• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
f es negativa en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.



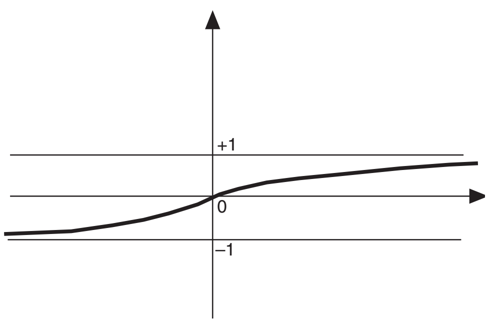
g) $y = \dfrac{x + 1}{(x + 2)\,(x + 3)\,(x + 4)} = f(x)$

• Dominio: $Dom\, f = R - \{-2, -3, -4\}$
• Simetrías y periodicidad: No es simétrica, ni periódica.
• Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \dfrac{1}{24}\right)$ $(-1, 0)$
• Asíntotas: $x = -2$; $x = -3$; $x = -4$; $y = 0$.
• Extremos relativos: La curva presenta dos máximos relativos y un mínimo, como observamos en la gráfica.
• Intervalos de signo constante:
f es positiva en $(-\infty, -4) \cup (-3, -2) \cup (-1, +\infty)$
f es negativa en $(-4, -3) \cup (-2, -1)$



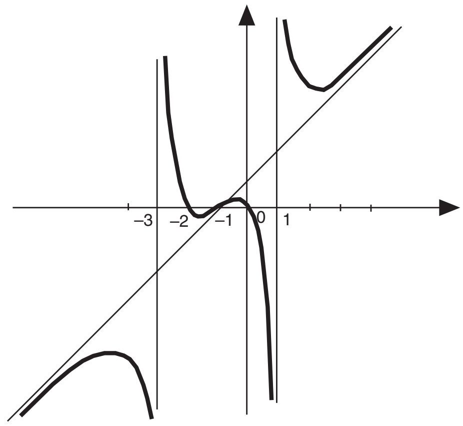
h) $y = \dfrac{x}{1 + |x|} = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1 - x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



f) $y = \dfrac{(x + 1)\,(x + 2)\,x}{(x - 1)\,(x + 3)} = f(x)$

• Dominio: $Dom\, f = R - \{1, -3\}$
• Simetrías y periodicidad: No es simétrica, ni periódica.
• Cortes con los ejes: $(0, 0)$ $(-1, 0)$ $(-2, 0)$
• Asíntotas: $x = 1$; $x = -3$; $y = x + 1$
La curva corte a la asíntota oblicua en $(-1, 0)$
• Extremos relativos: Pueden verse en la gráfica.
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, 1)$
f es positiva en $(-3, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$



3 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

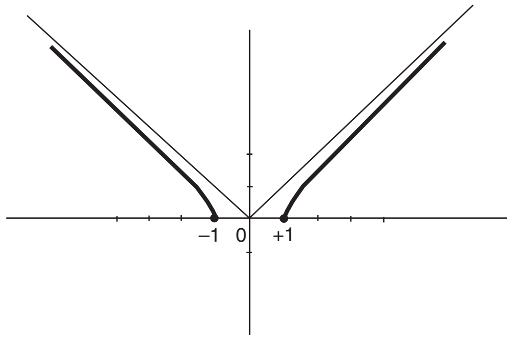
a) $= \sqrt{x^2 - 1}$ ***b)*** $y = [\sqrt{x}]^2$

c) $= -\sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$ ***d)*** $y = \pm\sqrt{\dfrac{x - 1}{4x - 1}}$

e) $= \pm\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 - 4}}$ ***f)*** $y^2 = \dfrac{x^2}{3x}$

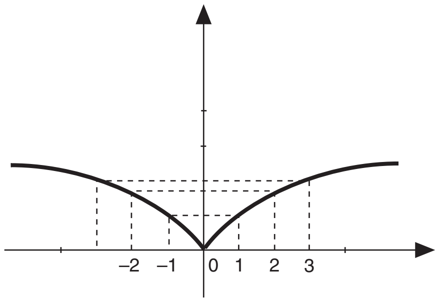
a) $y = +\sqrt{x^2 - 1} = f(x)$

• Dominio: $Dom\, f = (-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$
• Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje *OY* y no es periódica.
• Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$ $(-1, 0)$
• Asíntotas: $y = x$; $y = -x$.
• Extremos relativos: no tiene.
• Intervalos de signo constante: *f* es positiva en todo su dominio.



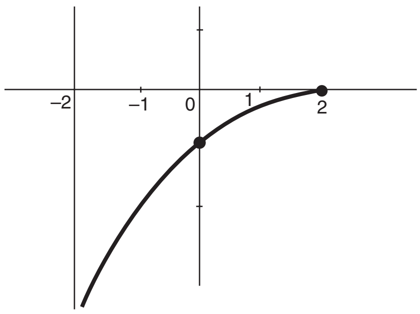
b) y = $\left[\sqrt[3]{x}\right]^2 = f(x)$.

- Dominio: $Dom\, f = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: no tiene.
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



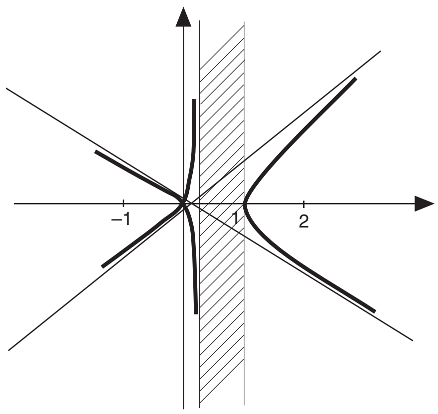
c) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}\ f(x)$.

- Dominio: $Dom\, f = (–2, +2]$
- Simétricas y periodicidad: no es simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, –1) (2, 0).
- Asíntotas: $x = –2$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante: f es negativa en todo su dominio.



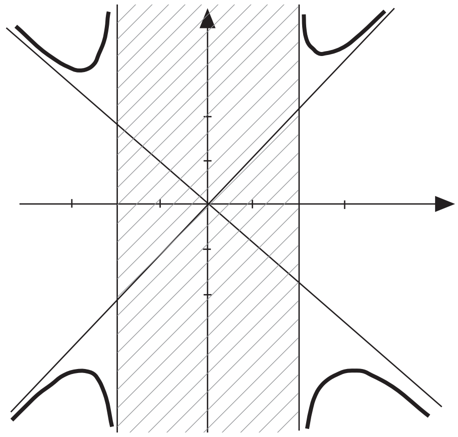
d) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{4x-1}} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right) \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: No existen.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0) (1, 0)
- Asíntotas: $x = \dfrac{1}{4}$; $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{16}$; $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{16}$
- Extremos relativos: no tiene.



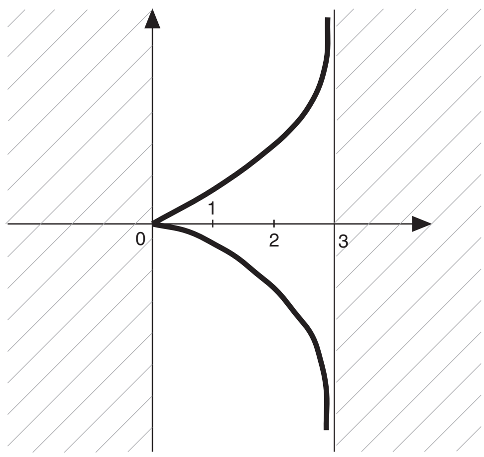
e) $y = \pm\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = (–\infty, –2) \cup (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: Simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0) no existe.
- Asíntotas: $x = +2$; $x = –2$; $y = x$; $y = –x$
- Extremos relativos:
  Mínimos $(\sqrt{8}, 4)\ (-\sqrt{8}, 4)$
  Máximos $(\sqrt{8}, -4)\ (-\sqrt{8}, -4)$



f) $y^2 = \dfrac{x}{3-x} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{x}{3-x}} = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = [0, 3)$
- Simetrías y periodicidad: No tiene
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $x = 3$
- Extremos relativos: no tiene.



4 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \ln(x - 2)$ ***b)*** $y = e^{\frac{1}{x}}$

c) $y = x \cdot e^x$ ***d)*** $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

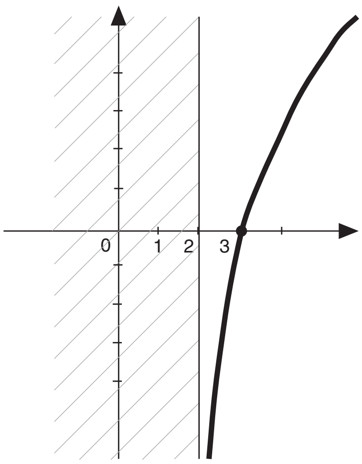
e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ ***f)*** $y = \ln|x + 1|$

g) $y = \ln\sqrt{x^2 + 4}$ ***h)*** $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

i) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

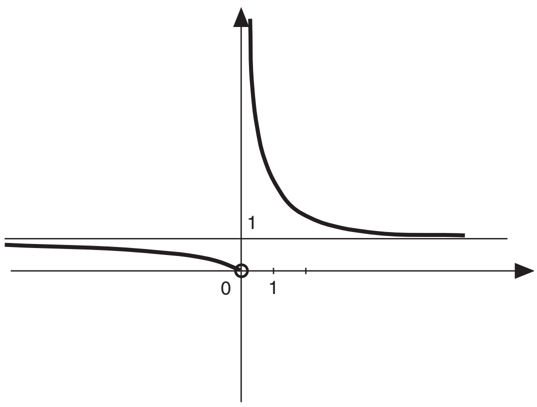
a) $y = ln\,(x-2) = f(x)$

- Dominio : $Dom\,f = (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (3, 0)
- Asíntotas: $x = 2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(3, +\infty)$
  f es negativa en (2, 3)



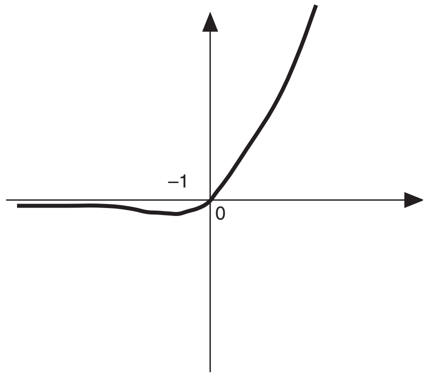
b) $y = e^{\frac{1}{x}} = f(x)$

- Dominio : $Dom\,f = R - \{0\}$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas:
  $x = 0$ pues $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$
  $y = 1$ pues $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = +1$.
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



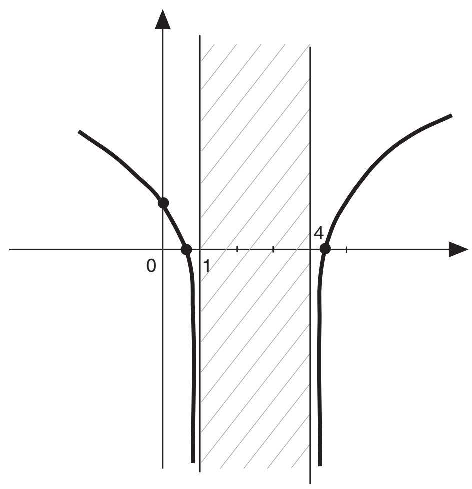
c) $y = x \cdot e^x = f(x)$

- Dominio: $Dom\,f = R$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $y = 0$, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} x \cdot e^x = 0$.
- Extremos relativos: Mínimo $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en $(-\infty, 0)$
  f es positiva en $(0, +\infty)$



d) $y = ln\,(x^2 - 5x + 4) = f(x)$

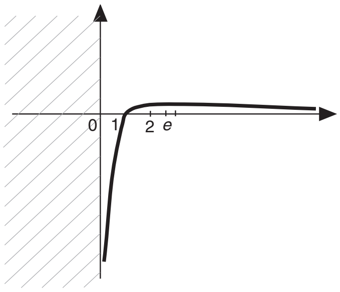
- Dominio: $Dom\,f = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes:
  (0, ln 4)   (4,2; 0)   (0,8; 0)
- Asíntotas:
  $x = 1$, pues $\lim\limits_{x\to 1^-} ln\,(x^2 - 5x + 4) = -\infty$
  $x = 4$ pues $\lim\limits_{x\to 4} ln\,(x^2 - 5x + 4) = -\infty$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en
  $(-\infty; 0{,}8) \cup (4{,}2; +\infty)$
  f es negativa en
  $(0{,}8; 1) \cup (4; 4{,}2)$



e) $y = \dfrac{ln\,x}{x} = f(x).$

- Dominio: $Dom\,f = (0, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (1, 0)
- Asíntotas: $x = 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ln\,x}{x} = -\infty$
  $y = o$, pues $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x} = 0$
- Extremos relativos: Máximo $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

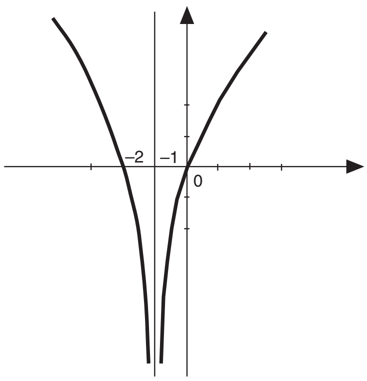
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en (0, 1)
f es positiva en (1, +∞)



f) $y = ln\,|x + 1| = f(x)$

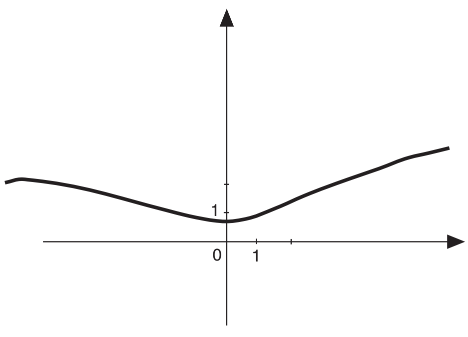
$$f(x) = \begin{cases} ln\,(x + 1) \text{ si } x > -1 \\ ln\,(-x - 1) \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

• Dominio: $Dom\, f = R - \{-1\}$
• Simetrías y periodicidad: no tiene.
• Puntos de corte con los ejes: (0, 0) (–2, 0)
• Asíntotas: $x = -1$.
• Extremos relativos: no tiene.
• Intervalos de signo constante:
f es positiva en (-∞, -2) ∪ (0, +∞)
f es negativa en (–-2, –1) ∪ (–1, 0)



g) $y = ln\,\sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{2}\,ln\,(x^2 + 4) = f(x)$

• Dominio: $Dom\, f = R$
• Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al eje de ordenadas *(OY)* y no es periódica.
• Puntos de corte con los ejes:
(0, *ln*2)
• Asíntotas: no tiene.
• Extremos relativos: Mínimo (0, *ln*2).
• Intervalos de signo constante:
f es positiva en todo su dominio.



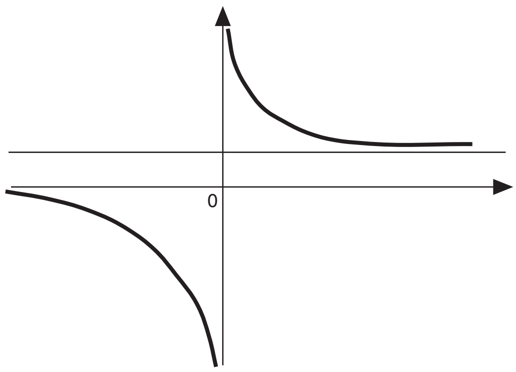
h) $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1} = f(x)$

• Dominio: $Dom\, f = R - \{0\}$
• Simetrías y periodicidad: no tiene.
• Puntos de corte con los ejes: no tiene.
• Asíntotas: $x = 0$

$y = 1$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = 1$

$y = 0$, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = 1$

• Extremos relativos: no tiene.
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en (–∞, 0)
f es positiva en (0, +∞)

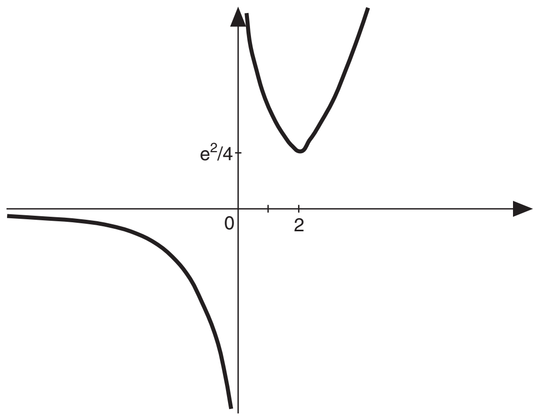


i) $y = \dfrac{e^x}{x^2} = f(x)$.

• Dominio: $Dom\, f = R - \{0\}$
• Simetrías y periodicidad: no tiene.
• Puntos de corte con los ejes: no tiene.
• Asíntotas: $x = 0$

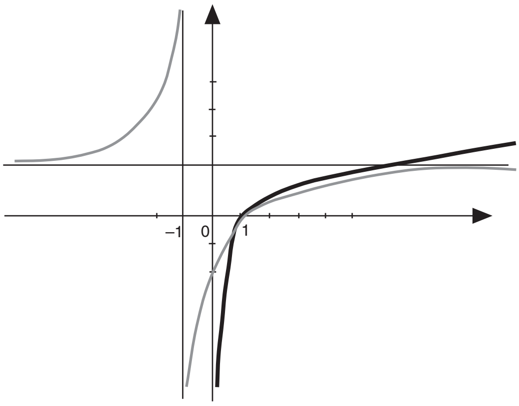
$y = 0$ pues $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0$

• Extremos relativos: Mínimo $\left(2, \dfrac{e^2}{4}\right)$
• Intervalos de signo constante:
f es negativa en (–∞, 0)
f es positiva en (0, +∞)



5 **A partir de las gráficas de las respectivas funciones, demuestra que:**

$$\mathbf{ln\,x > \frac{2\,(x - 1)}{x + 1};\ \forall x > 1}$$



En la gráfica está representada en trazo continúa la función $y = ln\ x$ y en discontinmuo la función $y = \dfrac{2\,(x-1)}{x+1}$.

Claramente se observa que a partir de $x > 1$ se verifica la desigualdad.

6 Representa gráficamente las siguientes funciones:

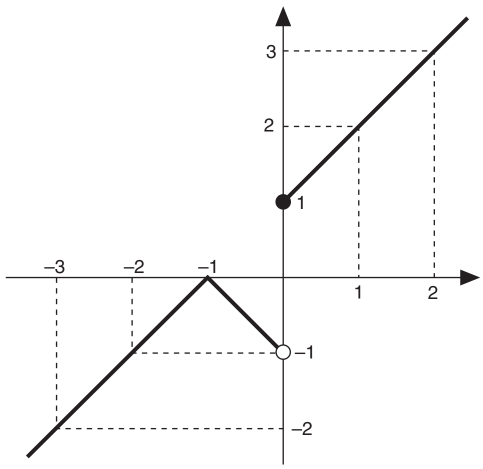
$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left[\dfrac{1}{x}\right] \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}}$$

$$f(x) = \begin{cases} x\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

- Dominio: $Dom\, f = R - \{0\}$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 1) (–1, 0)
- Asíntotas: no tiene.

Con los datos obtenidos y haciendo una tabla de valores encontramos la gráfica de la función dada:

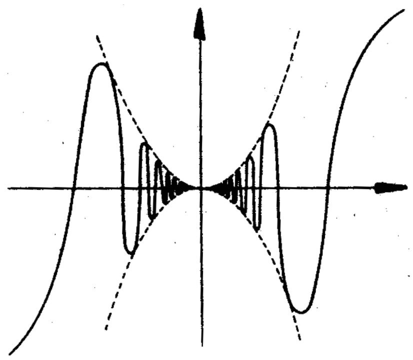


$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\left[\dfrac{1}{x}\right] \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

- Dominio: $Dom\ g = R$
- Simetrías y periodicidad: Es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes:

$$(0,\ 0)\left(\frac{1}{2\ K\Pi},\ 0\right)\left(\frac{1}{\Pi + 2\ K\Pi}\right),\ 0 \text{ con } K \in Z$$

Con los datos obtenidos y dando valores, representamos gráficamente la función dada:



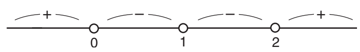
Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

7 Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$
Se pide:
***a)* Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.**
***b)* Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.**
***c)* Asíntotas.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$



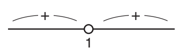
f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
f es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad x = 2$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ f tiene un máximo en (0, 0)
$f''(2) < 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo en (2, 4)

b) Estudiemos el signo de $f''(x)$.



f es cóncava hacia las y positivas en $(1, +\infty)$ y f es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, 1)$
f no tiene puntos de inflexión.

c) Asíntotas verticales: $x = 1$
Asíntotas horizontales: no tiene, pues:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x-1}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = 1$$

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = x + 1$.

8 **Halla el dominio de definición, los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, los ceros, las asíntotas, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función**

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$$

Dibuja luego un esquema sencillo de su gráfica.

- Dominio: $Dom\, f = R$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \dfrac{1}{8}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \dfrac{1}{8}$
- Puntos de corte con los ejes o ceros:
  (0, 0) (1, 0)
- Asíntotas:
  Verticales: no tiene.
  Horizontales: $y = \dfrac{1}{8}$
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = \frac{8x^2 + 2x - 1}{(8x^2 + 1)^2}$$

  Estudiamos el signo de $f'(x)$

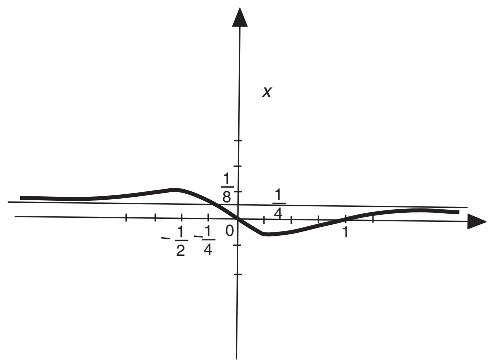
+	$-\frac{1}{2}$	−	$\frac{1}{4}$	+

  f es creciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$

  f es decreciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$
- Extremos relativos:
  f tiene un máximo relativo en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

  y un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{8}\right)$.

  Su gráfica es:



9 **Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números enteros consecutivos está cada una de las soluciones?**

Nota: Utiliza las gráficas de las funciones:

$$f(x) = e^x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{-x^4}{4\,(x-1)}$$

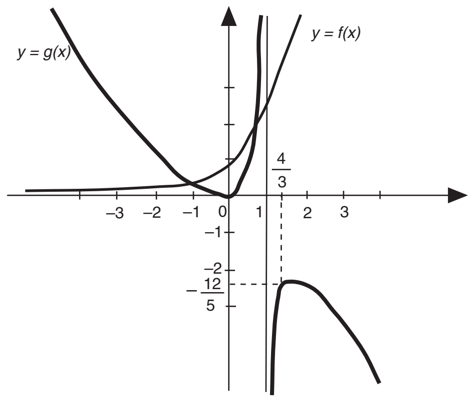
La ecuación dada $x^4 + 4e^x \cdot (x - 1) = 0$ se puede transformar en:

$$e^x = \frac{-x^4}{4\,(x-1)}$$

Por tanto, las soluciones de esta ecuación serán los valores de las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

$$f(x) = y = e^x \;;\; g(x) = y = \frac{-x^4}{4\,(x-1)}$$

Las representamos gráficamente:

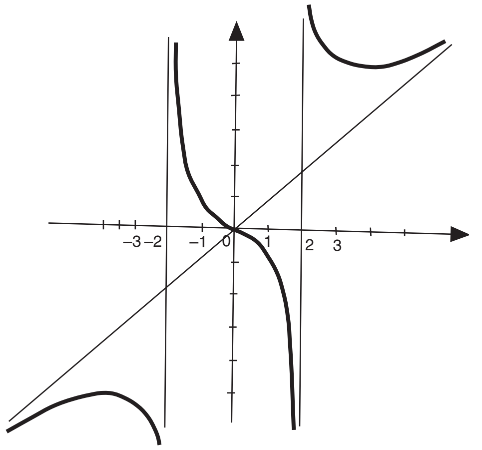


A partir de la representación gráfica observamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en dos puntos; uno de ellos entre (–2, –1) y otro (0, 1).

10 **Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$**

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4} = f(x)$$

- Dominio = $Dom\, f = R - \{+2, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 0)
- Asíntotas: $x = +2$; $x = -2$; $y = x$
- Extremos relativos:
  Mínimo relativo $(2\sqrt{3},\ 3\sqrt{3})$; Máximo relativo $(-2\sqrt{3},\ -3\sqrt{3})$
- Punto de inflexión: (0, 0)
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
  f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$



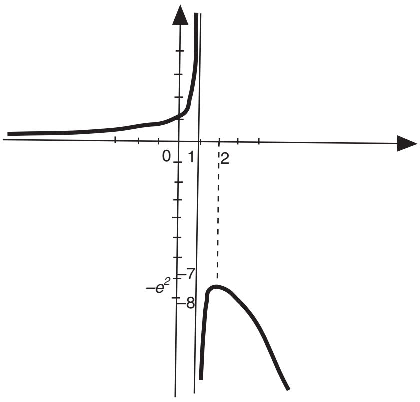
11 **Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.**

$$y = \frac{e^x}{1-x} = f(x)$$

- Dominio: $Dom\, f = R - \{1\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0, 1)
- Asíntotas: $x = 1$

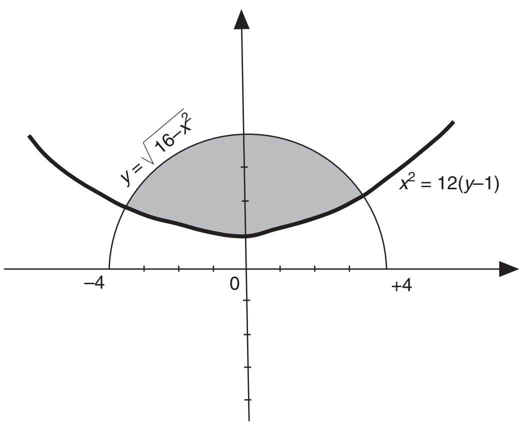
$y = o$, pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{1-x} = 0.$

- Extremos relativos: Máximo relativo $(2, -e^2)$
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
  Creciente $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$
  Decreciente $(2, +\infty)$
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, 1)$
  f es negativa en $(1, +\infty)$



12 **Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:**

$$y = \sqrt{16 - x^2}$$
$$x^2 = 12\,(y - 1)$$



La zona rayada es la región de plano comprendida entre las curvas.

13 **Estudia y representa gráficamente la función $f\colon R \to R$ definida así:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\log_e x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

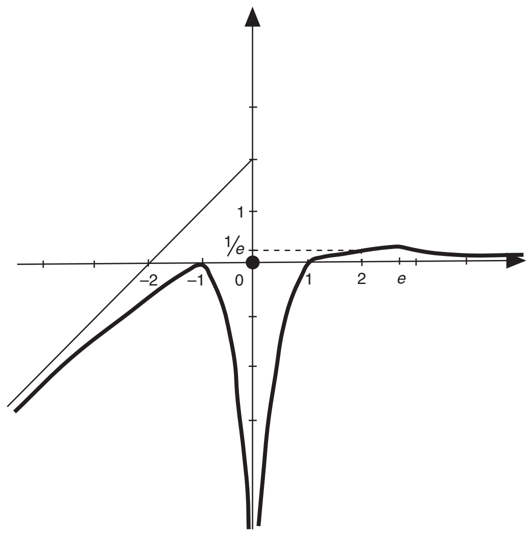
a) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x}$ $(x < 0)$

- Dominio: R
- Simetrías: No simétrica.
- Periodicidad: no periódica.
- Cortes con los ejes: (–1, 0)
- Asíntotas: $x = 0$; $y = x + 2$
- Extremos relativos: Máximo (–1, 0)

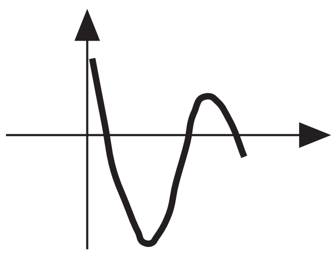
b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$

- Dominio: R
- Simetrías: no tiene.
- Periodicidad: no periódica.
- Cortes con los ejes: (1, 0)
- Asíntotas: $x = 0$; $y = 0$
  $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- Extremos relativos: Máximo $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

A partir del estudio anterior, obtenemos la gráfica de la función dada:



14 **Éste es el esquema que representa el gráfico de la función $y = f(x)$**

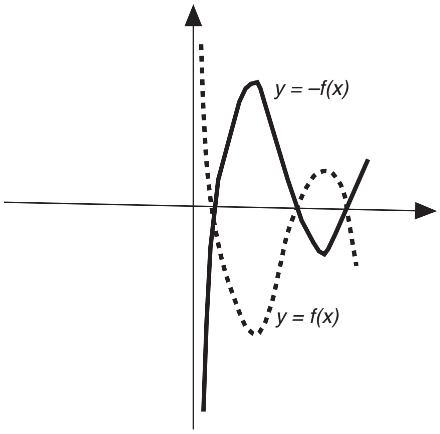


a) **Haz otro esquema que represente el gráfico de la función *y = –f(x)*.**

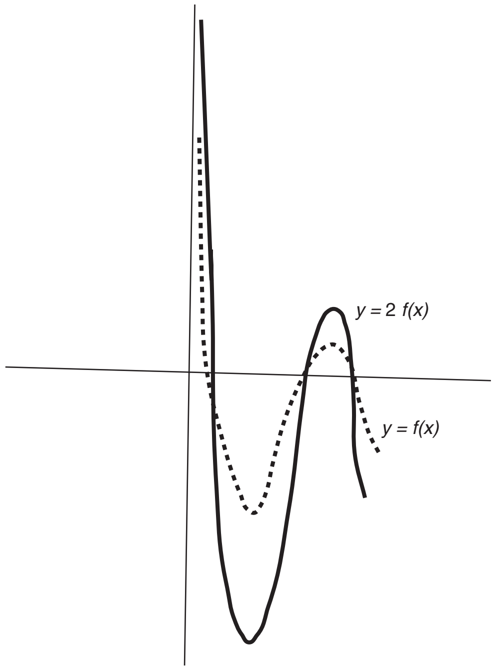
b) **Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de *y = f(x)* e *y = 2 f(x)*.**

Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.

a) El gráfico de la función *y = –f(x)* se obtiene al aplicar al gráfico de la función *y = f(x)* una simetría de eje el eje de abscisas.



b) El gráfico de la función *y = 2 · f(x)* se obtiene duplicando las ordenadas correspondientes a cada valor de la abscisa en la gráfica de la función *y = f(x)*.



BLOQUE TEMÁTICO III:
ANÁLISIS

UNIDAD DIDÁCTICA 15

Integrales indefinidas

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Comprender el concepto de primitiva de una función y su relación con la integral indefinida.
2. Calcular primitivas haciendo uso de la tabla de integrales inmediatas.
3. Utilizar el método de integración por cambio de variable para calcular primitivas de funciones dadas.
4. Valorar la integral indefinida como potente herramienta en el cálculo infinitesimal.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

Introduciendo al alumno en el concepto de primitiva a través de la función derivada.
Resolviendo múltiples integrales indefinidas haciendo uso de la tabla de integrales inmediatas y en orden creciente de dificultad.
Utilizando el método de integración por cambio de variable e integrales que se pueden resolver de forma inmediata, para con posterioridad utilizar este método en integrales que ya se pueden resolver como inmediatas.
Encontrando primitivas de funciones sujetas a condiciones impuestas de antemano.

RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES

Actividades iniciales

1. Una función *F* es primitiva de otra *f* siempre y cuando la derivada de *F* sea *f*, es decir:

F es primitiva de $f \Leftrightarrow F' = f$

Encuentra dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$ ***b)*** $f(x) = sen\ x$

c) $f(x) = e^{-x}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

a) Primitivas de $f(x) = 2x$ son:
$F(x) = x^2 + 7;\ \ G(x) = x^2 - \sqrt{2}$

b) Primitivas de $f(x) = \text{sen}\ x$ son:
$F(x) = -cos\ x + \dfrac{1}{3};\ \ G(x) = -\ cos\ x$

c) Primitivas de $f(x) = e^{-x}$ son:
$F(x) = -e^{-x} + \sqrt{5}\ ;\ \ G(x) = -e^{-x} - 3$

d) Primitivas de $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ son:

$F(x) = 3 \cdot ln\ |x+2| \angle \dfrac{3}{2};\quad G(x) = 3\ ln\ |x+2| + 1$

2. ¿Comprueba, en cada caso, que *F* es primitiva de *f*?:

a) $F(x) = -ln\ (1-x) - arc\ tg\ x + 7$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)(1+x^2)}$$

b) $F(x) = \dfrac{(2-x)\ sen\ (2x)}{2} - \dfrac{1}{4} cos\ (2x) - \sqrt{3}$

$f(x) = (2-x)\ cos\ (2x)$

a) Veamos que $F'(x) = f(x)$

$F(x) = -ln\ (1-x) - arc\ tg\ x + 7$

$$F'(x) = -\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1+x^2-(1-x)}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{x^2+x}{(1-x)(1+x^2)} = f(x)$$

b) Veamos que $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{(2-x)\cdot sen\,(2x)}{2} - \frac{1}{4}\, cos\,(2x) - \sqrt{3}$$

$$F'(x) = \frac{-sen\ 2x}{2} + 2 \cdot \frac{cos\,(2x)\cdot(2-x)}{2} - \frac{1}{4}\left[-2\ sen\,(2x)\right] =$$

$$= \frac{-sen\ 2x}{2} + (2-x)\cdot cos\,(2x) + \frac{1}{2}\, sen\,(2x) =$$

$$= (2-x)\cdot cos\,(2x) = f(x)$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:

a) $\displaystyle\int (2x^2 - 4x + 5)\ dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx$ ***d)*** $\displaystyle\int \left[\frac{x^3 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\right] dx$

e) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$ ***f)*** $\displaystyle\int (2x^2+3)^2 \cdot 5x\ dx$

g) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+5}\, dx$ ***h)*** $\displaystyle\int \frac{4x+8}{x^2+4x}\, dx$

i) $\displaystyle\int 4x^2\sqrt{1-x^3}\ dx$ ***j)*** $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}\, dx$

k) $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\, dx$ ***l)*** $\displaystyle\int \frac{1-cos\ 2x}{2x - sen\ 2x}\, dx$

m) $\displaystyle\int cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$ ***n)*** $\displaystyle\int 3x \cdot 3^{x^2}\ dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{e^{ln\ x}}{x}\, dx$ ***o)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{4+7x^2}$

p) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\, dx$ ***q)*** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

r) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$ ***s)*** $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+9}\, dx$

t) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2+9}\, dx$ ***u)*** $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\cdot arc\ tg\ x}\, dx$

v) $\displaystyle\int \frac{1-ln\ x}{x \cdot ln\ x}\, dx$ ***w)*** $\displaystyle\int \frac{3x}{x^4+16}\, dx$

x) $\displaystyle\int sen^3\, 2x \cdot cos\ 2x\ dx$ ***y)*** $\displaystyle\int \frac{3^x}{1+9^x}\, dx$

z) $\displaystyle\int tg\ x\ \ dx$

a) $\displaystyle\int (2x^2 - 4x + 5)\ dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x + C$

b) $\displaystyle\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (3x + x^{-2})\ dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$

c) $\displaystyle\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx = \int \left(2x^{\frac{3}{4}} - \frac{5}{x}\right) dx = \frac{8\sqrt[4]{x^7}}{7} - 5\ ln\ |x| + C$

d) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\, dx = \int \left(x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{x}\right) dx =$

$$= \frac{x^4}{4} - 2\sqrt{x^3} + 2\ ln\ |x| + C$$

$$e)\ \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) dx =$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$$

$$f)\ \int (2x^2+3)^2 \cdot 5x \cdot dx = \frac{5}{4} \int (2x^2+3)^2 \cdot 4x\ dx =$$

$$= \frac{5}{4}\,\frac{(2x^2+3)^3}{3} + C$$

$$g)\ \int \frac{3x}{x^2+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \frac{3}{2}\ ln\ |x^2+5| + C$$

$$h)\ \int \frac{4x+8}{x^2+4x}\,dx = 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x}\,dx = 2\ ln\ |x^2+4x| + C$$

$$i)\ \int 4x^2 \cdot \sqrt{1-x^3}\ dx = \frac{4}{-3}\int (1-x^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (-3x^2)\ dx =$$

$$= -\frac{4}{3}\,\frac{2\sqrt{(1-x^3)^3}}{3} = \frac{-8}{9}\sqrt{(1-x^3)^3} + C$$

$$j)\ \int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int \left(3x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x \cdot dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1} + C$$

$$k)\ \int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + 2 + x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= 2\sqrt{x} + 2x + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$l)\ \int \frac{1-cos\ 2x}{2x - sen\ 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2 - 2\ cos\ 2x}{2x - sen\ 2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ ln\ |2x - sen\ 2x| + C$$

$$m)\ \int cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot dx = 2\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$n)\ \int 3x \cdot 3^{x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int 3^{x^2} \cdot 2x\ dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{x^2}}{ln\ 3} + C$$

$$ñ)\ \int \frac{e^{ln\ x}}{x} \cdot dx = e^{ln\ x} + C$$

$$o)\ \int \frac{dx}{4+7x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{1+\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot arc\ tg\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right) + C$$

$$p)\ \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-(x^4)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\ arc\cdot\ tg\ (x^4) + C$$

$$q)\ \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{-2}\int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\ dx = -\frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\sqrt{4-x^2} + C$$

$$r)\ \int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 3\int \frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = 3 \cdot arc\cdot\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$s)\ \int \frac{3x}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\ ln\ |x^2+9| + C$$

$$t)\ \int \frac{3}{x^2+9}\,dx = \int \frac{1/3}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx = arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$u)\ \int \frac{1}{(1+x^2) \cdot arc\ tg\ x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\ tg\ x}\,dx = arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$v)\ \int \frac{1 - ln\ x}{x\ ln\ x}\,dx = \int \frac{1/x}{ln\ x}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = ln\ |ln\ x| - ln\ x + C$$

$$w)\ \int \frac{3x}{x^4+16}\,dx = \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\frac{x^4}{16}}\,dx = \frac{3}{8}\int \frac{\frac{2x}{4}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot arc\cdot\ tg\left(\frac{x^2}{4}\right) + C$$

$$x)\ \int sen^3\ 2x \cdot cos\ 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (sen\ 2x)^3 \cdot 2 \cdot cos\ 2x\ dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(sen\ 2x)^4}{4} + C$$

$$y)\ \int \frac{3^x}{1+9^x}\,dx = \frac{1}{ln\ 3}\int \frac{3^x \cdot ln\ 3}{1+(3^x)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{ln\ 3} \cdot arc\ tg(3^x) + C$$

$$z)\ \int tg\ x\ dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\,dx = -\int \frac{-sen\ x}{cos\ x}\,dx = -ln\ |cos\ x| + C$$

2 **Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:**

a) $\displaystyle\int x^2 \cdot \cos x\, dx$	***b)*** $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln x\, dv$
c) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^x\, dx$	***d)*** $\displaystyle\int e^x \cdot \cos 2x\, dx$
e) $\displaystyle\int 2^x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$	***f)*** $\displaystyle\int \ln x\, dx$
g) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$	***h)*** $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$
i) $\displaystyle\int \sqrt{x} \cdot \ln x\, dx$	***j)*** $\displaystyle\int (1-3x)\, 3^x\, dx$
k) $\displaystyle\int x^3 \cdot \operatorname{sen} 2x\, dx$	***l)*** $\displaystyle\int e^{-x} \cdot \cos x\, dx$
m) $\displaystyle\int e^{-2x}\, (2x+1)^2\, dx$	***n)*** $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx$
ñ) $\displaystyle\int \ln^2 x\, dx$	***o)*** $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x \cdot \cos x\, dx$
p) $\displaystyle\int x^3 \ln^2 x\, dx$	***q)*** $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

a) $\displaystyle\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx &\Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x - \int 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:
$u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx$
$dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow v = -\cos x$

$$I = x^2 \operatorname{sen} x - \left[-2x \cos x - \int 2 \cdot (-\cos x) \cdot dx\right] =$$

$= x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$
Por tanto:

$$\int x^2 \cdot \cos x\, dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

b) $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^3\, dx &\Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4x}\, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

c) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx &\Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = 2x &\Rightarrow du = 2\, dx \\ dv = e^x\, dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2\, e^x - \left[2x\, e^x - \int 2\, e^x\, dx\right] =$$

$= x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C \Rightarrow$

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + C$$

d) $\displaystyle\int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = \cos 2x &\Rightarrow du = -2 \operatorname{sen} 2x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = e^x \cdot \cos 2x - \int -2\, e^x \operatorname{sen} 2x\, dx =$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \int e^x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = \operatorname{sen} 2x &\Rightarrow du = 2 \cdot \cos 2x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int e^x \cdot \cos 2x + 2\left[e^x \operatorname{sen} 2x - \int 2\, e^x \cdot \cos 2x\, dx\right] =$$

$$= e^x \cos 2x + 2\, e^x \operatorname{sen} 2x - 4 \int e^x \cdot \cos 2x \Rightarrow$$

$\Rightarrow I = e^x \cdot \cos 2x + 2\, e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 4\, I \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x \cos 2x + 2\, e^x \operatorname{sen} 2x}{5} + C$$

e) $\displaystyle\int 2^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = 2^x &\Rightarrow du = 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx \\ dv = \operatorname{sen} x \cdot dx &\Rightarrow v = -\cos x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int 2^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = -2^x \cdot \cos x + \int 2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo este método, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2^x \Rightarrow du = 2^x \cdot ln\ 2 \cdot dx \\ dv = cos\ x \cdot dx \Rightarrow v = sen\ x \end{array}\right\}$$

$$I = \int -2^x \cdot cos\ x +$$

$$+\ ln\ 2 \left[2^x \cdot sen\ x - \int 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x \cdot dx \right] = -2^x \cdot cos\ x +$$

$$+\ 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x - (ln\ 2)^2 \int 2^x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -2^x \cdot cos\ x + 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x - (ln\ 2)^2 \cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{-2^x \cdot cos\ x + 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x}{1 + (ln\ 2)^2} + C$$

f) $\int ln\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = ln\ x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int ln\ x \cdot dx = x \cdot ln\ x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot ln\ x - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ln\ x \cdot dx = x\ ln\ x - x + C$$

g) $\int arc\ sen\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = arc\ sen\ x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int arc\ sen\ x \cdot dx = x \cdot arc\ sen\ x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ sen\ x + \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ sen\ x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

h) $\int arc\ tg\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = arc\ tg\ x \Rightarrow du = \frac{1}{1 - x^2}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int arc\ tg\ x\ dx = x \cdot arc\ tg\ x - \int \frac{x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ tgx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\, ln\, |1 + x^2| + C$$

i) $\int \sqrt{x} \cdot ln\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = ln\ x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = \sqrt{x} \cdot dx \Rightarrow v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \sqrt{x} \cdot ln\ x\ dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\, ln\ x - \int \frac{2}{3}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\, ln\ x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

j) $\int (1 - 3x) \cdot 3^x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = (1 - 3x) \Rightarrow du = -3\, dx \\ dv = 3^x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{3^x}{ln\ 3} \end{array}\right\}$$

$$I = \int (1 - 3x) \cdot 3^x \cdot dx = \frac{(1 - 3x) \cdot 3^x}{ln\ 3} - \int -\frac{3 \cdot 3^x}{ln\ 3}\, dx =$$

$$= \frac{(1 - 3x) \cdot 3^x}{ln\ 3} + \frac{3 \cdot 3^x}{(ln\ 3)^2} + C$$

k) $\int x^3 \cdot sen\ 2x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 \cdot dx \\ dv = sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = -\frac{cos\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot sen\ 2x \cdot dx = -\frac{x^3 \cdot cos\ 2x}{2} - \int \frac{-3x^2 \cdot cos\ 2x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{-x^3 \cdot cos\ 2x}{2} + \frac{3}{2} \int x^2 \cdot cos\ 2x \cdot dx$$

A esta última integral la aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = cos\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{sen\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{-x^3 \cdot cos\ 2x}{2} + \frac{3}{2}\left[\frac{x^2 \cdot sen\ 2x}{2} - \int 2x \cdot \frac{sen\ 2x}{2} \cdot dx \right] =$$

$$= \frac{-x^3 \cdot cos\ 2x}{2} + \frac{3x^2 \cdot sen\ 2x}{4} - \frac{3}{2} \int x \cdot sen\ 2x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo el método, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{-cos\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{-x^3 \cdot \cos 2x}{2} + \frac{3x^3 \cdot \operatorname{sen} 2x}{4} -$$

$$-\frac{3}{2}\left[\frac{-x \cdot \cos 2x}{2} - \int \frac{-\cos 2x}{2}\, dx\right] = \frac{-x^3 \cdot \cos 2x}{2} +$$

$$+\frac{3x^2 \cdot \operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{3x \cos 2x}{4} - \frac{3 \operatorname{sen} 2x}{8} + C$$

l) $\int e^{-x} \cdot \cos x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^{-x} \cos x\, dx = e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x - \int -e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx =$$

$$= e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x + \int e^{-x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo este método a la última integral, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} \cdot dx \\ dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\}$$

$$I = e^{-x} \operatorname{sen} x + \left[-e^{-x} \cdot \cos x - \int (-e^{-x})(-\cos x)\, dx\right] =$$

$$= e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x - I \Rightarrow I = \frac{e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x}{2} + C$$

m) $\int e^{-2x} \cdot (2x+1)^2\, dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = (2x+1)^2 \Rightarrow du = 2\,(2x+1) \cdot 2 \cdot dx \\ dv = e^{-2x}\, dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^{-2x} \cdot (2x+1)^2 \cdot dx = \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} -$$

$$-\int \frac{2 \cdot (2x+1) \cdot 2 \cdot e^{-2x}}{-2} \cdot dx = \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} +$$

$$+ 2 \int (2x+1) \cdot e^{-2x} \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo este método a esta última integral:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2\, dx \\ dv = e^{-2x}\, dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} + 2\left[\frac{(2x+1)\, e^{-2x}}{-2} - \int \frac{2 \cdot e^{-2x}}{-2}\, dx\right] =$$

$$= \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} - (2x+1) \cdot e^{-2x} + \frac{2\, e^{-2x}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{2} - (2x+1)\, e^{-2x} - e^{-2x} + C$$

n) $\int \cos(\ln x)\, dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int \cos(\ln x)\, dx = x \cdot \cos(\ln x) -$$

$$-\int -x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$$

Aplicamos este método a la última integral y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} u = \operatorname{sen}(\ln x) \Rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \dfrac{1}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = x \cdot \cos(\ln x) + \left[x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx\right] =$$

$$= x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x \cdot \cos(\ln x) + x \cdot \operatorname{sen}(\ln x) - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x \cdot \cos(\ln x) + x \operatorname{sen}(\ln x)}{2} + C$$

ñ) $\int \ln^2 x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2 \cdot \ln x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int \ln^2 x \cdot dx = x \cdot \ln^2 x - \int 2 \cdot x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= x \cdot \ln^2 x - 2 \int \ln x \cdot dx$$

Aplicamos este método a esta última integral:

$$\left.\begin{array}{r} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = x \cdot \ln^2 x - 2\left[x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right] =$$

$$= x \cdot \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

$$o)\ \int x \cdot sen\, x \cdot cos\, x \cdot dx = I = \int \frac{x}{2} \cdot sen\, 2x \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\, dx \\ dv = sen\, 2x \cdot dx \Rightarrow \forall = \frac{-cos\, 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{x}{2} \cdot sen\, 2x \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{-cos\, 2x}{2}\right) - \int \frac{1}{2}\left(\frac{-cos\, 2x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{-x \cdot cos\, 2x}{4} + \frac{1}{4}\int cos\, 2x \cdot dx = \frac{-x\, cos\, 2x}{4} + \frac{sen\, 2x}{8} + C$$

$$p)\ \int x^3 \cdot ln^2\, x \cdot dx = I$$

$$\left.\begin{array}{r} u\, ln^2\, x \Rightarrow du = 2\, ln\, x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^3\, dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot ln^2\, x \cdot dx = \frac{x^4}{4}\, ln^2\, x - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2\, ln\, x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\, ln^2\, x - \frac{1}{2}\int x^3 \cdot ln\, x \cdot dx$$

Aplicando este método a la última integral, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\, x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^3\, dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^4}{4}\, ln^2\, x - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\, ln\, x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right] =$$

$$= \frac{x^4}{4}\, ln^2\, x - \frac{x^4}{8}\, ln\, x + \frac{x^4}{32} + C$$

$$q)\ \int \frac{x \cdot arc\ senx}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = I$$

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\ sen\ x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \Rightarrow v = -\sqrt{1 - x^2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{x \cdot arc\ senx}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\sqrt{1 - x^2} \cdot arc\ senx -$$

$$- \int \frac{-\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\sqrt{1 - x^2} \cdot arc\ sen\ x + x + C$$

3 **Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:**

$$\boldsymbol{a)\ \int \frac{x}{x - 2}\, dx \qquad b)\ \int \frac{dx}{x^3 - 3\, x^2 + 2\, x}}$$

$$\boldsymbol{c)\ \int \frac{x^3}{x^2 - 1}\, dx \qquad d)\ \int \frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)}\, dx}$$

$$\boldsymbol{e)\ \int \frac{-x^2 + 6\, x - 1}{(x - 1)^2\, (x + 1)}\, dx \qquad f)\ \int \frac{3x^2 + 5\, x - 7}{x^3 - 2\, x^2 + x - 2}\, dx}$$

$$\boldsymbol{g)\ \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}\, dx \qquad h)\ \int \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x + 1}\, dx}$$

$$\boldsymbol{i)\ \int \frac{dx}{x^3 - 1} \qquad j)\ \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}}$$

$$\boldsymbol{k)\ \int \frac{x^3 + 4\, x}{x^2 + 1}\, dx \qquad l)\ \int \frac{x^4 + 2\, x - 6}{x^3 + x^2 - 2\, x}\, dx}$$

$$\boldsymbol{m)\ \int \frac{2x^2 + 4\, x + 2}{x + 1}\, dx \qquad n)\ \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}\, dx}$$

$$\boldsymbol{ñ)\ \int \frac{x + 3}{x^3 - 3\, x^2 + 3\, x - 1}\, dx \qquad o)\ \int \frac{x^3 - 3\, x^2}{x^2 - 4}\, dx}$$

$$\boldsymbol{p)\ \int \frac{x^2 - 1}{3x^3 - 11\, x^2 + 12\, x - 4}\, dx \qquad q)\ \int \frac{x^4}{(x - 1)^2}\, dx}$$

$$a)\ \int \frac{x}{x - 2}\, dx = \int \frac{x - 2}{x - 2}\, dx + \int \frac{2}{x - 2}\, dx = x + 2\, ln\, |x - 2| + C$$

$$b)\ \int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

Descomponemos la fracción integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x\,(x - 1)\,(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 2}$$

$$\frac{1}{x\,(x - 1)\,(x - 2)} =$$

$$= \frac{A\ (x - 1)\,(x - 2) + B \cdot x \cdot (x - 2) + C \cdot x\,(x - 1)}{x\,(x - 1)\,(x - 2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow -B = 1 \Rightarrow B = -1$
- $x = 0 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $x = 2 \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x - 1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x - 2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, ln\, |x| - ln\, |x - 1| + \frac{1}{2}\, ln\, |x - 2| + C = ln\left|\frac{\sqrt{x\,(x - 2)}}{x - 1}\right| + C$$

$$c)\ \int \frac{x^3}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{x\,(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1}\, dx =$$

$$= \int x\, dx + \int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\, ln\, |x^2 - 1| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{(1 - x)\,(1 + x^2)}\,dx$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{x^2 + x}{(1 - x)\,(1 + x^2)} = \frac{A}{1 - x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}$$

$$\frac{x^2 + x}{(1 - x)\,(1 + x^2)} = \frac{A\,(1 + x^2) + (Bx + C)\,(1 - x)}{(1 - x)\,(1 + x^2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$
- $x = 0 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow C = -1$
- $x = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow B = 0$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{x^2 + x}{(1 - x)\,(1 + x^2)}\,dx = \int \frac{1}{1 - x}\,dx + \int \frac{-1}{1 + x^2}\,dx =$$

$$= -ln\,|1 - x| - arc\ tg\ x + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)}\,dx$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} =$$

$$= \frac{A\,(x + 1) + B\,(x - 1)\,(x + 1) + C\,(x - 1)^2}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$
- $x = -1 \Rightarrow 4C = -8 \Rightarrow C = -2$
- $x = 0 \Rightarrow A - B + C = -1 \Rightarrow B = 1$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)}\,dx = \int \frac{2}{(x - 1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x - 1}\,dx +$$

$$+ \int \frac{-2}{x + 1}\,dx = -\frac{2}{x - 1} + ln\,|x - 1| - 2\,ln\,|x + 1| + C =$$

$$= \frac{-2}{x - 1} + ln\left|\frac{x - 1}{(x + 1)^2}\right| + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5x - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx$

Descomponemos la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x^2 + 5x - 7}{(x - 2)\,(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\frac{3x^2 + 5x - 7}{(x - 2)\,(x^2 + 1)} = \frac{A\,(x^2 + 1) + (Bx + C)\,(x - 2)}{(x - 2)\,(x^2 + 1)}$$

- $x = 2 \Rightarrow 5A = 15 \Rightarrow A = 3$
- $x = 0 \Rightarrow A - 2C = -7 \Rightarrow C = 5$
- $x = 1 \Rightarrow 2A - B - C = 1 \Rightarrow B = 0$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{3x^2 + 5x - 7}{(x - 2)\,(x^2 + 1)}\,dx = \int \frac{3}{x - 2}\,dx + \int \frac{5}{x^2 + 1}\,dx =$$

$$= 3\,ln\,|x \angle 2| + 5 \cdot arc\ tg\ x + C$$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}\,dx$

Procediendo de forma análoga a las anteriores obtenemos:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x\,(x - 1)\,(x + 1)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x - 1}\,dx +$$

$$+ \int \frac{1}{x + 1}\,dx = -ln\,|x| + ln\,|x - 1| + ln\,|x + 1| =$$

$$= ln\left|\frac{(x + 1)\,(x - 1)}{x}\right| + C$$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$

Procediendo de modo análogo, obtenemos:

$$\int \frac{x^2 - x}{(x + 1)\,(x^2 + 1)}\,dx = \int \frac{1}{x + 1}\,dx + \int \frac{-1}{x^2 + 1}\,dx =$$

$$= ln\,|x + 1| - arc\ tg\ x + C$$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 1}$

Descomponemos la función en suma de fracciones simples y obtenemos:

$$\frac{1}{(x - 1)\,(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x}{x - 1} + \frac{\frac{-1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 + x + 1}$$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{1}{x^3 - 1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x - 1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2 + x + 1}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| - \frac{1}{6}\,ln\,|x^2 + x + 1| - \frac{3}{6}\int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| - \frac{1}{6}\,ln\,|x^2 + x + 1| -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\int \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| -$$

$$-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{\sqrt{3}}{3}\,arc\;tg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\right|-\frac{\sqrt{3}}{3}\,arc\;tg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

j) $$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\,arc\;tg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot arc\;tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

k) $$\int\frac{x^3+4x}{x^2+1}dx=\int\frac{x(x^2+1)+3x}{x^2+1}dx=\int x\,dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x^2+1|+C$$

l) $$\int\frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}dx=$$

$$=\int\frac{(x-1)(x^3+x^2-2x)+(3x^2-6)}{x^3+x^2-2x}dx=\int(x-1)\,dx+$$

$$+\int\frac{3x^2-6}{x^3+x^2-2x}dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{-1}{x-1}dx+$$

$$+\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln\left|\frac{x^3\cdot(x+2)}{x-1}\right|+C$$

(*) Esta integral la obtendremos descomponiendo la fracción $\frac{3x^2-6}{x(x-1)(x+2)}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x^2-6}{x(x-1)(x+2)}=\frac{3}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

m) $$\int\frac{2x^2+4x+2}{x+1}dx=\int\frac{(2x+2)(x+1)}{x+1}dx=$$

$$=\int(2x+2)\,dx=x^2+2x+C$$

n) $$\int\frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx=\int\frac{(x^2+1)\cdot x-x}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\int\frac{(x^2+1)\cdot x}{(x^2+1)^2}dx-\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int(x^2+1)^{-2}\cdot x\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{-2}\cdot 2x\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

ñ) $$\int\frac{x+3}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int\frac{x+3}{(x-1)^3}dx$$

$$=\int\frac{(x-1)+4}{(x-1)^3}dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{4}{(x-1)^3}dx=$$

$$=\int(x-1)^{-2}\,dx+4\int(x-1)^{-3}\,dx=\frac{-1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+C$$

o) $$\int\frac{x^3-3x^2}{x^2-4}dx=\int\frac{(x^2-4)(x-3)+4x-12}{x^2-4}dx=$$

$$=\int\frac{(x^2-4)(x-3)}{x^2-4}dx+\underbrace{\int\frac{4x-12}{x^2-4}dx}_{(*)}=\int(x-3)\,dx+$$

$$+\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{5}{x+2}dx=\frac{x^2}{2}-3x-\ln|x-2|+$$

$$+5\ln|x+2|=\frac{x^2}{2}-3x+\ln\left|\frac{(x+2)^5}{x-2}\right|+C$$

(*) Esta integral la resolvemos descomponiendo la fracción $\frac{4x-12}{x^2-4}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{4x-12}{x^2-4}=\frac{-1}{x-2}+\frac{5}{x+2}$$

p) $$\int\frac{x^2-1}{3x^3-11x^2+12x-4}dx=\int\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)(3x-2)}dx=$$

$$= \int \frac{x+1}{(x-2)(3x-2)}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{3x-2}\,dx =$$

(*)

$$= ln\left|\frac{\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[12]{(3x-2)^5}}\right| + C$$

(*) Descomponemos la fracción $\frac{x+1}{(x-2)(3x-2)}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{(x-2)(3x-2)} = \frac{3/4}{x-2} + \frac{-5/4}{3x-2}$$

q) $$\int \frac{x^4}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x+3)(x-1)^2 + 4x - 3}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \int (x^2+2x+3)\,dx + \int \frac{4x-3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x +$$

$$+ \int \frac{4(x-1)+1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + \int \frac{4(x-1)}{(x-1)^2}\,dx +$$

$$+ \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\int \frac{1}{x-1}\,dx +$$

$$+ \int (x-1)^{-2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\,ln\,|x-1| +$$

$$+ \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\,ln\,|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

4 **Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable.**

a) $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ b) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{1+ln\,x}}{x}\,dx$ d) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}$ f) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{x \cdot ln^2\,x}$ h) $\int \frac{sen\,3x}{\sqrt[3]{1+3\,cos\,3x}}\,dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$ j) $\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$ l) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

m) $\int \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$ n) $\int \sqrt{25-x^2}\,dx$

ñ) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ o) $\int \frac{dx}{e^x(e^x-3)}$

p) $\int \frac{sen\,x \cdot cos\,x}{1-cos\,x}\,dx$ q) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$

a) $\int x \cdot \sqrt{x-1}\,dx$

Hacemos el cambio de variables:
$x-1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int x \cdot \sqrt{x-1}\,dx = \int (t^2+1)\cdot t \cdot 2t\,dt = \int (2t^4 + 2t^2)\,dt =$$

$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C$$

Deshaciendo el cambio $t = \sqrt{x-1}$, obtenemos:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = 2\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C$$

b) $$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -ln\,|1+e^{-x}| + C$$

También se puede hacer mediante el cambio de variable: $1 + e^{-x} = t$

c) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+ln\,x}}{x}\,dx = \int (1+ln\,x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(1+ln\,x)^{\frac{4}{3}}}{4/3} =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+ln\,x)^4} + C$$

También se puede hacer con el cambio de variable: $1 + ln\,x = t$.

d) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx$

Hacemos el cambio de variable:
$2x-3 = t^2 \Rightarrow dx = t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx = \int \frac{t}{t+1}\cdot t\,dt = \int \frac{t^2}{t+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t+1)(t-1)+1}{t+1}\,dt = \int (t-1)\,dt + \int \frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + ln\,|t+1| + C$$

Deshaciendo el cambio: $t = \sqrt{2x-3}$, obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx = \frac{2x-3}{2} - \sqrt{2x-3} + ln\,|\sqrt{2x-3}+1| + C$$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}}$

Hacemos el cambio: $x+1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t\,dt}{(t^2+4)\cdot t} = \int \frac{2}{t^2+4}\,dt =$$

$$= \int \frac{1/2}{1 + t^2/4}\, dt = \int \frac{1/2}{1 + (t/2)^2}\, dt = arc\ tg\left(\frac{t}{2}\right) + C =$$

$= arc\ tg\dfrac{\sqrt{x+1}}{2} + C$ tras deshacer el cambio con $t = \sqrt{x+1}$.

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx = \int \frac{t}{t^2+2} \cdot 2t \cdot dt = \int \frac{2t^2}{t^2+2}\, dt =$$

$$= 2\int \frac{(t^2+2)-2}{t^2+2}\, dt = 2\int \frac{t^2+2}{t^2+2}\, dt - 4\int \frac{1}{t^2+2}\, dt =$$

$$= 2t - 2\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}\, dt = 2t - 2\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt =$$

$$= 2t - 2\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt = 2t - 2\sqrt{2}\cdot arc\ tg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\cdot arc\ tg\sqrt{\frac{x}{2}} + C$$

al deshacer el cambio con $t = \sqrt{x}$.

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot ln^2\, x} = \int (ln\ x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \frac{(ln\ x)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{ln\ x} + C$

También se puede hacer mediante el cambio de variable $lnx = t$.

h) $\displaystyle\int \frac{sen\ 3x}{\sqrt[3]{1+3\ cos\ 3x}}\, dx = \int (1+3\ cos\ 3x)^{-\frac{1}{3}}\cdot sen\ 3x\cdot dx =$

$$= \frac{1}{-9}\int (1+3\ cos\ 3x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-9\ sen\ 3x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{9}\,\frac{(1+3\ cos\ 3x)^{2/3}}{2/3} = \frac{-\sqrt[3]{(1+3\ cos\ 3x)^2}}{6} + C$$

También se puede hacer mediante el cambio de variable:
$1 + 3\ cos\ 3x = t^3$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$

Hacemos el cambio $x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow dx = \dfrac{t\ dt}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = \int \frac{t}{x}\cdot\frac{t\ dt}{x} = \int \frac{t^2}{x^2}\, dt = \int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\, dt = \int \frac{t^2-1}{t^2-1}\, dt = \int \frac{1}{t^2-1}\, dt = t + \int \frac{1/2}{t-1}\, dt +$$

$$+ \int \frac{-1/2}{t+1}\, dt = t + \frac{1}{2}\ ln\,|t-1| - \frac{1}{2}\ ln\,|t+1| + C =$$

$$= t + ln\left|\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right| + C = \sqrt{x^2+1} + ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}} + C$$

j) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2-x}}\, dx =$

$$= \int \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx - \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, dx - \int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x\cdot dx =$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, dx - \frac{1}{-2}\int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\, dx =$$

$$= 2\ arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} + C =$$

$$= 2\ arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2} + C$$

k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\, dx$

Hacemos el cambio $1 - x^3 = t^2 \Rightarrow dx = \dfrac{-2t\ dt}{3x^2}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\, dx = \int \frac{\sqrt{x}}{t}\cdot\frac{-2t\ dt}{3x^2} = \frac{-2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dt =$$

$$= \frac{-2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{-2}{3}\ arc\ sent = \frac{-2}{3}\ arc\ sen\left(\sqrt{1-x^3}\right) + C$$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

Hacemos el cambio $x + 4 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \int \frac{2t\ dt}{(t^2-4)\cdot t} = \int \frac{2}{t^2-4}\, dt =$$

$$= \int \frac{1/2}{t-2}\, dt + \int \frac{-1/2}{t+2}\, dt = \frac{1}{2}\ ln\,|t-2| - \frac{1}{2}\ ln\,|t+2| + C =$$

$$= ln\left|\sqrt{\frac{t-2}{t+2}}\right| + C = ln\left|\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}}\right| + C$$

m) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}\, dx = 5\int \frac{1/5}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}\, dx =$

$$= 5\cdot arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

También se puede hacer mediante el cambio: $x = 5 \cdot sen\ t \Rightarrow dx = 5\ cos\ t \cdot dt$, quedando:

$$\int \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx = \int \frac{5}{\sqrt{25 - 25\ sen^2\ t}} \cdot 5\ cos\ t\ dt =$$

$$= \int \frac{25\ cos\ t}{5\ cos\ t}\, dt = 5t = 5 \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

después de deshacer el cambio $t = arc \cdot sen\ \left(\frac{x}{5}\right)$

n) $\displaystyle\int \sqrt{25 - x^2}\ dx$

Hacemos el cambio $x = 5 \cdot sen\ t \Rightarrow dx = 5 \cdot cos\ t \cdot dt$

$$\int \sqrt{25 - x^2} \cdot dx = \int \sqrt{25 - 25\ sen^2\ t} \cdot 5 \cdot cos\ t \cdot dt =$$

$$= \int 5\ cos\ t \cdot 5\ cos\ t\ dt = 25 \int cos^2\ t \cdot dt =$$

$$= 25 \int \frac{1 + cos\ 2t}{2}\, dt = \frac{25}{2} \int dt + \frac{25}{2} \int cos\ 2t \cdot dt =$$

$$= \frac{25}{2}\, t + \frac{25}{4}\, sen\ 2t + C = \frac{25}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{25}{4} \cdot 2 \cdot$$

$$\cdot\ sen\ t \cdot cos\ t + C = \frac{25}{2}\, arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{25}{2} \cdot \frac{x}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} +$$

$$+ C = \frac{25}{2}\, arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + C$$

ñ) $\displaystyle\int \frac{x}{x + \sqrt{x}}\, dx$

Hacemos el cambio $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt$

$$\int \frac{t^2}{t^2 + t} \cdot 2t\ dt = \int \frac{2t^2}{t + 1}\, dt = \int \frac{2\,(t + 1)\,(t - 1) + 2}{t + 1}\, dt =$$

$$= \int 2\,(t - 1)\ dt + \int \frac{2}{t + 1}\, dt = t^2 - 2t + 2\ ln\,|t + 1| + C =$$

$$= x - 2\sqrt{x}\ 2\ ln\,|\sqrt{x} + 1| + C$$

o) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\,(e^x - 3)}$

Hacemos el cambio $e^x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{e^x}$

$$\int \frac{dx}{e^x\,(e^x - 3)} = \int \frac{1}{t\,(t - 3)} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2\,(t - 3)}\, dt =$$

$$= \frac{-1}{3} \int \frac{1}{t^2}\, dt - \frac{1}{9} \int \frac{1}{t}\, dt + \frac{1}{9} \int \frac{1}{t - 3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{9}\, ln\,|t| + \frac{1}{9}\, ln\,|t - 3| + C = \frac{1}{3e^x} + ln \sqrt[9]{\frac{e^x - 3}{e^x}} + C$$

Hemos descompuesto la fracción $\dfrac{1}{t^2\,(t - 3)}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2\,(t - 3)} = \frac{-1/3}{t^2} + \frac{-1/9}{t} + \frac{1/9}{t - 3}$$

p) $\displaystyle\int \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{1 - cos\,x}\, dx$

Hacemos el cambio: $cos\ x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{-sen\ x}$

$$\int \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{1 - cos\ x} \cdot dx = \int \frac{sen\,x \cdot t}{1 - t} \cdot \frac{dt}{-sen\ x} = \int \frac{t}{t - 1}\, dt =$$

$$= \int \frac{t - 1 + 1}{t - 1}\, dt = \int \frac{t - 1}{t - 1}\, dt + \int \frac{1}{t - 1}\, dt = t + ln\,|t - 1| =$$

$$= cos\ x + ln\,|cos\,x - 1| + C$$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

Hacemos el cambio $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\ d$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\ dt}{t^2 - t} = \int \frac{4t^2}{t - 1}\, dt =$$

$$= \int \frac{4\,(t - 1)\,(t + 1) + 4}{t - 1}\, dt = 4 \int (t + 1)\ dt + 4 \int \frac{1}{t - 1}\, dt =$$

$$= 2t^2 + 4t + 4\ ln\,|t - 1| = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ ln\,|\sqrt[4]{x} - 1| + C$$

5 Resuelve las siguientes integrales por el método de integración más conveniente:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x + 1}}\, dx$

b) $\displaystyle\int x^2 \cdot arc\ sen\ x\ dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,x - x^2}}\, dx$

d) $\displaystyle\int sen^3\ x\ dx$

e) $\displaystyle\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^4 + 16}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{[ln\ x\,]^5}{x}\, dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,[\,ln\ x\ - 1]}$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + ln\ x}{2x}\, dx$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\ \sqrt{x^2 + 2\,x}}$

k) $\displaystyle\int \frac{ln\ (ln\ x\,)}{x}\, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4\,x}\, dx$

m) $\displaystyle\int sen\ (ln\ x\,) \cdot\ dx$

n) $\displaystyle\int \frac{x}{cos^2\ x}\, dx$

ñ) $\displaystyle\int ln\ \left[x + \sqrt{1 + x^2}\right] dx$

o) $\displaystyle\int \frac{6x^3 - x}{1 + x^4}\, dx$

p) $\displaystyle\int x\ ln\ (x^2-1)\ dx$ **q)** $\displaystyle\int \frac{6x^3-7x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

r) $\displaystyle\int x\cdot ln\left[\frac{1-x}{1+x}\right]dx$ **s)** $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4-1}\,dx$

t) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ **u)** $\displaystyle\int sen^4\,5x\cdot cos\,5x\ dx$

v) $\displaystyle\int \frac{cos\,5x}{sen^4\,5x}\,dx$ **w)** $\displaystyle\int \sqrt{6-5x^2}\,dx$

x) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$ **y)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

z) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(4+ln^2 x)}\,x$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$

La resolvemos por el método de cambio de variable haciendo: $x+1=t^2 \Rightarrow dx=2t\,dt$

$$\int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt=\int \frac{2\,(t+1)-2}{t+1}\,dt=\int 2\,dt-\int \frac{2}{t+1}\,dt=$$

$$=2t-2\,ln\,|t+1|=2\sqrt{x+1}-2\,ln\,|\sqrt{x+1}+1|+C$$

b) $\displaystyle\int x^2\cdot arc\ sen\ x\cdot dx=I$

La resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u=arc\ sen\ x &\Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ dv=x^2\,dx &\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}\end{aligned}\right\}$$

$$I=\int x^2\cdot arc\ sen\ x\cdot dx=\frac{x^3}{3}\,arc\ sen\ x-\frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Esta última integral la resolvemos por cambio de variables, haciendo $1-x^2=t^2 \Rightarrow dx=\dfrac{-t\,dt}{x}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{x^3}{t}\cdot\frac{-t\,dt}{x}=\int -x^2\cdot dt=\int (t^2-1)\,dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}-t=\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}$$

Por tanto, la integral pedida vale:

$$\int x^2\cdot arc\ sen\ x\cdot dx=\frac{x^3}{x}\cdot arc\ senx-$$

$$-\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}-\sqrt{1-x^2}\right]=\frac{x^3}{3}\,arc\ senx-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9}+$$

$$+\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}+C$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{5-(2-x)^2}}\,dx=$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\int \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(2-x)^2}{5}}}\,dx=-\int \frac{\dfrac{-1}{\sqrt5}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2-x}{\sqrt5}\right)^2}}\,dx=$$

$$=-arc\ sen\left(\frac{2-x}{\sqrt5}\right)+C$$

d) $\displaystyle\int sen^3\ x\cdot dx=\int sen\ x\cdot sen^2\ x\cdot dx=$

$$=\int sen\,x\ (1-cos^2\ x)\ dx=\int sen\ x\ dx-$$

$$-\int (cos\,x)^2\cdot sen\ x\cdot dx=-cos\ x+\int (cos\,x)^2\ (-sen\,x)\ dx=$$

$$=-cos\,x+\frac{(cos\,x)^3}{3}+C$$

e) $\displaystyle\int \frac{arc\ senx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int (arc\ senx)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$

$$=\frac{(arc\ senx)^2}{2}+C$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^4+16}\,dx=\int \frac{\dfrac{3x}{16}}{1+\dfrac{x^4}{16}}\,dx=\int \frac{\dfrac{3x}{16}}{1+\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^2}\,dx=$

$$=\frac{3}{8}\int \frac{\dfrac{x}{2}}{1+\left(\dfrac{x^2}{4}\right)^2}\,dx=\frac{3}{8}\cdot arc\ tg\left(\frac{x^2}{4}\right)+C$$

g) $\displaystyle\int \frac{(ln\ x)^5}{x}\cdot dx=\int (ln\ x)^5\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\frac{(ln\ x)^6}{6}+C$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(ln\ x-1)}=\int \frac{1/x\cdot dx}{ln\ x-1}=ln\,|ln\ x-1|+C$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+ln\ x}{2x}\,dx=\int \frac{\sqrt{x}}{2x}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{ln\ x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx+$

$$+\frac{1}{2}\int ln\ x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2}+\frac{1}{2}\,\frac{(ln\ x)^2}{2}+C=$$

$$=\sqrt{x}+\frac{(ln\ x)^2}{4}+C$$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

Hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo: $x^2 + 2x = t \Rightarrow dx = \dfrac{t\,dt}{x+1}$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{1}{(x+1)\cdot t}\cdot\frac{t\,dt}{x+1} + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = arc\ tg\ t =$$

$$= arc\ tg\sqrt{x^2+2x} + C$$

k) $\displaystyle\int \frac{ln\,(ln\,x)}{x}\,dx = I$

Hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo: $lnx = t \Rightarrow dx = x \cdot dt$

$$I = \int \frac{ln\,t}{x}\cdot x\,dt = \int ln\,t\cdot dt$$

Esta última integral la hacemos por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = ln\,t \Rightarrow du = \frac{1}{t}\,dt \\ dv = dt \Rightarrow v = t \end{aligned}\right\}$$

$$\int ln\,t\cdot dt = t\cdot ln\,t - \int t\cdot\frac{1}{t}\cdot dt = t\cdot ln\,t - t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{ln\,(ln\,x)}{x}\cdot dx = ln\,x\cdot[ln\,(ln\,x)] - ln\,x + C$$

l) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

Ésta es una integral racional en la cual el grado del polinomio numerador es mayor que el grado del polinomio denominador, por tanto dividimos numerador por denominador y obtenemos:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \int \frac{(x^3-4x)(x^2+x+4)+(4x^2+16x-8)}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \int (x^2+x+4)\,dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx$$

Esta última integral la resolvemos descomponiendo la fracción $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} + \frac{-3}{x+2}$$

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx +$$

$$+ \int \frac{-3}{x+2}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\,ln\,|x| + 5\,ln\,|x-2| -$$

$$- 3\,ln\,|x+2| + C$$

m) $\displaystyle\int sen\,(ln\,x)\,dx = I$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes.

$$\left.\begin{aligned} u = sen\,(ln\,x) \Rightarrow du = cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int sen\,(ln\,x)\,dx = x\cdot sen\,(ln\,x) -$$

$$- \int x\cdot cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = x\cdot sen\,(ln\,x) - \int cos\,(ln\,x)\,dx$$

Volvemos a aplicar este método a la última integral:

$$\left.\begin{aligned} u = cos\,(ln\,x) \Rightarrow du = -sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{aligned}\right\}$$

$$I = x\cdot sen\,(ln\,x) - \left[x\cdot cos\,(ln\,x) - \int -x\,sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right] =$$

$$= x\cdot sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x) - \int sen\,(ln\,x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x\,sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x) - I \Rightarrow 2I = x\,sen\,(ln\,x) -$$

$$- x\,cos\,(ln\,x) \Rightarrow I = \frac{x\,sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x)}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{x\,sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x)}{2} + C$$

n) $\displaystyle\int \frac{x}{cos^2\,x}\,dx = I$

Hacemos esta integral por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{1}{cos^2\,x}\,dx \Rightarrow v = tg\,x \end{aligned}\right\}$$

$$I = x\cdot tg\,x - \int tg\,x\cdot dx = x\cdot tg\,x - \int \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx =$$

$$= x\cdot tg\,x + ln\,|cos\,x| + C$$

ñ) $\displaystyle\int ln\,(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = I$

Hacemos esta integral por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = ln\,(x+\sqrt{1+x^2}) &\Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int ln\,(x+\sqrt{1+x^2})\cdot dx = x\cdot ln\,(x+\sqrt{1+x^2}) -$$

$$-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = x\cdot ln\,(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

o) $\displaystyle\int \frac{6x^3-x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{6x^3}{1+x^4}\,dx - \int \frac{x}{1+x^4}\,dx =$

$$= \frac{6}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\,ln\,|1+x^4| - \frac{1}{2}\,arc\ tg(x^2) + C$$

p) $\displaystyle\int x\cdot ln\,(x^2-1)\cdot dx = I$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = ln\,(x^2-1) &\Rightarrow du = \frac{2x}{x^2-1}\,dx \\ dv = x\,dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\cdot ln\,(x^2-1)\cdot dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2-1) - \int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2-1) - \int \frac{(x^2-1)\,x + x}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2-1) -$$

$$-\int x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2-1) - \frac{x^2}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\,ln\,|x^2-1| + C$$

q) $\displaystyle\int \frac{6x^3-7x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{6x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx - \int \frac{7x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx =$

$$= \frac{6}{-4}\int (1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4x^3)\,dx - \frac{7}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}{1/2} - \frac{7}{2}\,arc\ sen(x^2) =$$

$$= -3\sqrt{1-x^4} - \frac{7}{2}\cdot arc\ sen(x^2) + C$$

r) $\displaystyle\int x\cdot ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = I$

Hacemos esta integral por medio del método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) &\Rightarrow du = \frac{-2}{1-x^2}\,dx \\ dv = x\cdot dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\cdot ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)dx = \frac{x^2}{2}\cdot ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{-2}{1-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) -$$

$$-\int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \int \frac{x^2-1}{x^2-1}\,dx -$$

$$-\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \underbrace{\int \frac{1}{x^2-1}\,dx}_{(*)} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \int \frac{1/2}{x-1}\,dx - \int \frac{-1/2}{x+1}\,dx +$$

$$+\frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - x - \frac{1}{2}\,ln\,|x-1| + \frac{1}{2}\,ln\,|x+1| + C$$

(*) En esta integral hemos aplicado el método de integración de funciones racionales, descomponiendo la fracción $\dfrac{1}{x^2-1}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}$$

s) $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4-1}\,dx$

Esta integral la resolvemos por el método de integrales racionales 1) dividiendo y 2) en la integral que quede descomponiendo la fracción en suma de fracciones simples:

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{x\,(x^4-1)+x+1}{x^4-1}\,dx = \int x\,dx +$$

$$+\int \frac{x+1}{(x^2+1)\,(x+1)\,(x-1)}\,dx = \frac{x^2}{2} +$$

$$+\int \frac{1}{(x^2+1)\,(x-1)}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1/2}{x-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{-1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\,ln\,|x^2+1| - \frac{1}{2}\,arc\ tgx + \frac{1}{2}\,ln\,|x-1| + C$$

t) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por cambio de variable, haciendo

$$x = tgt \Rightarrow dx = (1 + tg^2 t)\, dt$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{tg^2\, t}{(1+tg^2\, t)^2}\cdot (1 + tg^2\, t)\, dt =$$

$$= \int \frac{tg^2\, t \cdot dt}{1+tg^2\, t} = \int \frac{tg^2\, t + 1 - 1}{tg^2\, t + 1}\,dt = \int \frac{tg^2\, t + 1}{tg^2\, t + 1}\,dt -$$

$$- \int \frac{1}{tg^2\, t + 1}\,dt = t - \int cos^2\, t\, dt = t - \int \frac{1 + cos\, 2t}{2}\,dt = t -$$

$$- \frac{t}{2} - \frac{sen\, 2t}{4} = \frac{t}{2} - \frac{sen\, 2t}{4} = \frac{arc\ tg\ x}{2} - \frac{sen\left[2\,(arc\ tg\ x)\right]}{4} + C$$

u) $\displaystyle\int sen^4\, 5x \cdot cos\, 5x \cdot dx = \frac{1}{5}\int (sen\, 5x)^4 \cdot 5 \cdot cos\, 5x\, dx =$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{(sen\, 5x)^5}{5} + C$$

v) $\displaystyle\int \frac{cos\, 5x}{sen^4\, 5x}\,dx = \frac{1}{5}\int (sen\, 5x)^{-4} \cdot 5 \cdot cos\, 5x \cdot dx =$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{(sen\, 5x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{15\,(sen\, 5x)^3} + C$$

w) $\displaystyle\int \sqrt{6 - 5x^2}\cdot dx$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por cambio de variable, haciendo

$$x = \frac{\sqrt{6}\cdot sen\ t}{\sqrt{5}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{6}\cdot cos\ t}{\sqrt{5}}\cdot dt$$

$$\int \sqrt{6 - 5x^2}\cdot dx = \int \sqrt{6 - 5\cdot \frac{6\ sen^2\ t}{5}}\cdot \frac{\sqrt{6}\cdot cos\ t}{\sqrt{5}}\cdot dt =$$

$$= \int \frac{6}{\sqrt{5}}\, cos^2\, t\, dt = \frac{6}{\sqrt{5}}\int \frac{1 + cos\, 2t}{2}\,dt = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot t +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}}\, sen\, 2t = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot arc\ sen\frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}}\cdot 2\cdot sen\ t \cdot cos\ t = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot arc\ sen\frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot \frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}}\cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}\ x}{\sqrt{6}}\right)^2} + C$$

x) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2 + x^2}}{\sqrt{4 - x^4}}\,dx = \int \sqrt{\frac{2 + x^2}{(2 + x^2)\,(2 - x^2)}}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx = arc\ sen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

y) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx$

Esta integral la resolvemos por el método de cambio de variable, haciendo $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1}\,dx = \int \frac{t^3 - t}{t^2 + 1}\cdot 6t^5\, dt = \int \frac{6t^8 - 6t^6}{t^2 + 1}\,dt =$$

$$= \int \frac{(6t^6 - 12t^4 + 12t^2 - 12)\,(t^2 + 1) + 12}{t^2 + 1}\,dt =$$

$$= \int (6t^6 - 12t^4 + 12t^2 - 12)\,dt + \int \frac{12}{t^2 + 1}\,dt =$$

$$= \frac{6t^7}{7} - \frac{12t^5}{5} + \frac{12t^3}{3} - 12t + 12\cdot arc\ tg\ t =$$

$$= \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{12\sqrt[6]{x^5}}{5} + 4\sqrt{x} - 12\sqrt[6]{x} + 12\cdot arc\ tg\sqrt[6]{x} + C$$

z) $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(4 + ln^2\, x)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{ln\ x}{2}\right)^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}x}{1 + \left(\frac{ln\ x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\ tg\left(\frac{ln\ x}{2}\right) + C$$

6 **Sea la función primitiva de la función g. Calcula una primitiva de *g* que se anule en $x = a$.**

Si $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$, todas las primitivas de $g(x)$ son de la forma $F(x) = G(x) + C$.

La primitiva que se anule para $x = a$ verifica:

$$F(a) = G(a) + C = 0 \Rightarrow C = -G(a)$$

es decir la primitiva buscada es:

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

7 **Halla la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ cuya gráfica pase por el punto (2, 2).**

Calculamos las primitivas de $f(x)$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\,dx$$

Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable, haciendo $x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow dx = \dfrac{t\ dt}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \cdot dx = \int \frac{t}{x} \cdot \frac{t\,dt}{x} = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^2+1}\,dt - \int \frac{1}{t^2+1} = t - arc\ tg\ t =$$

$$= \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\sqrt{x^2-1} + C$$

Todas las primitivas de $f(x)$ son las funciones:

$$F(x) = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\ \sqrt{x^2-1} + C$$

La primitiva buscada que pase por el punto (2, 2) cumple:

$$2 = \sqrt{3} - arc\ tg\sqrt{3} + C \Rightarrow C = 2 - \sqrt{3} + \frac{\Pi}{3}$$

Luego la primitiva buscada es:

$$F(x) = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\sqrt{x^2-1} + \left(2 - \sqrt{3} + \frac{\Pi}{3}\right)$$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

8 Estudia si alguna de las siguientes igualdades es cierta:

$$\int 4\ sen(2x) \cdot\ cos\,(2x)dx\ =\ sen^2(2x)$$

$$\int 4\ sen(2x) \cdot\ cos\,(2x)dx\ =\ -\ cos^2(2x)$$

Veamos si la 1.ª igualdad es cierta o falsa. Para ello, hemos de demostrar que la derivada de la función del segundo miembro es igual a la derivada del integrando.

$$D[sen^2(2x)] = 2 \cdot sen\ (2x) \cdot cos\ 2x \cdot 2 = 4\ sen\ 2x \cdot cos\ 2x$$

Esta igualdad es cierta.
Veamos la segunda:

$$D\ [-cos^2\,(2x)] = -2 \cdot cos\ (2x) \cdot [-sen\ (2x)] \cdot 2 =$$
$$= +4 \cdot cos\ (2x) \cdot sen\ (2x)$$

La segunda igualdad también es verdadera.

9 Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$I = \int \frac{3x-2}{x^3 - 3\,x^2 + 12\ x - 10}\,dx$$

$$\int \frac{3x-2}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10}\,dx$$

Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales. Para ello descomponemos la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-1)\,(x^2-2x+10)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+10}$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)\,(x^2-2x+10)} = \frac{A\,(x^2-2x+10) + (Bx+C)\,(x-1)}{(x-1)\,(x^2-2x+10)}$$

Igualamos los numeradores:

- Para $x = 1 \Rightarrow 9A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{9}$
- Para $x = 0 \Rightarrow 10A - C = -2 \Rightarrow C = \frac{28}{9}$
- Para $x = -1 \Rightarrow 13A + 12B - 2C = -5 \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$

$$\int \frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10}\,dx = \int \frac{1/9}{x-1}\,dx +$$

$$+ \int \frac{-1/9x + 28/9}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{1}{9}\,ln\,|x-1| - \frac{1}{9}\int \frac{x}{x^2-2x+10}\,dx +$$

$$+ \frac{28}{9}\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{1}{9}\,ln\,|x-1| -$$

$$-\frac{1}{18}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\,ln\,|x-1| -$$

$$-\frac{1}{18}\,ln\,|x^2-2x+10| + \int \frac{\frac{3}{9}}{1+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{9}\,ln\,|x-1| -$$

$$-\frac{1}{18}\,ln\,|x^2-2x+10| + arc\ tg\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

10 Calcula:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx$$

Descomponemos la fracción $\frac{x+1}{x^2-x}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow \frac{x+1}{x\,(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = -\,ln\,|x| + 2\,ln\,|x-1| + C$$

11 Calcula:

$$I = \int e^{3x} \cdot sen\ 2x\ dx$$

$$I = \int e^{3x} \cdot\ sen\ 2x\ dx$$

Esta integral la resolvemos por el método de integración de partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x}\,dx \\ dv = sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\,cos\ 2x \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^{3x} \cdot sen\,2x \cdot dx = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} -$$

$$- \int \frac{-3}{2} e^{3x} \cdot cos\,2x \cdot dx = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} +$$

$$+ \int \frac{3}{2} e^{3x} \cdot cos\,2x \cdot dx$$

Esta última integral la hacemos por el mismo método:

$$\left.\begin{array}{r} u = \frac{3}{2} e^{3x} \Rightarrow du = \frac{9}{2} e^{3x}\,dx \\ dv = cos\,2x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\,sen\,2x \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} + \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot sen\,2x}{4} -$$

$$- \int \frac{9}{4} e^{3x} \cdot sen\,2x \cdot dx \Rightarrow I = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} + \frac{3\,e^{3x}\,sen\,2x}{4} -$$

$$- \frac{9}{4} I \Rightarrow I = \int e^{3x} \cdot sen\,2x \cdot dx = \frac{-2\,e^{3x}\,cos\,2x}{13} +$$

$$+ \frac{3\,e^{3x} \cdot sen\,2x}{13} + C$$

12 Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$I = \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx \qquad I = \int cos\,\sqrt{x}\,dx$$

$$\bullet \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,|x^2+2x+3| - \sqrt{2} \int \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,ln\,|x^2+2x+3| - \sqrt{2} \cdot arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\bullet \int cos\,\sqrt{x} \cdot dx = I = \int 2\sqrt{x} \cdot cos\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = 2\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\ dv = cos\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow v = sen\,\sqrt{x} \end{array}\right\}$$

$$I = \int 2\sqrt{x} \cdot cos\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} \cdot sen\,\sqrt{x} -$$

$$- \int sen\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2\sqrt{x} \cdot sen\,\sqrt{x} - 2 \int sen\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot sen\,\sqrt{x} + 2 \cdot cos\,\sqrt{x} + C$$

13 Calcula la primitiva de la función $f(x) = [lnx]^2$ que se anule en $x = e$.

$$\int (ln\,x)^2\,dx = I$$

$$\left.\begin{array}{r} u = (ln\,x)^2 \Rightarrow du = 2\,(ln\,x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int (ln\,x)^2\,dx = x \cdot (ln\,x)^2 - \int 2\,ln\,x \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = 2\,ln\,x \Rightarrow du = \frac{2}{x}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int (ln\,x)^2\,dx = x \cdot (ln\,x)^2 - \left[2x\,ln\,x - \int 2\,dx\right] =$$

$$= x\,(ln\,x)^2 - 2x\,ln\,x + 2x + C$$

Todas las primitivas de $f(x) = (ln\,x)^2$ son las funciones de la forma:

$$F(x) = x\,(ln\,x)^2 - 2x\,ln\,x + 2x + C$$

Lo que se anula para $x = e$ verificara:

$$0 = e - 2e + 2e + C \Rightarrow C = -e$$

La primitiva buscada es:

$$F(x) = x\,(ln\,x)^2 - 2x\,ln\,x + 2x - e$$

14 Halla $f(x)$ si sabemos que $f(0) = 1$; $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$

Si $f''(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2} + C$

Como $f'(0) = 2 \Rightarrow C = 2$, por tanto:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + C$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$, luego la función $f(x)$ buscada es:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$$

15 Resuelve las siguientes integrales:

$$I = \int x\,e^{-x}\,dx \qquad I = \int \frac{5x+8}{2x^2+x-3}\,dx$$

$$\bullet\ I = \int x \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx &\Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} +$$

$$+ \int e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C \Rightarrow \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C$$

• $\displaystyle\int \frac{5x + 8}{2x^2 + x - 3}\,dx$

$$\frac{5x + 8}{(x - 1)\,(2x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{2x + 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x + 8}{(x - 1)\,(2x + 3)} = \frac{13/5}{x - 1} + \frac{-1/5}{2x + 3}$$

$$\int \frac{5x + 8}{2x^2 + x - 3}\,dx = \int \frac{13/5}{x - 1}\,dx + \int \frac{-1/5}{2x + 3}\,dx =$$

$$= \frac{13}{5}\,ln\,|x - 1| - \frac{1}{10}\,ln\,|2x + 3| = ln\left|\frac{(x - 1)^{13/5}}{(2x + 3)^{1/10}}\right| + C$$

16 **Resuelve** $\displaystyle\int \frac{4^x + 5\cdot16^x}{1+16^x}\,dx$

$$\int \frac{4^x + 5\cdot16^x}{1 + 16^x}\,dx = \int \frac{4^x}{1 + 16^x}\,dx + \int \frac{5\cdot16^x}{1 + 16^x}\,dx =$$

$$= \int \frac{4^x}{1 + (4^x)^2}\,dx + 5\int \frac{16^x}{1 + 16^x}\,dx = \frac{1}{ln\,4}\int \frac{4^x\cdot ln\,4}{1 + (4^x)^2}\,dx +$$

$$+ \frac{5}{ln\,16}\int \frac{16^x\cdot ln\,16}{1 + 16^x}\,dx = \frac{1}{ln4}\cdot arc\ tg(4^x) +$$

$$+ \frac{5}{ln\,16}\cdot ln\,|1 + 16^x| + C$$

17 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{1 + ln^3 x}{x\,(ln^2 x - ln\,x)}\,dx$

$$\int \frac{1 + ln^3 x}{x\,(ln^2 x - ln\,x)}\,dx$$

Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable, haciendo: $ln\,x = t \Rightarrow dx = x\,dt$

$$\int \frac{1 + ln^3 x}{x\,(ln^2 x - ln\,x)}\,dx = \int \frac{1 + t^3}{x\,(t^2 - t)}\cdot x\cdot dt = \int \frac{t^3 + 1}{t^2 - t}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t^2 - t)\,(t + 1) + (t + 1)}{t^2 - t}\,dt = \int (t + 1)\,dt + \int \frac{t + 1}{t^2 - t}\,dt =$$

$$= \frac{(t + 1)^2}{2} + \int \frac{-1}{t}\,dt + \int \frac{2}{t - 1}\,dt = \frac{(t + 1)^2}{2} -$$

$$- ln\,|t| + 2\,ln\,|t - 1| = \frac{(ln\,x + 1)^2}{2} + ln\left|\frac{(ln\,x - 1)^2}{ln\,x}\right| + C$$

18 **Calcula, integrando por partes** $I = \displaystyle\int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx$.

Comprueba el resultado por derivación.

$$I = \int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} u = sen\,(ln\,x) &\Rightarrow du = cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = x\,dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \int \frac{x}{2}\cdot cos\,(ln\,x)\,dx$$

Esta última integral la resolvemos por el mismo método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = cos\,(ln\,x) &\Rightarrow du = -sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = \frac{x}{2}\,dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{4} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) -$$

$$-\left[\frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x) - \int -\frac{x}{4}\,sen\,(ln\,x)\,dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x) - \frac{1}{4}\,I$$

$$\frac{5}{4}\,I = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{5}\left[\frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x)\right] + C$$

$$\int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{2x^2\,sen\,(ln\,x)}{5} - \frac{x^2\,cos\,(ln\,x)}{5} + C$$

Vamos a comprobar el resultado, para ello veremos que la derivada del segundo miembro es igual a la función del primer miembro.

$$D\left[\frac{2x^2\cdot sen\,(ln\,x)}{5} - \frac{x^2\cdot cos\,(ln\,x)}{5} + C\right]$$

$$= \frac{4x\cdot sen\,(ln\,x) + 2x^2\cdot cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}}{5} -$$

$$- \frac{2x\cdot cos\,(ln\,x) - x^2\,sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}}{5} =$$

$$= \frac{4x\cdot sen\,(ln\,x) + 2x\cdot cos\,(ln\,x) - 2x\cdot cos\,(ln\,x) + x\cdot sen\,(ln\,x)}{5}$$

$$= \frac{5x\cdot sen\,(ln\,x)}{5} = x\cdot sen\,(ln\,x)$$

BLOQUE TEMÁTICO III:
ANÁLISIS

UNIDAD DIDÁCTICA 16

Integrales definidas. Aplicaciones

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

Al finalizar esta Unidad Didáctica, el alumno y la alumna serán capaces de:

1. Conocer y aplicar el método exhaustivo o método de Arquímedes en el cálculo de áreas de recintos planos.
2. Utilizar el concepto de integral definida para calcular áreas de recintos limitados por una o dos curvas.
3. Comprender los teoremas relativos al cálculo integral que relacionan éste con el cálculo diferencial.
4. Aplicar correctamente la regla de Barrow en el cálculo de integrales definidas.
5. Valorar la importancia del cálculo integral en el desarrollo de diversas ciencias.

¿CÓMO TRABAJAR LA UNIDAD?

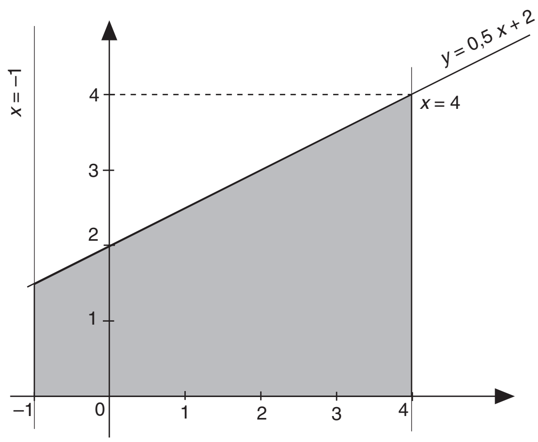
Introduciendo al alumno en el concepto de integral definida a través de áreas de recintos planos.
Introduciendo al alumno al uso del rigor en la definición de conceptos y demostraciones de teoremas relativos al cálculo integral.
Utilizando la representación gráfica de funciones para la delimitación de recintos.
Aplicando la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas y de áreas de recintos planos.

Actividades iniciales

1. Calcula el área de los siguientes recintos:

- **Recinto limitado por la recta $y = 0{,}5x + 2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 4$.**
- **Recinto limitado por la curva de ordenadas negativas $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ y el eje OX.**

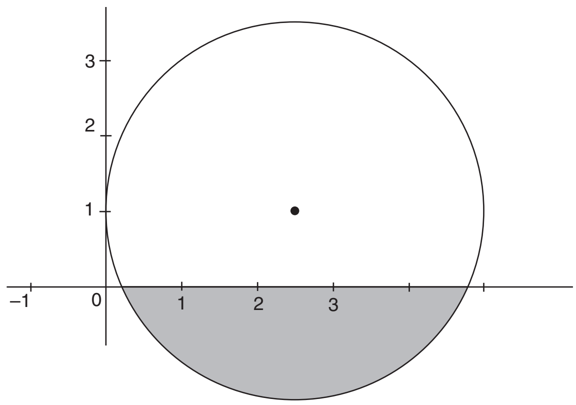
•



Lo que nos pide el problema es hallar el área del recinto rayado. Este recinto es un trapecio y su área es:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{4 + 1{,}5}{2} \cdot 5 = 13{,}7$$

•



$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$
La curva es una circunferencia de centro C (3, 1) y radio 3 unidades.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^6 \frac{4\,dx}{\sqrt{x+3}}$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2x\ dx$

c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{ln\ x}{x}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2+2)^4}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\ x \cdot sen^3\ x\ dx$

g) $\displaystyle\int_0^8 \frac{3\,dx}{\sqrt{1+x}}$ h) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{9+4x}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x+b}$ cos $b > 0$ j) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

k) $\displaystyle\int_0^2 4x^2(1+x^3)^5\,dx$ l) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \frac{sen\ \sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,dx$ n) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x}\,dx$

ñ) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\ dx$ o) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

p) $\displaystyle\int_0^1 (x - e^x\ cos\ x)\,dx$ q) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

r) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx$ s) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

t) $\displaystyle\int_3^6 \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}-1}\,dx$ u) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx$

v) $\displaystyle\int_3^6 x\sqrt{x-2}\,dx$ w) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$

x) $\displaystyle\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ y) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

z) $\displaystyle\int_1^e x^2 \cdot ln\ x\ dx$

a) $\displaystyle\int_1^6 \frac{4 \cdot dx}{\sqrt{x+3}}$

Calculamos la integral indefinida por integrales inmediatas:

$$\int \frac{4 \cdot dx}{\sqrt{x+3}} = 4\int (x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 8\sqrt{x+3} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_1^6 \frac{4 \cdot dx}{\sqrt{x+3}} = \left[8\sqrt{x+3}\right]_1^6 = 8\sqrt{9} - 8\sqrt{4} = 24 - 16 = 8$$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sen\ 2x \cdot dx$

Calculamos la integral indefinida:

$$\int sen\ 2x \cdot dx = \frac{1}{2}\int sen\ 2x \cdot 2\ dx = \frac{1}{2}(-cos\ 2x) + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sen\ 2x \cdot dx = \left[\frac{1}{2}(-cos\ 2x)\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} = \frac{1}{2}(-cos\ \Pi) - \frac{1}{2}(-cos\ 0) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{ln\ x}{x}\ dx$

Calculamos la integral indefinida:

$$\int \frac{ln\ x}{x}\ dx = \int ln\ x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(ln\ x)^2}{2} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow

$$\int_3^5 \frac{ln\ x}{x}\ dx = \left[\frac{(ln\ x)^2}{2}\right]_3^5 = \frac{(ln\ 5)^2}{2} - \frac{(ln\ 3)^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(ln\ 5 - ln\ 3)\ (ln\ 5 + ln\ 3)\right] = \frac{1}{2}\ ln\ 15 \cdot ln\ \frac{5}{3} = 0{,}69$$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2}\ dx$

Operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2}\ dx = \left[ln\ (e^x + 2)\right]_0^1 = ln\ (e + 2) - ln\ 3 =$$

$$= ln\ \frac{e + 2}{3} = 0{,}45$$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4}\ dx$

Operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_{-1}^1 \frac{4x}{(x^2 + 2)^4}\ dx = 2\int_{-1}^1 (x^2 + 2)^{-4} \cdot 2x\ dx = \left[\frac{-2}{3\ (x^2 + 2)^3}\right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{-2}{81} - \frac{-2}{81} = 0$$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\Pi}{2}} cos\ x \cdot sen^3\ x \cdot dx$

Operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} cos\ x \cdot sen^3\ x \cdot dx = \left[\frac{(sen\ x)^4}{4}\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} = \frac{\left(sen\ \frac{\Pi}{2}\right)^4}{4} - \frac{(sen\ 0)^4}{4} = \frac{1}{4}$$

g) $\displaystyle\int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1 + x}}\ dx$

Operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^8 \frac{3}{\sqrt{1 + x}}\ dx = 3\int_0^8 (1 + x)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \left[6\sqrt{1 + x}\right]_0^8 =$$

$$= 6\sqrt{9} - 6\sqrt{1} = 12$$

h) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{9 + 4x}\ dx$

Operando de manera análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^4 \sqrt{9 + 4x}\ dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (9 + 4x)^{\frac{1}{2}} \cdot 4\ dx = \left[\frac{\sqrt{(9 + 4x)^3}}{6}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{125}{6} - \frac{27}{6} = \frac{49}{3}$$

i) $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x + b}$ con $b > 0$

Operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^b \frac{dx}{x + b} = \left[ln\ |x + b|\right]_0^b = ln\ |2b| - ln\ |b| = ln\ \frac{2b}{b} = ln\ 2 = 0{,}69$$

j) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$

Operando de forma análoga, obtenemos:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \left[arc\ tg\ x\right]_1^{\sqrt{3}} = arc\ tg\ \sqrt{3} - arc\ tg\ 1 =$$

$$= \frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{4} = \frac{\Pi}{12}$$

k) $\displaystyle\int_0^2 4x^2\ (1 + x^3)^5\ dx$

Operando de forma análoga a las anteriores, obtenemos:

$$\int_0^2 4x^2\ (1 + x^3)^5\ dx = \frac{4}{3}\int_0^2 (1 + x^3)^5 \cdot 3x^2\ dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}(1 + x^3)^6\right]_0^2 = \left[\frac{2\ (1 + x^3)^6}{9}\right]_0^2 = 118\ 098 - \frac{2}{9} = 118\ 097{,}8$$

l) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x - 1}}{x}\ dx$

Obtenemos la integral indefinida por el método de cambio de variable haciendo $x - 1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt$.

$$\int \frac{\sqrt{x - 1}}{x}\ dx = \int \frac{t}{1 + t^2} \cdot 2t\ dt = \int \frac{2t^2}{1 + t^2}\ dt =$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)-2}{1+t^2}\,dt = \int 2\,dt - \int \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2t - 2\,arc\ tg\ t =$$

$$= 2\sqrt{x-1} - 2 \cdot arc\ tg\sqrt{x-1} + C$$

Hacemos $C = 0$ y aplicamos la regla de Barrow para determinar la integral definida:

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \left[2\sqrt{x-1} - 2\,arc\ tg\sqrt{x-1}\right]_1^4 =$$

$$= \left(2\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\Pi}{3}\right) - (0-0) = 2\sqrt{3} - \frac{2\Pi}{3} = 1{,}37$$

m) $$\int_0^{\Pi^2} \frac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^{\Pi^2} sen\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[-2 \cdot cos\sqrt{x}\right]_0^{\Pi^2} =$$

$$= (-2\ cos\ \Pi) - (-2\ cos\ 0) = 2 + 2 = 4$$

n) $$\int_{-1}^0 x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx$$

Determinamos la integral indefinida por el método de integración por partes y obtenemos:

$$\int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = I$$

$$\left.\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x\ dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx &\Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x\,e^{2x} \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método a esta última integral:

$$\left.\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} \cdot dx &\Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[\frac{x\,e^{2x}}{2} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx\right] =$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x\,e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Calculamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_{-1}^0 x^2 e^{2x}\,dx = \left[\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x\,e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^0 = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{5}{4\,e^2}\right) = 0{,}08$$

ñ) $$\int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} tg\ x\ dx$$

Calculamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después calculamos la definida haciendo C = 0 y aplicando Barrow.

$$\int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} tg\ x\ dx = -\int_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} \frac{-sen\ x}{cos\ x}\,dx = \left[-ln\,|cos\ x| + C\right]_{-\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{4}} =$$

$$= \left(-ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

o) $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

Calculamos la integral de forma análoga a la anterior:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_0^2 \frac{\frac{1}{3}\,dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \left[arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + C\right]_0^2 =$$

$$= \left[arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^2 = arc\ sen\frac{2}{3} - arc\ sen\,0 = 0{,}73$$

p) $$\int_0^1 (x - e^x\,cos\ x)\,dx$$

Determinamos la integral indefinida:

$$\int (x - e^x\,cos\ x)\,dx = \int x\ dx - \int e^x\,cos\ x\ dx = \frac{x^2}{2} - I$$

La integral $I = \int e^x \cos x\,dx$ la calculamos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x\ dx \\ dv = cos\ x\ dx &\Rightarrow v = sen\ x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int e^x\,cos\ x\ dx = e^x\,sen\ x - \int e^x\,sen\ x\ dx$$

Aplicando el mismo método a esta última integral, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} u = e^x &\Rightarrow du = e^x\ dx \\ dv = sen\ x\ dx &\Rightarrow v = -cos\ x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int e^x\,cos\ x\ dx = e^x\,sen\ x - \left[-e^x\,cos\ x - \int -e^x\,cos\ x\ dx\right] =$$

$$= e^x\,sen\ x + e^x\,cos\ x - \int e^x\,cos\ x\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = e^x\,sen\ x + e^x\,cos\ x - I \Rightarrow I = \frac{e^x\,sen\ x + e^x\,cos\ x}{2}$$

Por tanto:

$$\int (x - e^x\,cos\ x)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{e^x\,sen\ x + e^x\,cos\ x}{2} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow, obtenemos:

$$\int_0^1 (x - e^x\,cos\ x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{e^x\,sen\ x + e^x\,cos\ x}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{e\ sen\,1 + e\ cos\,1}{2}\right) - \left(0 - \frac{0 + 1}{2}\right) = 1 - 1,88 = -0,88$$

q) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1}\, dx$

Determinamos la integral indefinida por el método de integrales inmediatas y después la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ ln\,|x^2 - 1| + C\right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{2}\ ln\ 8 - \frac{1}{2}\ ln\ 3 = ln\ \sqrt{\frac{8}{3}} = 0,49$$

r) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3}{(x - 1)^2}\, dx$

Determinamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^3}{(x - 1)^2}\, dx = \int \frac{(x + 2)\,(x - 1)^2 + 3x - 2}{(x - 1)^2}\, dx =$$

$$= \int (x + 2)\, dx + \int \frac{3x}{(x - 1)^2}\, dx - \int \frac{2}{(x - 1)^2}\, dx = \frac{(x + 2)^2}{2} +$$

$$+ 3\int \frac{x - 1 + 1}{(x - 1)^2}\, dx - \int \frac{2}{(x - 1)^2}\, dx = \frac{(x + 2)^2}{2} +$$

$$+ 3\int \frac{1}{x - 1}\, dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2}\, dx = \frac{(x + 2)^2}{2} + 3\ ln\,|x - 1| -$$

$$- \frac{1}{x - 1} + C$$

Determinamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow:

$$\int_2^3 \frac{x^3}{(x - 1)^2}\, dx = \left[\frac{(x + 2)^2}{2} + 3\ ln\,|x - 1| - \frac{1}{x - 1}\right]_2^3 =$$

$$= \left(\frac{25}{2} + 3\ ln\ 2 - \frac{1}{2}\right) - \left(8 + 0 - 1\right) = 5 + 3\ ln\ 2 = 7,08$$

s) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$

Determinamos la integral indefinida por el método de integrales racionales, descomponiendo la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\int \frac{1}{x^3 + 1}\, dx = \int \frac{1/3}{x + 1}\, dx + \int \frac{-1/3\ x + 2/3}{x^2 - x + 1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\,|x + 1| - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2 - x + 1}\, dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2 - x + 1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\,|x + 1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x - 1 + 1}{x^2 - x + 1}\, dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\,|x + 1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{4}{1 + \left(\dfrac{x - \frac{1}{2}}{1/2}\right)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\,|x + 1| - \frac{1}{6}\ ln\,|x^2 - x + 1| + arc\ sen\left(\frac{x - 1/2}{1/2}\right) + C$$

Calculamos la integral definida haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow y obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1} = \left[\frac{1}{3}\ ln\,|x + 1| - \frac{1}{6}\ ln\,|x^2 - x + 1| +\right.$$

$$\left. + arc\ sen(2x - 1)\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}\ ln\ 2 - 0 + \frac{\Pi}{2}\right) - \left(\frac{3\Pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\ 2 - \Pi = -2,91$$

t) $\displaystyle\int_3^6 \frac{\sqrt{2x - 3}}{\sqrt{2x - 3} - 1}\, dx$

Resolvemos la integral indefinida por el método de cambio de variable, haciendo $2x - 3 = t^2 \Rightarrow dx = tdt$.

$$\int \frac{\sqrt{2x - 3}}{\sqrt{2x - 3} - 1}\, dx = \int \frac{t}{t - 1} \cdot t\ dt = \int \frac{t^2}{t - 1}\, dt =$$

$$= \int \frac{(t - 1)\,(t + 1) + 1}{t - 1}\, dt = \int (t + 1)\, dt + \int \frac{1}{t - 1}\, dt =$$

$$= \frac{(t + 1)^2}{2} + ln\,|t - 1| = \frac{\left(\sqrt{2x - 3} + 1\right)^2}{2} + ln\,\left|\sqrt{2x - 3} - 1\right| + C$$

Dando a C el valor 0 y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{2x - 3}}{\sqrt{2x - 3} - 1}\, dx = \left[\frac{\left(\sqrt{2x - 3} + 1\right)^2}{2} + ln\,\left|\sqrt{2x - 3} - 1\right|\right]_3^6 =$$

$$= (8 + ln\ 2) - \left[\frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}{2} + ln\,\left(\sqrt{3} - 1\right)\right] = 5,27$$

u) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}\, dx$

Calculamos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}\, dx = \int \frac{x^2 + 1}{x\,(x - 1)\,(x + 1)}\, dx = \int \frac{-1}{x}\, dx +$$

$$+\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{x+1}\,dx=-ln\,|x|+ln\,|x-1|+ln\,|x+1|=$$

$$=ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|+C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\int_2^5 \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx=\left[ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|\right]_2^5=ln\,\frac{24}{5}-ln\,\frac{1}{2}=ln\,\frac{48}{5}=2{,}26$$

v) $\displaystyle\int_3^6 x\,\sqrt{x-2}\,dx$

Resolvemos la integral indefinida por el método de cambio de variable, haciendo $x - 2 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

$$\int x\,\sqrt{x-2}\,dx=\int (t^2+2)\cdot t\cdot 2t\,dt^3=\int (2t^4+4t^2)\,dt^3=$$

$$=\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}=\frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5}+\frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3}+C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_3^6 x\,\sqrt{x-2}\,dx=\left[\frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5}+\frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3}\right]_3^6=$$

$$=\left(\frac{64}{5}+\frac{32}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{3}\right)=\frac{62}{5}+\frac{28}{3}=\frac{326}{15}=21{,}7$$

w) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$

Resolvemos la integral indefinida por el método de cambio de variable, haciendo $x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow dx = \frac{t\,dt}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\int \frac{t}{x}\cdot\frac{t\,dt}{x}=\int \frac{t^2}{x^2}\,dt=\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt=$$

$$=\int \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1}\,dt=\int dt+\int \frac{1}{t^2-1}\,dt=t+\int \frac{1/2}{t-1}\,dt+$$

$$+\int \frac{-1/2}{t+1}\,dt=t+\frac{1}{2}\,ln\,|t-1|-\frac{1}{2}\,ln\,|t+1|=$$

$$+\,ln\left|\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right|=\sqrt{x^2+1}+ln\left|\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}}\right|+C=$$

$$=\sqrt{x^2+1}+ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|+C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx=\left[\sqrt{x^2+1}+ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|\right]_{-1}^1=$$

$$=\left[\sqrt{2}+ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]-\left[\sqrt{2}+ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{-1}\right|\right]=0$$

x) $\displaystyle\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$

Resolvemos la integral indefinida por el método de cambio de variable, haciendo $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$.

$$\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{t^2}{t^2+t}\cdot 2t\,dt=\int \frac{2t^2}{t+1}\,dt=$$

$$=\int \frac{(2t-2)\,(t+1)+2}{t+1}\,dt=\int (2t-2)\,dt+\int \frac{2}{t+1}\,dt=$$

$$=t^2-2t+2\,ln\,|t+1|=x-2\sqrt{x}+2\,ln\,|\sqrt{x}+1|+C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrox, obtenemos:

$$\int_4^9 \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx=\left[x-2\sqrt{x}+2\,ln\,|\sqrt{x}+1|\right]_4^9=3{,}58$$

y) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$

Resolvemos la integral indefinida por el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int \frac{(x^3+x^2-2x)\,(x-1)+3x^2-6}{x^3+x^2-2x}\,dx=$$

$$=\int (x-1)\,dx+\int \frac{3x^2-6}{x\,(x-1)\,(x+2)}\,dx=\frac{(x-1)^2}{2}+\int \frac{3}{x}\,dx+$$

$$+\int \frac{-1}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{x+2}\,dx=\frac{(x-1)^2}{2}+3\,ln\,|x|-ln\,|x-1|+$$

$$+\,ln\,|x+2|=\frac{(x-1)^2}{2}+ln\left|\frac{x^3\,(x+2)}{x-1}\right|+C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos la integral definida:

$$\int_2^3 \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx=\left[\frac{(x-1)^2}{2}+ln\left|\frac{x^3\,(x+2)}{x-1}\right|\right]_2^3=$$

$$=\left(2+ln\,\frac{135}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+ln\,32\right)=\frac{3}{2}+ln\,\frac{135}{64}=2{,}25$$

z) $\displaystyle\int_1^e x^2\cdot ln\,x\cdot dx$

Resolvemos la integral indefinida por el método de integración por partes:

$$I=\int x^2\cdot ln\,x\cdot dx$$

$$\left.\begin{aligned} u&=ln\,x\Rightarrow du=\frac{1}{x}\,dx\\ dv&=x^2\,dx\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}\end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2\, ln\, x\, dx = \frac{x^3}{3}\, ln\, x - \int \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{x^3}{3}\, ln\, x - \frac{x^3}{9} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos el resultado de la integral definida

$$\int_1^e x^2\, ln\, x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\, ln\, x - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \left(\frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9}\right) - \left(0 - \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{2\, e^3}{9} + \frac{1}{9} = 4{,}57$$

2 **Obtén la derivada de las siguientes funciones:**

$$F(x) = \int_0^x e^{cos\, t}\, dt \qquad G(x) = \int_0^x t^2\, dt$$

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3 + t}\, dt \qquad I(x) = \int_{-3}^x |t + 2|\, dt$$

$$J(x) = \int_2^{x^3} \frac{e^t}{t^2 + 1}\, dt \qquad K(x) = \int_x^{x^2} ln\, (t^2 + 4)\, dt$$

$$F(x) = \int_0^x e^{cos\, t}\, dt \Rightarrow F'(x) = e^{cos\, x}$$

$$G(x) = \int_0^x t^2\, dt \Rightarrow G(x) = x^2$$

$$H(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3 + t}\, dt \Rightarrow H(x) = \frac{1}{3 + x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{3 + x^2}$$

$$I(x) = \int_{-3}^x |t + 2|\, dt \Rightarrow I'(x) = (x + 2)$$

$$J(x) = \int_2^{x^3} \frac{e^t}{t^2 + 1}\, dt \Rightarrow J(x) = \frac{e^{x^3}}{x^6 + 1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2 \cdot e^{x^3}}{x^6 + 1}$$

$$K(x) = \int_x^{x^2} ln\, (t^2 + 4)\, dt = \int_x^a ln\, (t^2 + 4)\, dt +$$

$$+ \int_a^{x^2} ln\, (t^2 + 4)\, dt = -\int_a^x ln\, (t^2 + 4)\, dt + \int_a^{x^2} ln\, (t^2 + 4)\, dt =$$

$$= \int_a^x -ln\, (t^2 + 4)\, dt + \int_a^{x^2} ln\, (t^2 + 4)\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K'(x) = -ln\, (x^2 + 4) + ln\, (x^4 + 4) \cdot 2x$$

$$K'(x) = 2x \cdot ln\, (x^4 + 4) - ln\, (x^2 + 4)$$

3 **Calcula $\int_2^4 f(x)$ siendo $f(x) = 2x^2 - 3x$ y determina el valor medio de f en el intervalo (2, 4), así como el valor de C correspondiente.**

$$\int_2^4 f(x)\, dx = \int_2^4 (2x^2 - 3x)\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= 18{,}\overset{\frown}{6} - (-0{,}\overset{\frown}{6}) = 19{,}\overset{\frown}{3} = \frac{58}{3}$$

Por el teorema de la media:

$$\int_2^4 f(x)\, dx = f(c)\, (4 - 2)\ con\ c \in (2{,}4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{58}{3} = (2c^2 - 3c) \cdot 2 \Rightarrow 12c^2 - 18c - 58 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 2784}}{24} = \frac{18 \pm 55{,}75}{24} = \begin{cases} 3{,}07 \\ -1{,}57 \end{cases}$$

Por tanto, $C = 3{,}07 \in (2, 4)$.

4 **Halla el valor medio de $f(x) = x^2 + 3$ en el intervalo (0, 3) y halla el punto en el que se alcanza.**

$$\int_0^3 (x^2 + 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^3 = 18$$

El teorema del valor medio dice que $\exists\ C \in (0, 3)$ tal que

$$\int_0^3 (x^2 + 3)\, dx = (c^2 + 3) \cdot (3 - 0) \Rightarrow 3c^2 + 9 = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

por tanto, como $c \in (0, 3)$, el valor pedido es $c = \sqrt{3}$

5 **Halla el valor medio de $f(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo (0, 2). Halla los puntos en que se alcanzan este valor. ¿Al existir dos puntos donde se alcanza el valor medio, contradice el teorema del valor medio?**

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

El teorema del valor medio dice que $\exists\ C \in (0, 2)$ tal que

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = (-c^2 + 2c) \cdot (2 - 0) \Rightarrow -2c^2 + 4c = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6c^2 - 12c + 4 = 0 \Rightarrow 3c^2 - 6c + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 1{,}58;\ c = 0{,}42$$

Obtenemos dos valores de C, pero éste no contradice el teorema, ya que este teorema garantiza que exista un valor pero no dice que este valor sea único.

6 **Calcula $\int_1^6 f(x)\,dx$ siendo la función f la siguiente:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x} \text{ si } x > 6 \\ x^2 - 34 \text{ si } 3 \le x \le 6 \\ -25 \text{ si } x < 3 \end{cases}$$

$$\int_1^6 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx = \int_1^3 -25\,dx +$$

$$+ \int_3^6 (x^2 - 34)\,dx = \left[-25x\right]_1^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 34x\right]_3^6 =$$

$$= (-50) + (-39) = -89$$

7 **Calcula la siguiente integral definida $\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} |sen\ x|\,dx$.**

$$\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} |sen\ x|\,dx = \int_{-\frac{\Pi}{2}}^{0} -sen\ x\,dx + \int_0^{\frac{\Pi}{2}} sen\ x\,dx =$$

$$= \left[cos\ x\right]_{-\frac{\Pi}{2}}^{0} + \left[-cos\ x\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} = (1 - 0) + (-0 + 1) = 2$$

8 **Calcula las siguientes integrales mediante la interpretación geométrica:**

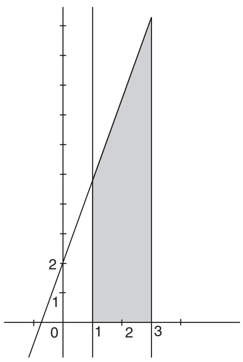
$$\int_{-50}^{50} (x^{33} + x^{21})\,dx \qquad \int_{-\Pi}^{\Pi} sen^5\,(8x^3 + x)\,dx$$

$$\int_{-50}^{50} (x^{33} + x^{21})\,dx = 0$$

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} sen^5\,(8x^3 + x)\,dx = 0$$

Ambas integrales son iguales a cero, pues al ser las funciones impares y simétricas respecto al origen se anulan entre sí las áreas de las regiones que se obtienen.

9 **Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3x + 2$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Comprueba el resultado por métodos geométricos.**



El área del recinto rayado viene dada por:

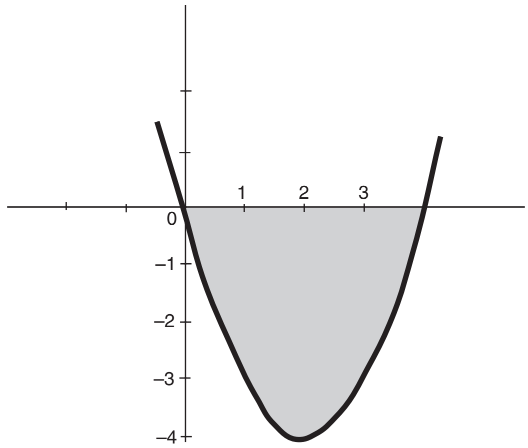
$$\int_1^3 (3x + 2)\,dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = \left(\frac{27}{2} + 6\right) - \left(\frac{3}{2} + 2\right) = 16\,u^2$$

Directamente este recinto es un trapecio y su área vale:

$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h = \frac{11 + 5}{2} \cdot 2 = 16\,u^2$$

Con lo que queda comprobado el resultado anterior.

10 **Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - 4x$ y el eje OX.**

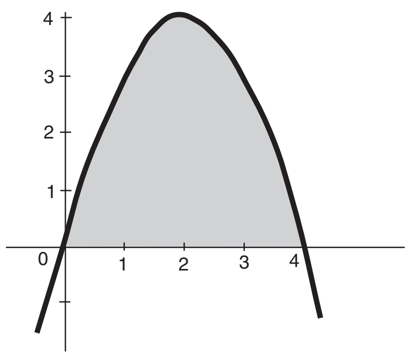


Recinto rayado:

$$\text{Área} = -\int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx = -\left[\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\right]_0^4 = -\left[\frac{64}{3} - 32\right] =$$

$$= \frac{32}{3}\,u^2 = 10{,}7\,u^2$$

11 **Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje OX.**



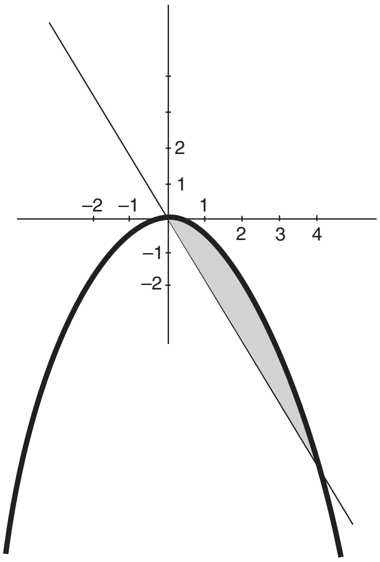
Recinto rayado:

$$\text{Área} = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left[\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} =$$

$$= 10{,}7\,u^2$$

12 **Halla el área del recinto limitado por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = \frac{-1}{2}x^2$.**

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x \\ y = -\dfrac{1}{2}x^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}x^2 = -2x \\ x^2 = 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{array}$$

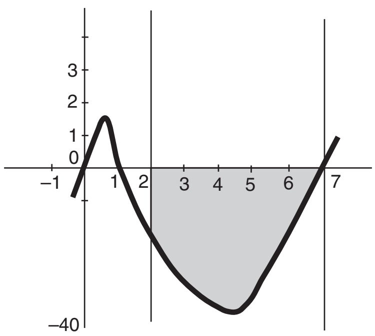


Queremos calcular el área del recinto rayado:

$$\text{Área} = \int_0^4 \left[\left(-\frac{1}{2}x^2\right) - (-2x)\right] dx = \int_0^4 \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 = 16 - \frac{64}{6} = 5{,}3\ u^2$$

13 **Halla el área de la región limitada por la curva $y = x^3 - 8x^2 + 7x$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 7$.**

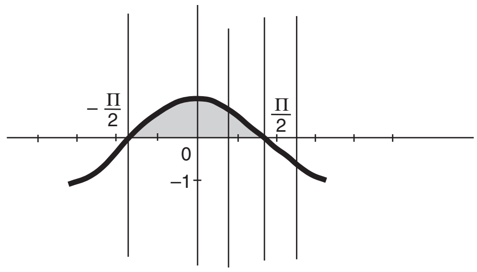


El área pedida es la del recinto rayado.

$$\text{Área} = -\int_2^7 (x^3 - 8x^2 + 7x)\, dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{7x^2}{2}\right]_2^7 =$$

$$= -\left[\left(\frac{2401}{4} - \frac{2744}{3} + \frac{343}{2}\right) - \left(4 - \frac{64}{3} + 14\right)\right] = 139{,}58$$

14 **Halla el área del recinto limitado por la curva $y = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = -\dfrac{\Pi}{2}$ y $x = \dfrac{\Pi}{2}$.**
Calcula también el área del recinto limitado por la misma curva y las rectas $x = \dfrac{\Pi}{4}$ y $x = \dfrac{3\Pi}{4}$



• El área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas $x = -\dfrac{\Pi}{2}$ y $x = \dfrac{\Pi}{2}$ vale:

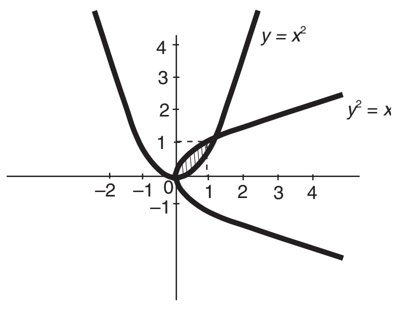
$$\text{Área} = 2\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos x\, dx = 2\left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} = 2\ u^2$$

• El área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas $x = \dfrac{\Pi}{4}$ y $x = \dfrac{3\Pi}{4}$ vale:

$$\text{Área} = 2\int_{\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{2}} \cos x \cdot dx = 2\left[\operatorname{sen} x\right]_{\frac{\Pi}{4}}^{\frac{\Pi}{2}} = 2\left(\operatorname{sen}\frac{\Pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\Pi}{4}\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}59\ u^2$$

15 **Halla el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$, $y^2 = x$.**



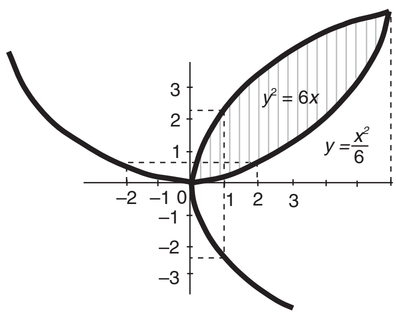
El área pedida es la de la zona rayada y vale:

$$\text{Área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0{,}3\ u^2$$

16 **Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:**

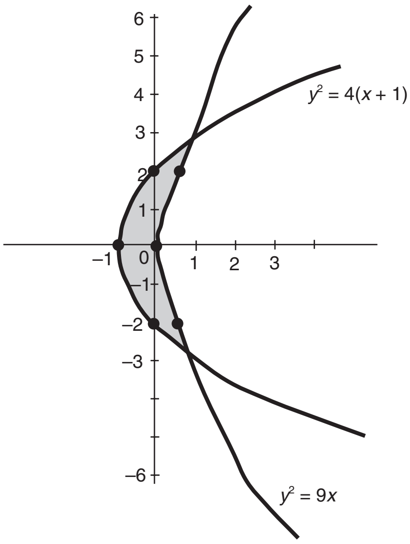
a) $y^2 = 6x$	***b)*** $y^2 = 9x$	***c)*** $y = 6x - x^2$
$x^2 = 6y$	$y^2 = 4(x + 1)$	$y = x^2 - 2x$

a)



Área $= \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \left[\frac{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{18}\right]_0^6 = 12\,u^2$

b)



Las curvas $y^2 = 9x$; $y^2 = 4\,(x + 1)$ se cortan en los puntos de abscisa $x = 0{,}8$ pues:

$$9x = 4\,(x + 1) \Rightarrow x = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

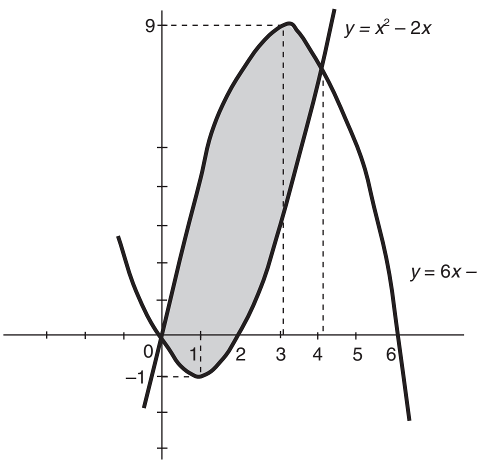
El área pedida es la de la zona rayada y vale:

$$\text{Área}= 2\left[\int_{-1}^{0,8} 2\sqrt{x+1}\;dx - \int_0^{0,8} 3\sqrt{x}\;dx\right] =$$

$$= 2\left[\frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right]_{-1}^{0,8} - 2\left[2\sqrt{x^3}\right]_0^{0,8} =$$

$$= \frac{8\sqrt{1{,}8^3}}{3} - 4\sqrt{0{,}8^3} = 3{,}58\,u^2$$

c)



Estas curvas se cortan en los puntos solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2\ 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & P(0,0) \\ x = 4 & y = 8 & Q(4,8) \end{array}\right.$$

$$\text{Área} = \int_2^0 (x^2 - 2x)\,dx + \int_0^4 (6x - x^2)\,dx - \int_2^4 (x^2 - 2x)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^0 + \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^4 = \left(\frac{-8}{3} + 4\right) +$$

$$+ \left(48 - \frac{64}{3}\right) - \left[\left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right] = \frac{-8}{3} + 4 + 48 - \frac{64}{3} -$$

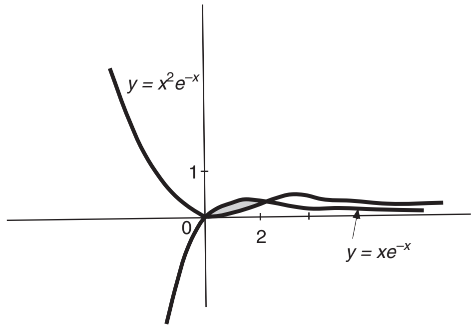
$$- \frac{64}{3} + 16 + \frac{8}{3} - 4 = 64 - \frac{128}{3} = 21{,}3\,u^2$$

Otra forma de hallar el área del recinto buscado:

$$\text{Área} = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = 21{,}3\,u^2$$

17 Determina el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = xe^{-x}$ y $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.



Las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 1$. Calculamos el área de la zona rayada.

$$\text{Área} = \int_0^1 (x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x})\,\mathrm{dx} = \int_0^1 (x - x^2)\,e^{-x}\,dx$$

Resolvemos por el método de integración por partes la integral indefinida:

$$\int (x - x^2)\,e^{-x}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = x - x^2 \Rightarrow du = (1 - 2x)\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

$$I = \int (x - x^2)\,e^{-x}\,dx = -\,(x - x^2)\,e^{-x} - \int -(1 - 2x)\,e^{-x}\,dx =$$

$$= (x^2 - x)\,e^{-x} + \int (1 - 2x)\,e^{-x}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = 1 - 2x \Rightarrow du = -2\,dx \\ dv = e^{-x}\,dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\}$$

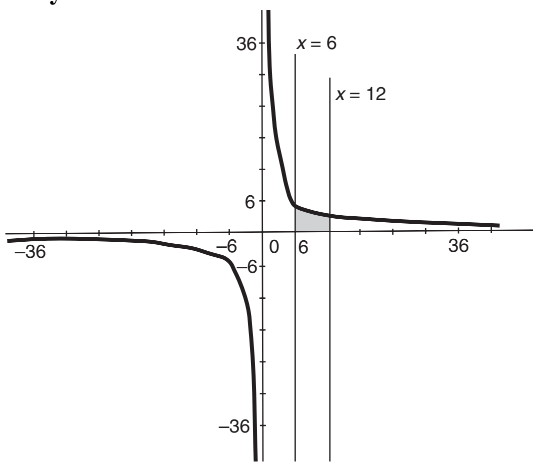
$$I = \int (x - x^2)\,e^{-x}\,dx = (x - x^2)\,e^{-x} - (1 - 2x)\,e^{-x} - \int 2\,e^{-x}\,dx =$$

$$= (x^2 - x)\,e^{-x} - (1 - 2x)\,e^{-x} + 2\,e^{-x} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos permite calcular el área pedida:

$$\text{Área} = \left[(x^2 - x)\,e^{-x} - (1 - 2x)\,e^{-x} + 2\,e^{-x}\right]_0^1 = \frac{3}{e} - 1 = 0{,}1036\,u^2$$

18 **Calcula el área de la región limitada por la hipérbola $x \cdot y = 36$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 6$ y $x = 12$.**

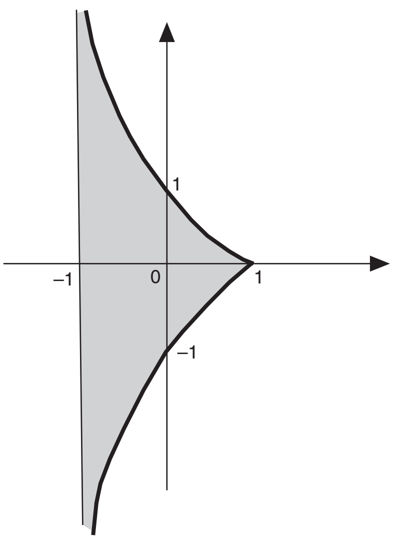


El área del recinto rayado buscado vale:

$$\text{Área} = \int_6^{12} \frac{36}{x}\,dx = \left[36\,ln\,x\right]_6^{12} = 36\,ln\,\frac{12}{6} = 36\,ln\,2 =$$

$$= 24{,}95\,u^2$$

19 **Halla el área limitada por la curva $y^2 = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ y su asíntota.**



$\text{Área} = 2\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx$; Calculamos la integral indefinida:

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx = \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \int \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}}\,dx -$$

$$- \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = arc\ sen\ x - \frac{1}{-2}\int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\,dx =$$

$$= arc\ sen\ x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

Por tanto, la integral definida que nos permite calcular el área vale:

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx = 2\left[arc\ sen\ x + \sqrt{1 - x^2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left[arc\ sen 1 - arc\ sen(-1)\right] = 2\left[\frac{\Pi}{2} - \left(-\frac{\Pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\Pi = 6{,}28\,u^2$$

20 **Demuestra que si f es una función continua en R y par se verifica:**

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$$

¿Se mantiene la igualdad si f es impar?

Hacemos en la primera integral el cambio:
$x = -t \Rightarrow dx = -dt$ y obtenemos:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{-a} -f(-t) \cdot dt = -\int_0^{-a} f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(t)\,dt$$

y haciendo en esta última integral el cambio $t = x \Rightarrow dt = dx$ obtenemos:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(-t)\,dt = \int_{-a}^0 f(x)\,dx$$

• Si la función es impar $f(-t) = -f(t)$ por tanto:

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^{-a} -f(-t)\,dt = \int_0^{-a} f(t)\,dt = -\int_{-a}^0 f(t)\,dt$$

y en esta última integral haciendo $t = x \Rightarrow dt = dx$ obtenemos:

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_{-a}^0 f(t)\,dt = -\int_{-a}^0 f(x)\,dx$$

Por tanto, no se mantiene la igualdad.

21 **Demuestra que si f es continua, en R se verifica:**

$$\int_0^b f(x)\,dx = -\int_0^b f(b - x)\,dx$$

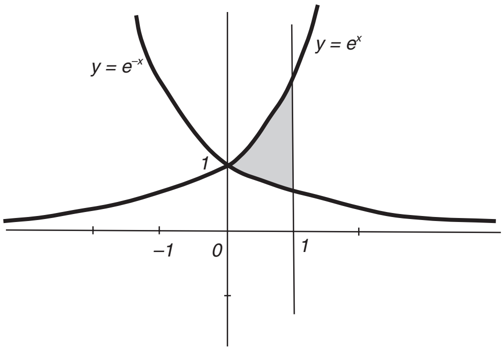
En la primera integral hacemos el cambio $x = b - t \Rightarrow dx = -dt$.

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_b^0 -f(b - t) \cdot dt = -\int_b^0 f(b - t)\,dx = \int_0^b f(b - t)\,dt$$

Haciendo en esta última integral el cambio $t = x \Rightarrow dt = dx$ obtenemos:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(b - t)\,dt = \int_0^b f(b - x)\,dx$$

22 **Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ y $x = 1$.**



El área del recinto rayado vale:

$$Área = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\, dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2 = 1{,}09\ u^2$$

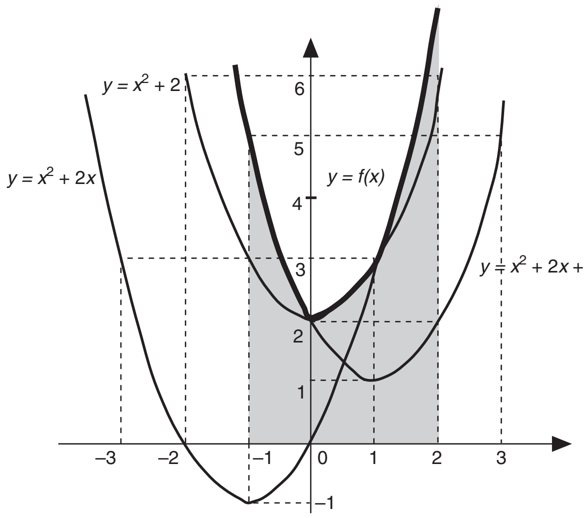
23 **Dibuja la gráfica de la función $f(x) = |x - 1| + |x^2 + |x| + 1|$ y hallar el área del recinto limitado por su gráfica, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.**

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

$$|x^2 + |x| + 1| = x^2 + |x| + 1 = \begin{cases} x^2 + x + 1 \text{ si x} \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \text{ si x} < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 \text{ si } x < 0 \\ x^2 + 2 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 2x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

La gráfica de la función f viene dada por tres trozos de parábolas:



El área rayada viene dada por:

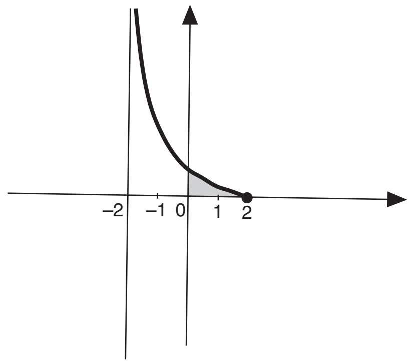
$$Área = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x + 2)\, dx + \int_0^1 (x^2 + 2)\, dx +$$

$$+ \int_1^2 (x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^1 +$$

$$+ \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 = \left[0 - \left(\frac{-1}{3} - 1 - 2\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{3} + 2\right) - 0\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)\right] = \frac{10}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + 3 = 11\ u^2$$

24 **Halla el área del recinto limitado por la curva $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 - x}{2 + x}}$ y el eje OY.**



El área de la zona rayada vale:

$$Área = \int_0^2 \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}\, dx$$

Resolvemos la integral indefinida:

$$\int \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}\, dx = \int \frac{2 - x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx -$$

$$- \int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx = 2 \int \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, dx -$$

$$- \frac{1}{-2} \int (4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\, dx = 2\ arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2} + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$Área = \int_0^2 \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}}\, dx = \left[2\ arc\ sen\frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2}\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \frac{\Pi}{2} - 2 = \Pi - 2 = 1{,}14\, u^2$$

25 **Halla el valor medio de la función $f(x) = lnx$ en el intervalo $(1, e)$ y el punto en el que se alcanza.**

Calculamos $\displaystyle\int_1^e ln\ x\ dx$

Resolvemos la integral indefinida por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\ x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int ln\ x \cdot dx = x\ ln\ x - \int 1\ dx = x\ ln\ x - x + C$$

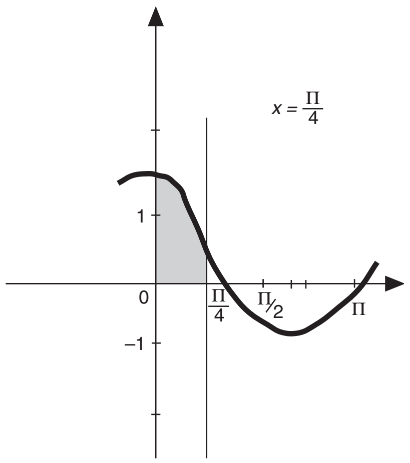
$$\int_1^e ln\ x\ dx = \left[x\ ln\ x - x\right]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

Por el teorema del valor medio $\exists\ c \in (1, e)$ tal que:

$$\int_1^e ln\ x\ dx = ln\ c \cdot (e - 1) \Rightarrow 1 = ln\ c\ (e - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ln\ c = \frac{1}{e - 1} \Rightarrow c = e^{\frac{1}{e-1}} = 1{,}7896 \in (1,\ e)$$

26 Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = cos\ x + \frac{1}{2}\ cos\ 2x$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \frac{\Pi}{4}$.



El área de la región rayada viene dada por:

$$\text{Área} = \int_0^{\frac{\Pi}{4}} \left(cos\ x + \frac{1}{2}\ cos\ 2x\right) dx = \left[sen\ x + \frac{1}{4}\ sen\ 2x\right]_0^{\frac{\Pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \cdot 1\right) - (0 + 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}957\ u^2$$

27 Calcula la integral definida:

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\ dx$$

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \le -1 \text{ o } x \ge 1 \\ -x^2 + 1 \text{ si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\ dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\ dx + \int_{-1}^{1} (-x^2 - 1)\ dx +$$

$$+ \int_1^2 (x^2 - 1)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{-x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{-1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{8}{3} + 2\right)\right] + \left[\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(+\frac{1}{3} - 1\right)\right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = 4$$

28 Demuestra:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1} \int_x^{2x} t\ sen\left(\frac{1}{t}\right) dx = 1$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral, podemos escribir:
$\exists\ C \in (x, 2x)$ de modo que:

$$\int_x^{2x} t\ sen\left(\frac{1}{t}\right) dt = c \cdot sen\left(\frac{1}{c}\right) \cdot (2x - x)$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1} \cdot \int_x^{2x} t \cdot sen\left(\frac{1}{t}\right) dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 1} \cdot c \cdot sen\left(\frac{1}{c}\right) \cdot$$

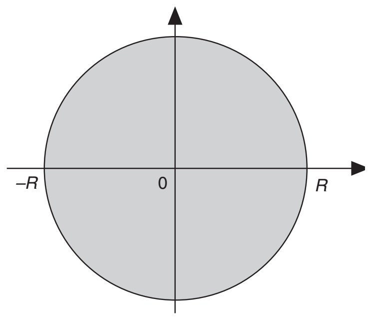
$$\cdot\ x = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ c \to +\infty}} \frac{1}{x + 1} \cdot sen\ (1/c) = 1 \cdot 1 = 1$$

29 Halla, utilizando la integral definida, el área de un círculo de radio R y el área del recinto limitado por la elipse de semiejes a y b.

- El círculo de radio R queda limitado por la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$\text{Área} = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\ dx$$



Calculamos la integral indefinida $\int \sqrt{R^2 - x^2}\ dx$ mediante el cambio de variable

$$x = R \cdot \text{sen}\ t \Rightarrow dx = R \cdot cost \cdot dt$$

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\ dx = \int \sqrt{R^2 - R^2\ sen^2\ t} \cdot R \cdot cos\ t \cdot dt =$$

$$= \int R^2 \cdot cos^2\ t \cdot dt = R^2 \int \frac{1 + cos\ 2\ t}{2}\ dt =$$

$$= R^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{sen\ 2t}{4}\right) + C =$$

$$= R^2 \left(\frac{arc\ sen\frac{x}{R}}{2} + \frac{2\ \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4}\right) + C$$

Haciendo $C =$ O– y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el área del círculo buscado:

$$\text{Área}= 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\; dx =$$

$$= \left[4 R^2 \left(\frac{arc\ sen \frac{x}{R}}{2} + \frac{2 \cdot \frac{x}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}}{4} \right) \right]_0^R =$$

$$= 4 R^2 \left[\left(\frac{\Pi}{4} + 0 \right) - (0 + 0) \right] = \left(\Pi R^2 \right) u^2$$

• La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ encierra un recinto cuya área vale:

$$\text{Área} = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}\; dx$$

Calculamos la integral indefinida $\int \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}\; dx$ por el método de cambio de variable, para ello hacemos $x = a\ sen\ t$ $t \Rightarrow dx = a\ cos\ t\ dt$

$$\int \frac{1}{a} \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2}\; dx = \frac{b}{a} \int \sqrt{a^2 - a^2\ sen^2\ t} \cdot a\ cos\ t\ dt =$$

$$= \frac{b}{a} \int a^2\ cos^2\ t\ dt = ab \int \frac{1 + cos\ 2\ t}{2}\ dt = \frac{ab}{2} \left(t + \frac{sen\ 2t}{2} \right) +$$

$$+ C = \frac{ab}{2} \left(arc\ sen \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, calculamos la integral definida que nos da el área encerrada por la elipse dada:

$$\text{Área} = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 b^2 - b^2 x^2}{a^2}}\; dx =$$

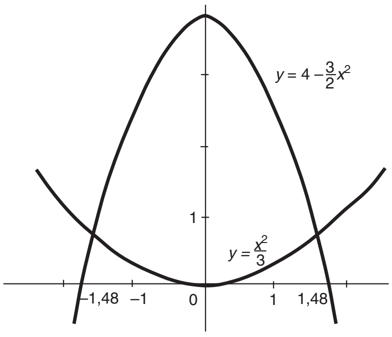
$$= \left[\frac{4\ ab}{2} \left(arc\ sen \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \right]_0^a =$$

$$= 2\ ab \left(\frac{\Pi}{2} + 0 \right) - 2\ ab\ (0 - 0) = (ab \cdot \Pi)\ u^2$$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

30 Halla el área comprendida entre las parábolas

$$y = \frac{x^2}{3} \quad e \quad y = 4 - \frac{3}{2} x^2$$



$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{x^2}{3} \\ y &= 4 - \frac{3}{2} x^2 \end{aligned} \right\} x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{11}} = \pm\ 1{,}48$$

$$\text{Área} = 2 \int_0^{\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{11}}} \left[\left(4 - \frac{3}{2} x^2 \right) - \frac{x^2}{3} \right] dx = 2 \int_0^{\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{11}}} \left(\frac{24 - 11\ x^2}{6} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \left(24x - \frac{11x^3}{3} \right) \right]_0^{\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{11}}} = \frac{1}{3} \left(\frac{48\sqrt{6}}{\sqrt{11}} - \frac{48\sqrt{6}}{3\sqrt{11}} \right) = 7{,}88\ u^2$$

31 Obtén $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 1}$

Resolvemos la integral definida $\int \frac{1}{x^3 + 1}\ dx$ por el método de integración de funciones racionales descomponiendo la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)\ (x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} =$$

$$= \frac{1/3}{x + 1} + \frac{-1/3\ x + 2/3}{x^2 - x + 1}$$

$$\int \frac{1}{x^3 + 1}\ dx = \int \frac{1/3}{x + 1}\ dx + \int \frac{-1/3\ x + 2/3}{x^2 - x + 1}\ dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\ |x + 1| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2x - 1 + 1}{x^2 - x + 1}\ dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1}\ dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\ |x + 1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\ dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x^2 - x + 1}\ dx +$$

$$+ \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1}\ dx = \frac{1}{3}\ ln\ |x + 1| - \frac{1}{6}\ ln\ |x^2 - x + 1| +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}}\ dx = \frac{1}{3}\ ln\ |x + 1| - \frac{1}{6}\ ln\ |x^2 - x + 1| +$$

$$+ \frac{4}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} \right)^2}\ dx = \frac{1}{3}\ ln\ |x + 1| -$$

$$- \frac{1}{6}\ ln\ |x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ arc\ sen \left(\frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ ln\ |x + 1| - \frac{1}{6}\ ln\ |x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\ arc\ sen \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

Haciendo $C = 0$ y aplicando la regla de Barrow, obtenemos la integral pedida:

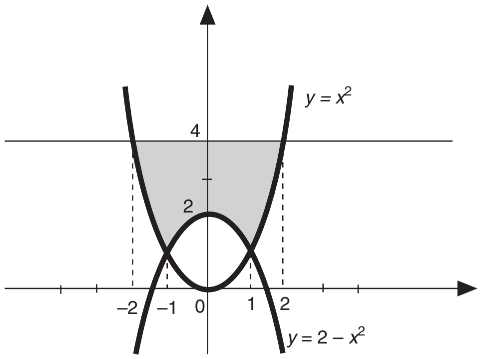
$$\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1}\ dx = \left[\frac{1}{3}\ ln\ |x + 1| - \frac{1}{6}\ ln\ |x^2 - x + 1| + \right.$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\ arc\ sen\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\Bigg]_0^1 = \frac{1}{3}\ ln\ 2 - \frac{1}{6}\cdot 0 +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{3}\ arc\ sen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\ arc\cdot\ sen\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\ ln\ 2 +$$

$$+\frac{2\sqrt{3}}{3}\ arc\ sen\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}94$$

32 **Dibuja la región del plano limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$. Calcular su área.**



La zona rayada es la región de plano limitada por las curvas dadas.

$$\text{Área} = 2\left[\int_0^1 4-(2-x^2)\,dx + \int_1^2 (4-x^2)\,dx\right] =$$

$$= 2\left[2x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{14}{3}+\frac{10}{3} = 8\,u^2$$

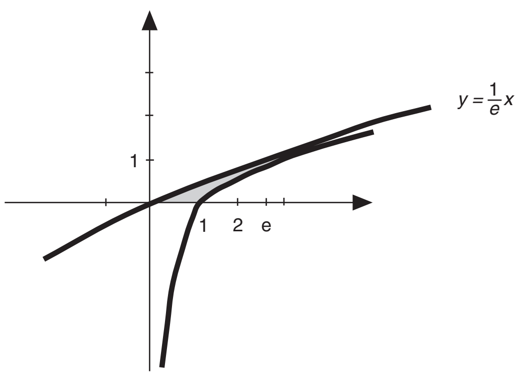
33 **Calcula el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = lnx$, el eje *OX* y la recta tangente a dicha gráfica en el punto $x = e$.**

Ecuación de la recta tangente a $f(x) = lnx$ en el punto $(e, 1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = \frac{1}{e}$$

$$y - 1 = (x - e) \Rightarrow y = \frac{1}{e}\,x \Rightarrow$$

la recta tangente tiene por ecuación $y = \frac{1}{e}\,x$



$$\text{Área} = \int_0^e \left(\frac{1}{e}\,x - ln\ x\right)dx = \left[\frac{x^2}{2\ e} - (x\ ln\ x + x)\right]_0^e =$$

$$= \frac{e^2}{2\ e} - \lim_{x\to 0^+} x\ ln\ x = \frac{e}{2} - \lim_{x\to 0^+}\frac{ln\ x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{e}{2} - \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{e}{2} - 0 = \frac{e}{2}$$

31 **1) Demuestra el teorema del valor medio del cálculo integral: si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces $\exists\ C \in (a, b)$, tal que:**

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)\ f(c)$$

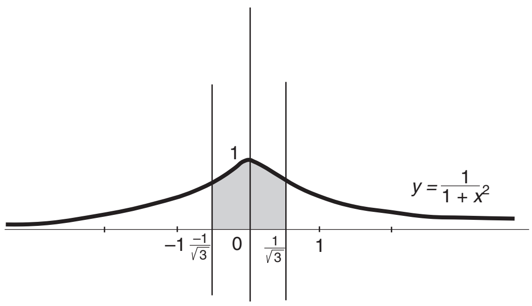
2) Calcula el valor de *C* para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [0, 1].

El apartado (1) es una pregunta teórica que se puede consultar en el libro de texto.
Aplicando este teorema al resolver el apartado (2), obtenemos:

$$\int_0^1 x^2\ dx = c^2\cdot(1-0) \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $c \in (0, 1) \Rightarrow$ el valor buscado es $c = +\frac{1}{\sqrt{3}}$

35 **Calcula el área comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, el eje *OX* y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.**



Hallamos los puntos de inflexión:

$$y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \qquad y'' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{6} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Los puntos de inflexión son: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$

$$\text{Área} = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\left[arc\ tg\ x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\left[\frac{\Pi}{6}-0\right] =$$

$$= \frac{\Pi}{3} = 1{,}047\ u^2$$

36 **1) Haciendo uso de las propiedades de la integral definida, demuestra que:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

2) Como aplicación del resultado anterior, prueba que:

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} ln\,(cos\;x)\,dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} ln\,(sen\;x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sen^2\,x\,dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} cos^2\,x\,dx = \frac{\Pi}{4}$$

1) Haciendo en la primera integral el cambio $x = a + b - t \Rightarrow dx = -dt$, obtenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(a+b-t)\,(-dt) = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt$$

Haciendo en esta última integral el cambio $x = t \Rightarrow dx = dt$, obtenemos la igualdad pedida:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(a+b-t)\,dt = -\int_b^a f(a+b-x)\,dx$$

2) $$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} ln\,(cos\;x)\,dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} ln\left[cos\left(\frac{\Pi}{2} - x\right)\right]dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\Pi}{2}} ln\,(sen\;x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} sen^2\,x\,dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} sen^2\left(\frac{\Pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} cos^2\,x \cdot dx$$

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} cos^2\,x\,dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} \frac{cos\,2x + 1}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{sen\,2x}{2} + x\right)\right]_0^{\frac{\Pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Pi}{2} = \frac{\Pi}{4}$$

37 Halla los máximos y mínimos en el intervalo [2, 10] de la función:

$$F(x) = \int_1^x ln\,(t)\,dt\;cos\quad x > 1$$

Hallamos los máximos y mínimos:
$F'(x) = lnx = 0 \Rightarrow x = 1$
$F''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x)$ tiene un mínimo en el punto $x = 1$; Pero como $x = 1$ no pertenece al intervalo [2, 10], estudiemos la monotonía.
$F'(x) = lnx > 0\ \forall\ x \in [2, 10] \Rightarrow F(x)$ es estrictamente creciente en [2, 10], por tanto $F(x)$ tiene un mínimo absoluto en $x = 2$ y un máximo absoluto en $x = 10$.

$$F(x) = \int_1^x ln\,t\,dt = \left[t\,ln\,t - t\right]_1^x = x\,ln\,x - x + 1$$

En $x = 2$ tiene un mínimo absoluto que vale
$F(2) = 2\,ln\,2 - 2 + 1 = 0{,}39$
En $x = 10$ tiene un máximo absoluto que vale
$F(10) = 10\ln 10 - 10 + 1 = 14{,}02$

38 Calcula el valor de a sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ es 36.

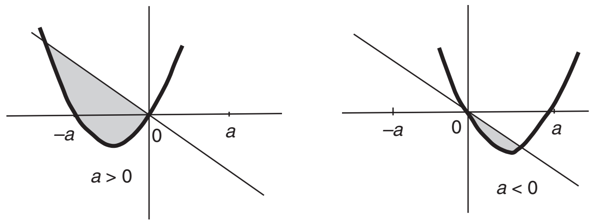
La parábola y la recta se cortan en los puntos:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + ax \\ y + x = 0 \end{array}\right\} x^2 + ax = -x \Rightarrow x^2 + x\,(a+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0;\ y = 0 \\ x = -a - 1;\ y = a + 1 \end{cases}$$

$$\text{Área pedida} = \left|\int_0^{-a-1} \left[-x - (x^2 + ax)\right] dx\right|$$

Ponemos el valor absoluto, pues el área puede ser diferente según sea a > 0 o a < 0.



$$A = \left|\int_0^{-a-1} \left[-x - (x^2 + ax)\right] dx\right| = \left|\left[\frac{-x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}\right]_0^{-a-1}\right| =$$

$$= \left|-\frac{(-a-1)^2}{2} - \frac{(-a-1)^3}{3} - \frac{a\,(-a-1)^2}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{-a^3 - 3a^2 - 3a - 1}{6}\right| = \left|-\frac{(a+1)^3}{6}\right|$$

Como el área es 36, entonces:

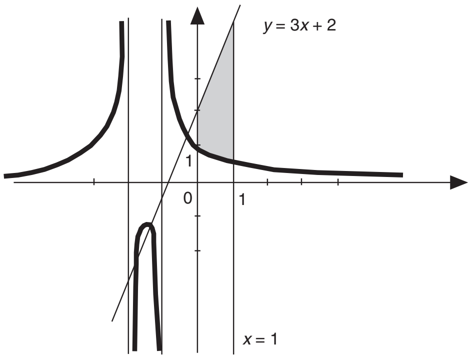
$$\left|\frac{-(a+1)^3}{6}\right| = 36 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-(a+1)^3}{6} = 36 \Rightarrow a + 1 = -6 \Rightarrow a = -7 \\ \dfrac{-(a+1)^3}{6} = -36 \Rightarrow a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5 \end{cases}$$

Las soluciones son: $\boxed{a = -7}$ o $\boxed{a = 5}$

39 Calcula el área del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 3x + 2$ y la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$y = \frac{2}{(x+2)\,(x+1)}$$



El área de la zona rayada viene dada por:

$$\text{Área} = \int_0^1 (3x + 2) - \left(\frac{2}{x^2 + 3x + 2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(3x + 2 - \frac{2}{x + 1} + \frac{2}{x + 2}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} + 2x - 2\ ln\,|x + 1| + 2\ ln\,|x + 2|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} + 2 - 4\ ln\ 2 + 2\ ln\ 3 = \frac{7}{2} + ln\ \frac{9}{16} = 2{,}92$$

40 Determina en función de $b > 1$ el valor de la integral:

$$\int_0^b |x - 1|\ cos\ x\ dx$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \geq 1 \\ -x + 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^b |x - 1| \cdot cos\ x \cdot dx = \int_0^1 -(x - 1) \cdot cos\ x \cdot dx +$$

$$+ \int_1^b (x - 1) \cdot cos\ x \cdot dx = \int_0^1 -(x - 1) \cdot cos\ x \cdot dx +$$

$$+ \int_1^b (x - 1) \cdot cos\ x \cdot dx$$

Calculamos la integral indefinida por el método de integración por partes:

$$I = \int (x - 1) \cdot cos\ x \cdot dx$$

$$\left.\begin{aligned} u = x - 1 \Rightarrow du = dx \\ dv = cos\ x \cdot dx \Rightarrow v = sen\ x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int (x - 1) \cdot cos\ x \cdot dx = (x - 1)\ sen\ x - \int sen\ x \cdot dx =$$

$$= (x - 1) \cdot sen\ x + cos\ x + C$$

$$\int_0^b |x - 1| \cdot cos\ x \cdot dx = -\left[(x - 1)\ sen\ x + cos\ x\right]_0^1 +$$

$$+ \left[(x - 1)\ sen\ x + cos\ x\right]_1^b = -cos\ 1 + 1 +$$

$$+ \left[(b - 1)\ sen\ b + cos\ b - cos\ 1\right] = 1 + (b - 1)\ sen\ b +$$

$$+ cos\ b - 2\ cos\ 1$$