Actividades iniciales

1. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son:

$$a)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Haciendo ceros escalonamos las matrices, obteniendo:

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, luego el rango es 2.

$$b)\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 2

$$c)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 - F_4 \to F_4]{F_1 - F_3 \to F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango es 3.

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 17 & 2 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 74 & 50 & 6 \end{pmatrix}$$

El rango es 4.

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad e)\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la definición, se obtienen los siguientes resultados:

a) –2
b) 22
c) $a^2 + 25$
d) 23
e) $a^2 - b^2$
f) 0
g) $2 - 2a^2$

2 Calcula los determinantes de las matrices que siguen utilizando la regla de Sarrus.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad e)\ \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$$

$$f)\ \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la regla de Sarrus, se obtiene:

a) –2
b) 2

c) 79
d) $a^3 - 3a + 2$
e) $-m^2 - 4m + 1$
f) $m^3 + 3m^2 + 3m + 2$

3 **Encuentra el número de inversiones que existen en las sguientes permutaciones de números naturales del orden que se indica:**
***a)* orden 4: 1243, 3142 y 1324.**
***b)* orden 5: 13542, 53241 y 13254.**
***c)* orden 6: 213654, 341652 y 231645.**

a) La permutación 1234 no presenta inversiones.
La permutación 3142 tiene 3 inversiones.
La permutación 1324 tiene una inversión.
b) La permutación 13524 presenta 3 inversiones.
La permutación 53241 tiene 7 inversiones.
La permutación 13254 tiene 2 inversiones.
c) La permutación 213654 presenta 4 inversiones.
La permutación 341652 tiene 7 inversiones.
La permutación 231645 tiene 4 inversiones.

4 **Halla el signo de los términos que siguen pertenecientes al desarrollo de un determinante de orden 5.**
a) $a_{25} \cdot a_{51} \cdot a_{44} \cdot a_{13} \cdot a_{32}$
b) $a_{51} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{14}$
c) $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{45} \cdot a_{51}$
d) $a_{45} \cdot a_{54} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

a) El término a_{25} a_{51} a_{44} aa_{13} a_{32} es el mismo que a_{13} a_{25} a_{32} a_{44} a_{51} que se corresponde con la permutación de orden cinco: 35241. Ésta tiene siete inversiones, por lo que es una permutación impar. Al término anterior le corresponde un signo menos.
b) De forma análoga al caso anterior, la permutación es 42531, que posee siete inversiones y también le corresponde un signo menos.
c) A este término le corresponde la permutación 23451, que tiene cuatro inversiones y le corresponde un signo más.
d) En este caso la permutación es 21354, que tiene dos inversiones y le corresponde un signo más.

5 **Prueba sin desarrollar que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:**

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{pmatrix}$$

a) Sumamos la segunda y tercera columna y el resultado lo colocamos en la tercera columna. De la tercera columna sacamos factor común a + b + c. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{pmatrix} = (a+b+c)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales.

b) Sumamos la segunda y tercera columna y el resultado lo colocamos en la segunda columna. De la primera sacamos factor común *a* y de la segunda *b + c + d*. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c+d & b \\ a & b+c+d & c \\ a & b+c+d & d \end{pmatrix} = a(a+b+c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales y, por tanto, es nulo.
c) Multiplicamos (y dividimos) la primera fila por a, la segunda por b y la tercera por c. Sacamos factor común abc de la primera columna y dos de la segunda. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{pmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{pmatrix} abc & 2 & a^2 \\ abc & 2 & b^2 \\ abc & 2 & c^2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & c^2 \end{pmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales.

6 **Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11.**

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} \quad c)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

a) Puede observarse que los números 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados en la tercera columna. Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \cdot 11 \\ 1 & 9 & 11 \cdot 18 \\ 5 & 0 & 11 \cdot 46 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$$

b) Procediendo de manera análoga,

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1221 & 9625 & 1111 & 3839 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 11 \cdot 111 & 11 \cdot 875 & 11 \cdot 101 & 11 \cdot 349 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 111 & 875 & 101 & 349 \end{vmatrix}$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3014 \\ 9 & 7 & 2 & 9724 \\ 2 & 3 & 5 & 2354 \\ 4 & 0 & 5 & 4059 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \cdot 274 \\ 9 & 7 & 2 & 11 \cdot 884 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \cdot 214 \\ 4 & 0 & 5 & 11 \cdot 369 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 274 \\ 9 & 7 & 2 & 884 \\ 2 & 3 & 5 & 214 \\ 4 & 0 & 5 & 369 \end{vmatrix}$$

7 **Comprueba que el determinante A_1 vale 0 y que el determinante A_2 es divisible por 5, sin calcularlos, a partir de las propiedades de los determinantes, siendo**

$$A_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{-8} & \mathbf{25} & \mathbf{40} \\ \mathbf{2/5} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{27} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

En el caso A_1, multiplicamos y dividimos la primera columna por –5, después sacamos factor común $\frac{1}{5}$ y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8\cdot\frac{(-5)}{(-5)} & 25 & 40 \\ 2/5\cdot\frac{(-5)}{(-5)} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 40 & 25 & 40 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante es nulo al tener dos columnas iguales.

En el caso A_2, multiplicamos la segunda columna por 2 y le sumamos la tercera colocando el resultado en la tercera columna. Podemos sacar factor común 5.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 20 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5\cdot 1 \\ 4 & 7 & 5\cdot 4 \\ 6 & 3 & 5\cdot 3 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

8 **¿Cómo varía un determinante de orden tres si a cada columna se le suma la columna anterior y a la primera se le suma la última?¿Y si el determinante es de orden cuatro?**

En ambas situaciones, el determinante tiene el mismo valor que el determinante de partida.

9 ***a)* La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.**
***b)* La matriz A verifica que $AA^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.**
***c)* Si A es una matriz cuadrada de orden cuatro, ¿qué relación existe entre det (A) y det (kA)?**

a) Utilizando la propiedad $\det(A\cdot B) = detA\cdot detB$, se tiene:
$det(A^2) = det(A\cdot A) = det(A)\cdot det(A) = (det(A))^2$.
Por tanto, $(det(A))^2 = det(A) \Rightarrow (det(A))^2 - det(A) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow det(A)\ (det(A) - 1) = 0$.
Luego, $det(A) = 0$ o $det(A) = 1$

b) Teniendo en cuenta las propiedades $det(A) = det(A^t)$ y $det(AB) = det(A)\cdot det(B)$,
se obtiene:
$det(AA)^t = detI \Rightarrow (det(A))^2 = 1 \Rightarrow det(A) = \pm 1$

c) La relación pedida es $det(kA) = k^4\ det(A)$

10 **Para los determinantes**

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \quad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

***a)* Halla los menores complementarios de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12}, cuando existan.**
***b)* Halla los adjuntos de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12}, cuando existan.**

a) Atendiendo a la definición de menor complementario, se obtiene:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \qquad \alpha_{11} = b \qquad \alpha_{11} = \begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$= b\ (1 - c - d)$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2 \qquad \alpha_{23} \text{ no existe} \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ -a & b & d \\ a^2 & b & 0 \end{vmatrix} =$$
$= -2abd$

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2 \qquad \alpha_{32} \text{ no existe} \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$= 2a^2cd + 2ad$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = ab - b^2 \qquad \alpha_{12} = a \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$= -a\ (1 + c + d)$

b) Atendiendo a la definición de adjunto, se obtiene:

$A_{11} = a^2 + b^2$	$A_{11} = b$	$A_{11} = b\ (1 - c - b)$
$A_{23} = b^2 - ab$	A_{23} no existe	$A_{23} = 2abd$
$A_{32} = b^2 - ab$	A_{32} no existe	$A_{32} = -2a^2cd - 2ad$
$A_{12} = b^2 - ab$	$A_{12} = -a$	$A_{12} = a\ (1 + c + d)$

11 **Calcula los adjuntos de los elementos de la tercera columna de** $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} & a & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & b & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7} & c & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & d & \mathbf{6} \end{vmatrix}$

Obtenemos:

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 170$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -170$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 40$$

$$A_{34} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = -55$$

12 Halla las matrices adjuntas de las matrices:

$$a)\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & c & b \\ \mathbf{1} & a & c \\ \mathbf{1} & b & c \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Las matrices adjuntas son:

$$a)\ \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} -20 & -7 & 25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} ac-bc & 0 & b-a \\ b^2-c^2 & c-b & c-b \\ c^2-ab & b-c & a-c \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13 Encuentra una respuesta razonada a las siguientes cuestiones:

a) **En un determinante realizamos una cierta permutación de filas. ¿Qué podemos decir del valor del nuevo determinante obtenido?**

b) **Se sabe que $det(A) = 5$, y que A es una matriz de orden dos. ¿Cuánto vale $det(3A)$?**

c) **Dos matrices A y B son inversas. Si $det(A) = 3$, ¿cuánto vale $det(B)$?**

d) **Si A es una matriz cuadrada de orden 3, ¿cuánto vale el determinante de la matriz $Adj(A)$?**

a) Si el número de permutaciones de filas es par, el valor del determinante es el mismo y si es impar, el valor del determinante cambia de signo.

b) El valor de $det(3A) = 3^2 \cdot det(A)$, luego $det(3A) = 45$.

c) El determinante buscado vale 1/3.

d) Si a es una matriz cuadrada de orden 3, se cumple:

$$A \cdot (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} det\,A & 0 & 0 \\ 0 & det\,A & 0 \\ 0 & 0 & det\,A \end{pmatrix} \Rightarrow det\,[A \cdot (Adj(A))^t] =$$

$$= (det(A))^3 \Rightarrow det(A) \cdot det(\mathrm{Adj}(A)) = (det(A))^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow det(Adj(A)) = det(A)^2$$

14 Calcular los determinantes:

$$a)\ \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & x & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & x & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & x & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & x \end{vmatrix}$$

a) Haciendo ceros en la primera columna se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 15 & -13 & 24 \\ 0 & 1 & -10 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -13 & 24 \\ 1 & -10 & 7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -295$$

b) Haciendo ceros en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1+x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} = (1+4)^4$$

15 Comprueba que las siguientes igualdades son verdaderas:

$$a)\ \begin{pmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{pmatrix} = x^2\,(x+a+b+c)$$

$$b)\ \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} = (a+b+c)^3$$

$$c)\ \begin{pmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{pmatrix} = 4\,(a+b)\,(a+c)\,(b+c)$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{pmatrix} = x^2z^2$$

$$a)\ \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} x^2\,(x+a+b+c)$$

(1) Hemos sumado todas las columnas colocando el resultado en la primera.
(2) Hemos restado, de las filas segunda y tercera, la primera.
(3) Se ha desarrollado el determinante.

$$b)\ \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$\underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & a+b+c & 0 \\ 2c & 0 & a+b+c \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (a+b+c)^3$$

(1) Hemos sumado todas las filas colocando el resultado en la primera.
(2) Hemos restado, de la primera fila, la segunda y la tercera.
(3) Se ha desarrollado el determinante.

c) Efectua de forma cuidadosa los dos miembros de la igualdad y comprueba que ambos conducen a la misma expresión.

$$d)\ \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & -z & 0 \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=} x \begin{vmatrix} -x & -z & 0 \\ 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \\ 0 & z & z \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} x^2z^2$$

(1) La fila primera menos la segunda a la primera.
La fila segunda menos la tercera a la segunda.
La fila tercera menos la cuarta a la tercera.
(2) Desarrollando por la primera columna.
(3) Aplicando la regla de Cramer y operando.

16 Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **= 5, calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:**

$$a)\ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a)\ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2\cdot 3/2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$b)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$c)\ \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2-F_1\to F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

17 Calcula el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{log}\ \mathbf{3} & \boldsymbol{log}\ \mathbf{30} & \boldsymbol{log}\ \mathbf{300} \\ (\boldsymbol{log}\ \mathbf{3})^2 & (\boldsymbol{log}\ \mathbf{30})^2 & (\boldsymbol{log}\ \mathbf{300})^2 \end{vmatrix}$$

Es un determinante de Vandermonde de orden tres, del tipo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

Según lo anterior, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ log\ 3 & log\ 30 & log\ 300 \\ (log\ 3)^2 & (log\ 30)^2 & (log\ 300)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (log\ 300 - log\ 30)\,(log\ 300 - log\ 3)\,(log\ 30 - log\ 3) =$$

$$= log\ \frac{300}{30} \cdot log\ \frac{300}{3} \cdot log\ \frac{30}{3} = log\ 10 \cdot log\ 100 \cdot log\ 10 =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

18 Obtén, simplificado, el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{abc} & \boldsymbol{-ab} & \boldsymbol{a^2} \\ \boldsymbol{-b^2c} & \boldsymbol{2b^2} & \boldsymbol{-ab} \\ \boldsymbol{b^2c^2} & \boldsymbol{-b^2c} & \boldsymbol{3abc} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ bc & 0 & 2b \end{vmatrix} \underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=} 2\,a^2b^5c$$

(1) Hemos sacado factor común a de la tercera columna, b de la segunda y bc de la primera.
(2) La suma de la primera y segunda columna a la segunda. La diferencia de la primera y la tercera columna a la tercera.
(3) Desarrollando por la diagonal principal.

19 **Resuelve las ecuaciones:**

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\textbf{c)}\ \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{d)}\ \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$$

$$a)\ \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1-x \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = .$$

$$= x\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = x^4 - x^3$$

$x^4 - x^5 = 0 \Rightarrow x^3 (x - 1) = 0$. Las soluciones son $x = 0$ y $x = 1$.

$$b)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^4 - 1$$

Las soluciones de la ecuación $x^4 - 1 = 0$ son los números complejos 1, –1, i, $-i$.

$$c)\ \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 3x-1 & -1 & x & x \\ 3x-1 & x & -1 & x \\ 3x-1 & x & x & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (3x-1)\,(x+1)^3$$

Las soluciones de $(3x - 1)\,(x + 1)^3 = 0$ son $x = 1/3$ y $x = -1$

$$d)\ \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ 0 & a-x & b-c & c-b \\ 0 & a-c & b-x & c-a \\ 0 & a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} a-x & b-c & c-b \\ a-c & b-x & c-a \\ a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} a-x & a+b-c-x & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} c-x & 0 & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+b+c)\,(a+b-c-x)\,(a+c-b-x)\,(b+c-a-x)$$

Las soluciones de la ecuación son:
$x = -a - b - c$
$x = a + b - c$
$x = a - b + c$
$x = -a + b + c$

20 **Calcula las matrices inversas de las sigueientes matrices:**

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\textbf{d)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices inversas buscadas son:

$$a)\ \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa si ad – bc es distinto de cero. En ese caso la matriz buscada es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 10/130 & 20/130 & 6/130 \\ -10/130 & -20/130 & 20/130 \\ 25/130 & -15/130 & -6/130 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

21 Determina según los valores de *m* el rango de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & m \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & m \end{pmatrix}$

a) Si $m = -6$ el rango es dos y si $m \neq -6$, el rango es tres.
b) Si $m = 1$, el rango es uno.
Si $m = -2$, el rango es dos.
Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, el rango es tres.
c) Si $m = 3$, el rango es tres.
Si $m \neq 3$, el rango es cuatro.
d) Si $m = 10$, el rango es tres.
Si $m \neq 10$, el rango es cuatro.

22 Si *A* es una matriz de orden *n* tal que $det(A) = 2$, calcula $det\,(MAM^{-1})$, $det(5A)$ y $det(2A^{-1})$.

Los determinantes pedidos son:

- $det\,(MAM^{-1}) = detM \cdot detA \cdot det(M^{-1}) = detM \cdot detA \cdot \dfrac{1}{detm} =$ $= detA = 2$
- $det(5A) = 5^n \cdot det(A) = 5^n \cdot$
- $det(2A^{-1}) = 2^n\, det(A^{-1}) = 2^n \cdot \dfrac{1}{det\ A} = 2^n \cdot \dfrac{1}{2} = 2^{n-1}$

23 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

***a)* Calcula A^{-1}. *b)* Resuelve la ecuación $det(A^{-1} - xI) = 0$.**

a) El determinante de la matriz A es $det(A) = -1$.
La matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La ecuación es $\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = 0.$

Desarrollando el determinante, obtenemos: $(1 - x)\,(1 + x)^2 = 0$.
Las soluciones de la ecuación son x = 1 y x = -1.

24 ¿Para qué valores del parámetro no es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$?

Al ser $detA = -19a + 57$, este determinante se anula para $a = 3$.
Para este valor de a la matriz A no es invertible.

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

25 Calcula el valor de los siguientes determinantes :

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$ ***e)*** $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3x+3 & x & x & x \\ 3x+3 & 3 & x & x \\ 3x+3 & x & 33 & x \\ 3x+3 & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$$\underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 3x+3 & x & x & x \\ 0 & x-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3x+3)(x-3)^3$$

(1) Sumando todas las columnas y el resultado a la primera.
(2) Restando de todas las filas la primera.
(3) Desarrollando.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 2$

(1) La diferencia de las dos primeras filas a la segunda fila.
(2) Desarrollando por la primera columna.
(3) Utilizando la regla de Cramer.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, al tener dos columnas iguales.

d) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ 0 & a & b-c & c-b \\ 0 & a-c & b & c-a \\ 0 & a-b & b-a & c \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a & b-c & c-b \\ a-c & b & c-a \\ a-b & b-a & c \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b+c & b-c & a+b-c \\ 0 & b & a+b-c \\ a-b+c & b-a & 0 \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} a-b+c & -c & 0 \\ 0 & b & a+b-c \\ a-b+c & b-a & 0 \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c)(a+b-c) \begin{vmatrix} a-b+c & -c \\ a-b+c & b-a \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

e) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ a+4 & 1+a & 1 & 1 \\ a+4 & 1 & 1+a & 1 \\ a+4 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a+4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3\,(a+4)$

26 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-x} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{x}\mathbf{+10} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \mathbf{= 0}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-4} \end{vmatrix} \mathbf{= 0}$

a) Desarrollando el determinante, obtenemos: $2x^2 + 16x - 12 = 0$
Las soluciones son $x = -8 + \sqrt{22}$ y $x = -8 - \sqrt{22}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 0 & 2x+2 & -1 & 3 \\ 0 & 3x-4 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+2 & -1 & 3 \\ 3x-4 & -6 & 9 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix}$

$= -9x^2 + 6x + 73$

Las soluciones de $9x^2 - 6x - 73 = 0$ son $x = 3{,}38$ y $x = -2{,}53$.

27 **Supongamos que c_1, c_2, c_3 y c_4 son las cuatro columnas de una matriz cuadrada *A*, cuyo determinante vale 3. Calcula razonadamente:**
***a)* El determinante de la matriz inversa de *A*.**
***b)* El determinante de la matriz 2*A*.**
***c)* El determinante de una matriz cuyas columnas son: $2c_1 - c_3$, c_4, $5c_3$ y c_2**

a) Si el determinante de la matriz *A* es 3, el de su inversa es 1/3.
b) $det(2A) = 2^4\, det(A) = 2^4 \cdot 3 = 48$.
c) $det(2c_1 - c_3, c_4, 5c_3, c_2) = det(c_1, c_4, 5c_3, c_2) =$
$= -det(c_1, c_2, 5c_3, c_4) = -5det(c_1, c_2, c_3, c_4) = -5 \cdot 3 = -15$

28 **Prueba que se verifica la igualdad**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{sen\ a} & \boldsymbol{cos\ a} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{sen\ b} & \boldsymbol{cos\ b} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{sen\ c} & \boldsymbol{cos\ c} \end{vmatrix} = \boldsymbol{sen\,(b-c) + sen\,(c-a) + sen\,(a-b)}$$

El determinante es:

$\begin{vmatrix} 1 & sen\,a & cos\,a \\ 1 & sen\,b & cos\,b \\ 1 & sen\,c & cos\,c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & sen\,a & cos\,a \\ 0 & sen\,a - sen\,b & cos\,a - cos\,b \\ 0 & sen\,a - sen\,c & cos\,a - cos\,c \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} sen\,a - sen\,b & cos\,a - cos\,b \\ sen\,a - sen\,c & cos\,a - cos\,c \end{vmatrix} =$

$= (sen\,a - sen\,b)\,(cos\,a - cos\,c) - (sen\,a - sen\,c)\,(cos\,a - cos\,b) =$
$= sen\,a\,cos\,a - sen\,a\,cos\,c - sen\,b\,cos\,a + sen\,b\,cos\,c -$
$- sen\,a\,cos\,a + sen\,a\,cos\,b + sen\,c\,cos\,a - sen\,c\,cos\,b =$
$= (sen\,b\,cos\,c - sen\,c\,cos\,b) + (sen\,c\,cos\,a - sen\,a\,cos\,c) +$
$+ (sen\,a\,cos\,b - sen\,b\,cos\,a) = sen\,(b-c) + sen\,(c-a) +$
$+ sen\,(a-b)$.

29 **Calcula los valores de *t* para los cuales el siguiente determinante**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \boldsymbol{t} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-t} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

toma valores positivos. Calcula el mayor valor que alcanza.

El valor del determinante es $t^2 - 3t - 4$.
Este determinante toma valores positivos en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(4, +\infty)$. No existe el máximo valor buscado.

30 **Responde a las siguientes cuestiones:**

a) **Si A es una matriz cuadrada de orden n, A^t su traspuesta y A^{-t} su inversa. ¿Qué relaciones tienen los determinantes $|A|$, $|A^t|$ y $|A^{-1}|$? ¿Por qué?**

b) **Si el determinante de una matriz cuadrada de orden n vale D, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene multiplicando por 5 todos los elementos de la anterior?**

c) **Todos los elementos de una matriz cuadrada de orden n se multiplican por –1. ¿Cómo queda afectado el valor de su determinante?**

a) $|A^t| = |A|$, ya que, según la definición de determinante, los términos del desarrollo del determinante pueden ordenarse de igual forma atendiendo a las filas o a las columnas.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ya que al ser $A \cdot A^{-1} = I$, tomando determinantes, se obtiene la relación anterior.

b) El valor es $5^n D$. Este hecho es debido a la propiedad que dice: Si los elementos de una fila (columna) de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

c) Debido a la propiedad anterior, el determinante queda multiplicado por $(-1)^n$. Es decir, será el mismo valor si n es par y valor opuesto si n es impar.

31 **Calcula las matrices inversas de las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -4/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ 1/3 & -2/3 & -1/2 \\ 1/3 & -5/3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

32 **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$$

averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m = 2$.

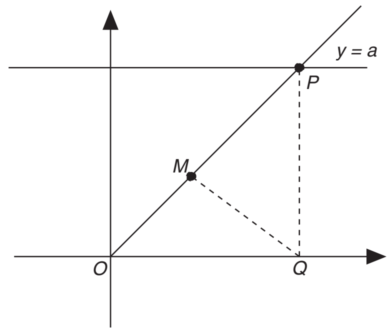
El determinante de la matriz es $det(A) = m^2 + 4m - 3$. Los valores para los cuales la matriz A tiene inversa son los valores distintos de las soluciones de la ecuación $m^2 + 4m - 3 = 0$.

Para $m = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

y su inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/9 & -1/9 & 2/9 \\ 4/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$

Resolución de problemas

1. LUGAR GEOMÉTRICO. Sobre la recta $y = a$ se considera un punto variable P. Llamamos Q a la proyección del punto P sobre el eje OX. Determina el lugar geométrico del punto M proyección de Q sobre la recta OP.



La recta OP es: $y = mx \Rightarrow$ el punto P tiene de coordenadas $P\left(\frac{a}{m}, a\right)$. Luego el punto Q tiene de coordenadas $Q\left(\frac{a}{m}, 0\right)$ y el punto M es el punto de intersección de la recta $OP \equiv y = mx$, y la recta perpendicular a ésta pagando por $Q \equiv m^2y + mx = a,$ por tanto:

$$\left.\begin{matrix} y = mx \\ m^2 + mx = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{a}{m^3 + m} \qquad y = \frac{am}{m^3 + m}$$

Luego el punto M tiene dos coordenadas:

$$x = \frac{a}{m^3 + m} \qquad y = \frac{am}{m^3 + m}$$

La ecuación del lugar geométrico es: $\boxed{y^3 + x^2y - x^3a = 0}$

2. PIRÁMIDES DE BOLAS. Un mago apila bolas, todas iguales, para formar dos pirámides tetraédricas. De pronto se da cuenta de que juntando las bolas de ambas pirámides puede formar una sola pirámide tetraédrica mayor. ¿Cuál es el mínimo número de bolas de que tendría que disponer el mago inicialmente?

Al construir pirámides tetraédricas de bolas aparecen los números tetraédricos:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...

que forman una progresión geométrica de 3er orden de término general $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

- Si las dos pirámides son iguales, el mínimo número es 20 bolas, con lo que formaría una pirámide tetraédrica de arista 4 a partir de dos tetraédricas de arista 3.
- Si las pirámides iniciales no son iguales, el número mínimo de bolas es 680, número obtenido al sumar las bolas de dos pirámides tetraédricas de aristas 8 y 14 y bolas 120 y 560.

La nueva pirámide tetraédrica formada por 680 bolas tiene de arista 15, pues

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 680 \Rightarrow n = 15$$