## Actividades iniciales

**1. Determina las ecuaciones de las rectas del plano perpendicular y paralela a la recta de ecuación $4x - 3y + 6 = 0$ y que pasan por el punto (2, 1).**

La recta $4x - 3y + 6 = 0$ tiene de pendiente $m = 4/3$. Luego, las rectas pedidas son:

- paralela $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2) \Rightarrow 4x - 3y - 5 = 0$
- perpendicular $y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0$

**2. Halla la distancia del punto $P$ (2, –3) a la recta de ecuación $3x - 4y - 3 = 0$.**

La distancia viene dada por la expresión:

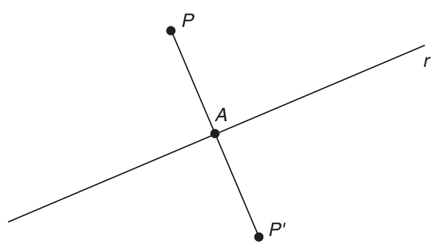
$$d(P, r) = \frac{|3(2) + (-4)(-3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

**3. Hallar la distancia entre las rectas paralelas $r$: $2x + 3y - 5 = 0$ y $s$: $2x + 3y + 8 = 0$.**

Calculamos la distancia del punto (1,1) de la recta r, a la recta s.

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{15}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} = 3{,}61.$$

**4. Halla el punto simétrico de $P$ (3, 2) respecto de la recta $2x + y - 3 = 0$.**




Calculamos el punto $A$ como intersección de la recta dada y la perpendicular a ésta que pasa por $P$.
Las coordenadas del punto $A$ son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -1 \end{cases}. \text{ Luego } A\ (1, 1)$$

El punto $P'$ $(x', y')$ simétrico de $P$ tiene por coordenadas: $x' = -1$, $y' = 0$.

**5. Halla el área del cuadrado dos de cuyos lados están en las rectas $4x - y + 5 = 0$ y $8x - 2y + 12 = 0$.**

Las rectas son paralelas y la longitud del lado del cuadrado coincide con la distancia entre ambas rectas.
Esta distancia la calculamos como la distancia del punto (–1, 1) de la recta $4x - y + 5 = 0$ a la otra recta $8x - 2y + 12 = 0$.
La distancia es

$$d(P, s) = \frac{|8(-1) - 2(1) + 12|}{\sqrt{8^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{68}} = 0{,}24$$

El área del cuadrado es 0,06 unidades cuadradas.

## Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

**1 Calcula el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:**

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1} \text{ y } \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

Los vectores direccionales son $\bar{u} = (2, -2, -1)$ y $\bar{v} = (-1, 3, -2)$.
El ángulo que forman es:

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} = \frac{-6}{\sqrt{9}\sqrt{14}} = -0{,}535;$$

luego $(\widehat{u, v}) = 122°18'41{,}4"$

**2 Calcula el ángulo formado por el plano $x - y + z = 0$ y la recta**

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$$

El vector normal del plano es $\bar{u} = (1, -1, 1)$ y el direccional de la recta $\bar{v} = (2, -1, 3)$. El ángulo que forman el plano y la recta es:

$$sen(\widehat{u, v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = 0{,}926;$$

$(\widehat{u, v}) = 67°47'32{,}44"$

**3 Calcula el ángulo que forman los planos $x + y - 2z = 3y - x + y + 2z = 2$.**

Los vectores normales de los planos son $\bar{u} = (1, 1, -2)$ y $\bar{v} = (-1, 1, 2)$. El ángulo que forman es:

$$sen(\widehat{u, v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|} = \frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = 0{,}667;$$

$(\widehat{u, v}) = 131°48\ 37{,}1"$

**4 Halla la distancia del punto (4, 5, 6) al plano $x - 2y + 3z = 5$.**

La distancia es $d = \frac{|4 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = 1{,}871$

**5 Halla la distancia entre el punto (3, 2, 7) y la recta diagonal del primer octante del espacio.**

La distancia es:

$$d = \frac{|(3, 2, 7) \cdot (1, 1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|(-5, 4, 1)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{43}}{\sqrt{3}} = 3{,}74$$

**6** **Halla la distancia entre las rectas**

$$r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

La expresión de las rectas en forma continua es:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y + 3}{0} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad s: \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z}{1}$$

La distancia

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|(1, 0, 1) \cdot (2, -1, 1)|} = \frac{7}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = 4{,}04$$

**7** **Encuentra en la recta que pasa por los puntos *A* (–1, 0, 1) y *B* (1, 2, 3) un punto tal que su distancia al punto *C* (2, –1, 1) sea de tres unidades.**

Un punto genérico de la recta que pasa por $A$ y $B$ tiene por expresión:

$$(1 + 2t, 2t, 1 + 2t)$$

La distancia de este punto al punto $C$ es 3, por tanto:

$$\sqrt{(2t - 1)^2 + (2t + 1)^2 + (2t)^2} = 3$$

Operando, se obtiene $t = \pm 0{,}764$.
Estos valores de t dan los puntos: (2,53; 1,53; 2,53) y (—0,53; –1,53; –0,53).

**8** **Calcula la distancia del punto (–2, 4, 3) a la recta**

$$\begin{cases} x = 2x + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$$

La recta en forma continua puede expresarse:

$$\frac{x - 1/2}{2} = \frac{y - 4}{-2/3} = \frac{z}{1}$$

La distancia buscada es:

$$d = \frac{|(5/12, 0, -3) \cdot (2, -2/3, 1)|}{|(2, -2/3, 1)|} = \frac{\sqrt{4 + 72{,}25 + 2{,}78}}{\sqrt{4 + 0{,}444 + 1}} =$$
$$= \frac{8{,}9}{2{,}3} = 3{,}814$$

**9** **Halla la ecuación del plano π que pasa por los puntos (1, 1, 1), (3, –2, 2) y es perpendicular al plano 2*x* – *y* – *z* = 0, y las ecuaciones de la recta *r* que pasa por el punto (1, 1, 1) y es perpendicular al plano π. Determinar los puntos de r cuya distancia a π sea $\sqrt{3}$.**

El plano pedido viene determinado por el punto (1, 1, 1) y los vectores $\overline{u} = (2, -3, 1)$ y $\overline{v} = (2, -1, -1)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x + y + z - 3 = 0$$

La recta $r$ viene determinada por el punto (1, 1, 1) y el vector $\overline{u} = (1, 1, 1)$, su ecuación en forma continua es:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{1}$$

Un punto cualquiera de $r$ es de la forma $(1 + t, 1 + t, 1 + t)$. Su distancia al plano π al ser $\sqrt{3}$ cumple:

$$\frac{|(1 + t) + (1 + t) + (1 + t) - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \sqrt{3}$$

Operando, se obtiene $t = 1$ y el punto buscado es el (2, 2, 2).

**10** **Dada la recta *r* de ecuaciones**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases} \quad \text{y el punto} \quad P\ (1, 2, -1)$$

***a)*** **Halla la ecuación del plano que contiene a *P* y es perpendicular a la recta *r*.**
***b)*** **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.**

La recta r expresada en forma continua es

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

*a)* La ecuación del plano es $(x - 1, y - 2, z + 1) \cdot (1, 1, 2) = 0$. Operando se obtiene $x + y + 2z - 1 = 0$.
*b)* Los vértices del triángulo son:
$A$ (1, 0, 0), $B$ (0, 1, 0) y $C$ (0, 0, 1/2).
El área de dicho triángulo es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}|(-1, 1, 0) \cdot (-1, 0, 1/2)| =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0{,}612 \text{ unidades cuadradas.}$$

**11** **Un triángulo tiene dos vértices en los puntos (0, 0, 0), (1, 1, 1) y el tercer vértice está situado en la recta**

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$$

**Halla las coordenadas de este vértice sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$.**

El tercer vértice tiene de coordenadas $(2t, t, 1)$. El área del triángulo de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B$ (1, 1, 1) y $C$ $(2t, t, 1)$ es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}|(1, 1, 1) \cdot (2t, t, 1)| -$$
$$- \frac{1}{2}|(1 - t, 2t - 1, -t)| = \frac{1}{2}\sqrt{(1 - t)^2 + (2t - 1)^2 + (-t)^2}$$

Como el área vale $\sqrt{2}/2$, se obtiene $t = 0$ y $t = 1$. Estos valores nos posibilitan dos soluciones: (0, 0, 1) y (2, 1, 1).

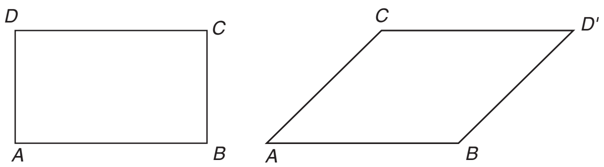
**12** **Tres vértices de un paralelogramo en el espacio son los puntos $A$ (1, 0, 1), $B$ (–1, 1, 1) y $C$ (2, –1, 2).**

**a) Halla el punto $D$ que complete el paralelogramo. ¿Hay uno o varios?**

**b) Calcula el área del paralelogramo hallado anteriormente.**

*a)* Pueden ocurrir dos casos como se observa en el dibujo.

I) II)




I. En este caso, $\overline{AB} = \overline{DC}$ y el punto $D$ tiene por coordenadas (4, –2, 2).

II. En este caso, $\overline{AB} = \overline{CD'}$ y el punto $D'$ tiene por coordenadas (0, 0, 2).

*b)* El área del paralelogramo es:

$$\text{Área} = |\overline{AB} \cdot \overline{AC}| = |(-2, 1, 0) \cdot (1, -1, 1)| = |(1, 2, 1)| = \sqrt{6} = 2{,}45$$

**13** **El plano $-2x + 5y - z + 10 = 0$ corta los ejes $OX$, $OY$ y $OZ$ en tres puntos $A$, $B$ y $C$, respectivamente. Estos puntos determinan, junto al origen de coordenadas $O$, un tetraedro. Obtén el área de dicho tetraedro.**

Los puntos $A$, $B$ y $C$ son:

$A$ (5, 0, 0), $B$ (0, –2, 0) y $C$ (0, 0, 5)

El área del tetraedro es la suma de las áreas de los triángulos siguientes:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC}| = \frac{1}{2} |(-5, 2, 0) \times (-5, 0, 5)| =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{825} = 14{,}36.$$

$$\text{Área } (ABO) = \frac{1}{2} |\overline{OB} \cdot \overline{OC}| = \frac{1}{2} |(5, 0, 0) \cdot (0, -2, 0)| = \frac{1}{2} 10 = 5$$

$$\text{Área } (ACO) = \frac{1}{2} |\overline{OA} \cdot \overline{OC}| = \frac{1}{2} |(5, 0, 0) \cdot (0, 0, 5)| =$$
$$= \frac{1}{2} 25 = 12{,}5$$

$$\text{Área } (BCO) = \frac{1}{2} |\overline{OB} \cdot \overline{OC}| = \frac{1}{2} |(5, -2, 0) \cdot (0, 0, 5)| = \frac{1}{2} 10 = 5$$

Por tanto, el área del tetraedro es: 14,36 + 5 + 12,5 + 5 = = 36,86.

**14** **Sean los puntos $P$ (3, 1, 5) y $Q$ (–1, 7, 3). Por el punto medio del segmento $PQ$ trazamos un plano $\pi$ perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos $A$, $B$ y $C$. Se pide:**

**a) La ecuación del plano $\pi$.**

**b) El área del triángulo $ABC$.**

*a)* El plano $\pi$ pasa por el punto $M$ (1, 4, 4) y su vector normal es $\overline{PQ} = (-4, 6, -2)$, su ecuación es $-4(x - 1) + 6(y - 4) + (-2)(z - 4) = 0$, es decir, $2x - 3y + z + 6 = 0$.

*b)* Las coordenadas de los puntos $A$, $B$ y $C$ son:

$A$ (–3, 0, 0), $B$ (0, 2, 0) y $C$ (0, 0, –6).

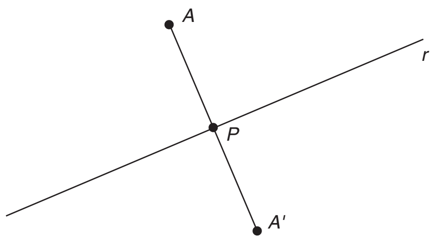
El área del triángulo $ABC$ es:

$$\text{Área } \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC}| = \frac{1}{2} |(3, 2, 0) \cdot (3, 0, -6)| =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{504} = 11{,}225$$

**15** **Halla el punto simétrico del punto $A$ (1, –3, 7) respecto de la recta:**

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{2}$$

El punto $P$ pertenece a la recta $r$ y es tal que el vector $\overline{AP}$ y el director de la recta son perpendiculares.




Para la determinación del punto $P$, procedemos así:

- Tomamos un punto $P$ (1 + t, -3 + t, 4 + 2t) genérico de la recta $r$.
- Formamos el vector $\overline{AP} = (t, t, 2t - 3)$.
- Este vector y $\overline{u} = (1, 1, 2)$ son perpendiculares, por tanto

$$\overline{AP} \cdot \overline{u} = 0 \Rightarrow t + t + 4t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

El valor $t = 1$ conduce al punto $P$ (2, –2, 6).

Determinamos $A'$ considerando que $P$ es el punto medio del segmento $AA'$. Obtenemos $A'$ (3, –1, 5).

**16** **Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$, siendo:**

**$A$: El simétrico del punto $P$ (1, 2, 3) respecto al plano de ecuación $x = z$.**

**$B$: La proyección ortogonal del punto $Q$ (2, 1, 3) sobre el plano $z = 0$.**

**$C$: El origen de coordenadas.**

Las coordenadas de los puntos $A$, $B$ y $C$ son:

$A$ (3, 2, 1), $B$ (2, 1, 0) y $C$ (0, 0, 0).

El área del triángulo es:

$$\text{Área } (ABC) \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC}| = \frac{1}{2} |(-1, -1, -1) \times (-3, -2, -1)| =$$
$$= \frac{1}{2} \sqrt{6} = 1{,}225$$

**17** **Halla la recta perpendicular común a las rectas de ecuaciones:**

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \text{ y } \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

Consideramos los puntos genéricos $P$ $(2t + 1, t - 3, t + 1)$ y $Q$ $(5 + 2, -3s + 1, s + 1)$ de cada una de las rectas del enunciado.

Formamos el vector $\overline{PQ} = (2t - s - 1, t + 35 - 4, t - s)$. Este vector debe ser perpendicular a los vectores direccionales $\overline{u} = (2, 1, 1)$ y $\overline{v} = (1, -3, 1)$ de ambas rectas.
Por tanto,
$\overline{PQ} \cdot \overline{u} = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0$
$\overline{PQ} \cdot \overline{v} = 0 \Rightarrow 11s + 11 = 0$
Obtenemos $t = 1$, $s = -1$, que nos ha proporcionado los puntos $P(3, -2, 2)$ y $Q(1, 4, 0)$.
La perpendicular común es la recta determinada por $P$ y $Q$; ésta tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z}{2}$$

**18** **De todos los planos que contiene a la recta**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-2}$$

**determina aquel que forma al cortarse con los semiejes coordenados positivos un triángulo equilátero. Calcula el área del triángulo.**

El haz de planos que contiene a la recta $r$ tiene por ecuación $(x - y + 2) + m(2x + z - 4) = 0$
Esta ecuación puede ponerse en la forma
$(1 + 2m)x - y + mz + (2 - 4m) + 0$
Los puntos de corte de este haz con los semiejes positivos son:

$$A\left(\frac{4m-2}{2m+1}, 0, 0\right), \quad B(0, 2-4m, 0) \text{ y } C\left(0, 0, \frac{4m-2}{m}\right)$$

El único valor de m que hace que el triángulo $ABC$ sea equilátero es $m = -1$. Para este valor, $m = -1$, los vértices del triángulo son:
$A(6, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$ y $C(0, 0, 6)$.
El área de dicho triángulo es:

$$\text{Área }(ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-6, 6, 0) \cdot (-6, 0, 6)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3888} = 31{,}177$$

**19** **Dados los planos**

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

***a)*** **Analiza su posición relativa.**
***b)*** **Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta de intersección de los dos primeros planos.**
***c)*** **Halla la proyección ortogonal del origen sobre el plano $x + 2y - z = 1$.**

*a)* El rango de la matriz de los coeficientes es dos y el de la matriz ampliada es tres, por tanto, los planos se cortan dos a dos.

*b)* La recta $r: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ expresada en forma continua es

$$\frac{x + 1/3}{1} = \frac{y - 2/3}{1} = \frac{z}{3}$$

Procediendo como en la actividad número 15, se obtiene el punto de coordenadas (14/11, –8/11, –2/11) como el simétrico del origen respecto a la recta en cuestión.

*c)* La proyección ortogonal del origen sobre el plano $x + 2y - z = 1$, es el punto de intersección entre el plano $x + 2y - z = 1$ y la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano anterior.
La ecuación de la recta citada es

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$$

La proyección ortogonal es la solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

El punto buscado es (1/6, 1/3, –1/6).

**20** **Sea π el plano de ecuación $x + 2y + 3z = 5$.**
***a)*** **Encuentra la ecuación de un plano paralelo a π y cuya distancia al origen sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?**
***b)*** **Calcula el punto $P$ del plano π que está más próximo al origen.**
***c)*** **Sea $Q$ el punto (1, 1, 1). Se sabe que los segmentos $OP$ y $OQ$ son dos lados de un paralelogramo. Halla los vértices y el área de dicho paralelogramo.**

*a)* Los planos buscados son $x + 2y + 3z = 3$ y $z + 2y + 3z = -3$.
*b)* El punto buscado es $P(0, 0, 5/3)$.
*c)* Los vértices del paralelogramo son los puntos $O(0, 0, 0)$, $P(0, 0, 5/3)$, $Q(1, 1, 1)$ y $R(-2/3, -2/3, 1)$.
El área del paralelogramo es

$$\text{Área }(OPQR) = \left|\overline{OP} \cdot \overline{OQ}\right| = 2{,}358$$

**21** **Dados los puntos (1, 2, 3) y (1, 2, 1), ¿cuál es el conjunto de puntos que está a igual distancia de ambos?**

El plano que pasa por el punto medio, (1, 2, 2), del segmento cuyos extremos son los puntos dados y tiene como vector normal (0, 0, 2).
Su ecuación es $(x - 1)\cdot 0 + (y - 2)\cdot 0 + (z - 2)\cdot 2 = 0$, luego $z = 2$.

**22** **Sea la recta $r$:**

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = 3 \end{cases}$$

**Halla los puntos de esta recta tales que su distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{14}$.**

Sea $P(3, 2t, t)$ un punto genérico de la recta r.
Desarrollando la condición $d(P, 0) = \sqrt{14}$, obtenemos:

$$\sqrt{3^2 + 4t^2 + t^2} = \sqrt{14} \Rightarrow 5t^2 = 5 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = 1 \text{ o } t = -1$$

Para $t = 1$ se obtiene el punto (3, 2, 1) y por $t = -1$ se obtiene (3, –2, –1).

**23** **Si los puntos *P* (2, 1, 2) y *Q* (6, 1, 4) son los vértices opuestos de un cuadrado, se pide:**
***a)*** **Calcula el área del cuadrado.**
***b)*** **Obtén la ecuación del plano que pasa por el centro del cuadrado y es perpendicular a la diagonal que pasa por los vértices *P* y *Q*.**

*a)* La diagonal d del cuadrado mide $d = \sqrt{4^2 + 0^2 + 4} = \sqrt{20}$

Con este valor de la diagonal, el lado mide $l = \sqrt{10}$ y, por tanto, el área del cuadrado es 10.

*b)* El plano pedido pasa por el punto (3, 1, 3) y tiene como vector normal (4, 0, 2). Su ecuación es:

$$4(x-3) + 0\cdot(y-1) + 1(z-3) = 0 \Rightarrow 2x + z = 9$$

**24** **Halla las proyecciones siguientes:**
***a)*** **Del punto *P* (4, –2, 1) respecto del plano $3x - 2y - 2z = -2$.**
***b)*** **Del punto *P* (4, –2, 1) respecto a la recta**

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{-1}$$

***c)*** **De la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ sobre el plano $x + 2y + z = 1$**

*a)* Es la solución del sistema $\begin{cases} 2x - 2y - 2z = -1 \\ 2x + 3y = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

Por tanto, el punto buscado es $\left(\dfrac{20}{17}, -\dfrac{2}{17}, \dfrac{49}{17}\right)$

*b)* Sea $Q(3t + 1, 5t + 1, -t + 7)$ un punto genérico de la recta. El punto $Q$ proyección de $P$ debe cumplir: $\overrightarrow{OP}\cdot(3, 5, -1) = 0$. Por tanto, $35t = 0 \Rightarrow t = 0$. el punto buscado es (1, 1, 7).

*c)* Proyectamos los puntos *P* (2, 0, –1) y *Q* (5, 1, –2) sobre el plano $x + 2y + z = 1$ y obtenemos los puntos $P'(2, 0, -1)$ y $Q\left(\dfrac{13}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

La recta que pasa por los puntos *P* y *Q* es:

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{7}$$

**25** **Encuentra los puntos situados a distancia 5 del origen y pertenecientes a la recta que pasa por los puntos (1, 2, 5) y (6, 5, 6).**

La recta que pasa por los puntos (1, 2, 5) y (6, 5, 6) tiene por

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$$

El punto P $(5t + 1, 3t + 2, t + 5)$ pertenece a la recta anterior. Los puntos a distancia 5 del origen cumplen de $(P, 0) = 5$. Desarrollando $\sqrt{(5t+1)^2 + (3t+2)^2 + (t+5)^2}$, obtenemos $t = -0{,}14$ y $t = -0{,}78$. Para $t = -0{,}14$ obtenemos el punto (0,3; 1,58; 4,86) y para $t = -{,}078$ se obtiene el punto (–2,9; 0,34; 4,22).

**26** **Halla la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano que contiene a las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{2}$$

La ecuación del plano que contiene a las rectas *r* y *s* es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + 2y - 5 = 0$$

La distancia del origen al plano $x + 2y - 5 = 0$ viene dada por la expresión

$$(0, \pi) = \frac{|0 + 2\cdot 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = 2{,}34$$

**27** **Sobre las rectas $r: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{0}$ y $s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{0}$ se encuentran los lados de un cuadrado. Si uno de los vértices es el origen de coordenadas, calcula:**
***a)*** **El área del cuadrado.**
***b)*** **Las ecuaciones de los lados que se cortan en el origen.**

*a)* El origen de coordenadas pertenece a la recta *r*. La longitud del lado del cuadrado es la distancia del origen a la recta *s*. El punto de la recta s de mínima distancia con el origen es $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}, 0\right)$

El lado del cuadrado es $\sqrt{5}$ y, por tanto, su área es 5.

*b)* Las rectas que se cortan en el origen tienen por ecuaciones:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{0} \text{ y } s': \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$$

**28** **Dado el plano de ecuación $2x + 2y + z = 3$ y el punto *A* (1, 0, 2), sea *B* el pie de la perpendicular de *A* a dicho plano y *C* (2, 1, –2) un punto del plano. Se pide el área del triángulo *ABC*.**

Las coordenadas del punto *B* son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

Por tanto, los vértices del triángulo son los puntos

$$A\ (1,0,2),\ B\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right) \text{ y } C\ (2, 1, -2)$$

El área del triángulo es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}\right) \times (1, 1, -4)\right| = 0{,}79$$

**29** **Un cubo tiene uno de sus vértices en el punto *P* (1, 1, 1) y una de sus caras está situada en el plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas:**

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0} \text{ y } s: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{0}$$

**Halla el volumen del cubo.**

La ecuación del plano del problema es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z = 0$$

La distancia del punto $P(1, 1, 1)$ al plano $z = 0$ es $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$

El volumen del cubo es 0,192

**30** **Calcula la proyección ortogonal del punto *O* (0, 0, 0) sobre el plano $x + y + z = 1$.**

El punto buscado es la solución del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y \quad\;\; = 0 \\ \quad\;\; y - z = 0 \end{cases}$

Dicho punto es (1/3, 1/3, 1/3).

**31** **Sea $P_1$ el punto (1, 0, –1), $P_2$ el punto simétrico de $P_1$ respecto del plano $x - 2y = 0$ y $P_3$ el punto simétrico de $P_1$ respecto del plano $x + 2y + z = 1$. Calcula la ecuación del plano que pasa por $P_1$, $P_2$ y $P_3$.**

Las coordenadas de los puntos $P_2$ y $P_3$ son:

$P_2$ (3/5, 4/5, –1) y $P_3$ (2/3, 4/3, –10/3)

El plano que pasa por $P_1$, $P_2$ y $P_3$ tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ -1/3 & 4/3 & -7/3 \end{vmatrix} = 14x + 7y + 2z = 0$$

**32** **Halla la recta perpendicular común a las rectas de ecuaciones:**

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{4} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - 3y = 11 \\ 4y - z = -4 \end{cases}$$

Sean $P$ $(2 + 3t, t, 1 + 4t)$ y $Q$ $(11 + 3s, s, 4 + 4s)$ dos puntos genéricos de las rectas $r$ y $s$.

Debe cumplirse: $\left.\begin{array}{l} \overline{PQ} \cdot (3, 1, 4) = 0 \\ \overline{PQ} \cdot (3, 1, 4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2t - 2s = 3$

Las rectas $r$ y $s$ son paralelas y, por tanto, tienen infinitas perpendiculares comunes. Todas ellas son paralelas a la recta de ecuación:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$$

**33** ***a)* Determina *m* y *n* para que los planos de ecuaciones** $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + mz = n \end{cases}$ **se corten en una recta *r*.**

***b)* Halla la ecuación del plano que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *P* (2, 1, 3).**

***c)* Halla la distancia del punto *P* a la recta *r*.**

*a)* Para que los planos se corten en la recta

$r: \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ debe ser $m = 1$ y $n = 4$

*b)* El plano buscado es $x + y - z = 0$.

*c)* La distancia del punto P a la recta r es 0,707.

**34** **Sean *A* (–3, 4, 0), *B* (3, 6, 3) y *C* (–1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:**

***a)* La ecuación del plano que contiene al triángulo.**

***b)* El valor de los ángulos y el área del triángulo.**

*a)* El plano que contiene al triángulo tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + 3 = 0$$

*b)* El valor de los ángulos es:

$$cos\,(\widehat{A}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{12 - 4 + 3}{\sqrt{49}\,\sqrt{9}} = 0{,}524,$$

luego $\widehat{A} = 58°24'42{,}7"$

$$cos\,(\widehat{B}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \frac{24 + 8 + 6}{\sqrt{49}\,\sqrt{36}} = 0{,}905$$

luego $\widehat{B} = 25°12'31{,}56"$

$$cos\,(\widehat{C}) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{\overline{CA} \cdot \overline{CB}} = \frac{-8 + 8 - 2}{\sqrt{9}\,\sqrt{36}} = 0{,}111$$

luego $\widehat{C} = 83°37'14{,}3"$

El área del triángulo $ABC$ es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\,\overline{AB} \cdot \overline{AC}\,\right| = \frac{1}{2}\left|\,(6, 2, 3) \times (2, -2, 1)\,\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\,(8, 0, -16)\,\right| = 8{,}944$$

## Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

**35** **Calcula el ángulo que forman los planos $x + 2y - z = 0$ y $x - 2y + 5z - 3 = 0$.**

El ángulo que forman los planos es el mismo que el formado por sus vectores normales. Su valor es:

$$cos\,(\widehat{\overline{n_{\pi_1}} \cdot \overline{n_{\pi_2}}}) = \frac{\overline{n_{\pi_1}} \cdot \overline{n_{\pi_2}}}{|\overline{n_{\pi_1}}|\,|\overline{n_{\pi_2}}|} = \frac{1 + (-4) + (-5)}{\sqrt{6}\,\sqrt{30}} = 0{,}6$$

luego el ángulo buscado es de 53°23'44,6"

**36** **Calcula el ángulo que forman la recta *r* y el plano π, siendo:**

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \quad \text{y} \quad \pi: x - y - z = 0$$

El ángulo buscado puede calcularse con el vector direcciona de la recta $\bar{v} = (2, -1, 3)$ y el normal al plano $\bar{n} = (1, -1, -1)$, a través de la expresión:

$$\text{sen}\,(\widehat{r, \pi}) = \text{sen}\,(\widehat{\bar{v}, \bar{n}}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{n}}{|\bar{v}||\bar{n}|} = \frac{2+1-3}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = 0$$

luego el ángulo es 0° y, por tanto, la recta y el plano son paralelos.

**37** **Calcula las coordenadas del punto de la recta *r* tal que forme un triángulo rectánculo en *A* con los puntos *A* (1, 5, 6), *B* (7, 6, 6), siendo *r* la recta de ecuaciones**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

Consideramos un punto genérico *P* (5/3 + 1/3 *t*, 4/3 – 7/3 *t*, *t*) de la recta *r*.

Para que los puntos *A, B* y *P* formen un triángulo rectángulo en *A* debe cumplirse que $\overline{AP} \cdot \overline{AB} = 0$, es decir:

$$\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}t - \frac{11}{3}, t - 6\right) \cdot (6, 1, 0) = 0, \text{ luego } t = 1.$$

El punto buscado es (2, –1, 1).

**38** **Halla la distancia entre el punto *A* (1, 2, 3) y cada uno de los ejes coordenados.**

La distancia del punto *A* (1, 2, 3) al eje *OX* viene dado por la expresión:

$$d(A, 0x) = \frac{|(1, 2, 3) \cdot (1, 0, 0)|}{|(1, 0, 0)|} = \frac{|(0, 3, -2)|}{|(1, 0, 0)|} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

La distancia a *OX* es:

$$d(A, OY) = \frac{|(1, 2, 3) \cdot (0, 1, 0)|}{|(0, 1, 0)|} = \frac{|(-3, 0, 1)|}{|(0, 1, 0)|} = \sqrt{10} = 3{,}162$$

La distancia a *OZ* es:

$$d(A, OZ) = \frac{|(1, 2, 3) \cdot (0, 0, 1)|}{|(0, 0, 1)|} = \frac{|(2, -1, 0)|}{|(0, 0, 1)|} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

**39** **Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones:**

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -5 \\ y = 1 - 3s \\ z = 2s \end{cases}$$

Consideramos puntos genéricos en cada una de las rectas,
*P* (2 + 3*t*, 2*t*, –1–2*t*) y *Q* (–*s*, 1 – 3*s*, 2*s*)

Buscamos los puntos *P* y *Q* que determinan la perpendicular común a *r* y *s*, mediante las condiciones:

$$\overline{PQ} \cdot (3, 2, -2) = 0 \Rightarrow 17t + 13s = -6$$
$$\overline{PQ} \cdot (-1, -3, 2) = 0 \Rightarrow 13t + 14s = -1$$

Resolviendo el sistema, se obtiene: *t* = –1,03, *s* = 0,88.
Estos valores fijan los puntos *P* y *Q* en *P* (–1,09; –2,06; 1,06) y *Q* (–0,88; –1,64; 1,76).
Por tanto,

$$d(r, s) = d(P, Q) = \sqrt{(-0{,}21)^2 + (-0{,}42)^2 + (-0{,}7)^2} = \sqrt{0{,}7064} = 0{,}84$$

**40** **Halla un punto de la recta $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ que equidiste de los puntos *A* (1, 0, 1) y *B* (0, 4, 2).**

Sea *P* (*t*, *t* + 2, 2*t* + 3) un punto genérico de la recta dada. Debe cumplirse que *d* (*P, A*) = *d* (*P, B*). Esto es,

$$\sqrt{(t-1)^2 + (t+2)^2 + (2t+2)^2} = \sqrt{t^2 + (t-2)^2 + (2t+1)^2}$$

Operando, se obtiene *t* = –0,4.
El punto buscado será *P* (–0,4; 1,6; 2,2).

**41** **Halla el valor de a para que el plano que pasa por el punto (*a, a, a*) y es perpendicular a los planos *x* + *y* - *z* = 0 y 2*x* + *y* – *z* = 2 diste del punto (0, 0, 0) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ unidades.**

La ecuación del plano bajo las condiciones del problema es:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-a & z-a \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = y + z - 2a = 0$$

La distancia de origen (0, 0, 0) al plano anterior es $\frac{2a}{\sqrt{2}}$.

Como esta distancia, nos dicen que debe ser $\frac{2}{\sqrt{2}}$, entonces $a = 1$.

**42** ***a)* Encuentra las coordenadas del punto *B*, proyección ortogonal del punto *A* (1, 0, 2) sobre el plano π: 2*x* + *y* + *z* = 10.**
***b)* El punto *C* (2, 1, 5) es un punto del plano π. ¿Cuánto vale el área del triángulo *ABC*?**

*a)* El punto *B* es la intersección del plano π con la recta que pasa por *A* (1, 0, 2) y es perpendicular a π.
El punto *B* es la solución del sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 10 \\ x - 2y = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$

Las coordenadas del punto *B* son *B* (3, 1, 3).

*b)* El área del triángulo de vértices *A* (1, 0, 2), *B* (3, 1, 3) y *C* (2, 1, 5) es:

$$\text{Área}\,(ABC) = \frac{1}{2}|\overline{AB} \cdot \overline{AC}| = \frac{1}{2}|(2, 1, 1) \text{ x } (1, 1, 3)| = \frac{1}{2}\sqrt{30} = 2{,}739$$

**43** **Halla el punto simétrico del origen respecto del plano $x + y + z = 1$.**

El punto proyección de 0 (0, 0, 0) sobre el plano $x + y + z = 1$ es el punto P solución del sistema formado por el plano y la recta perpendicular a él que pasa por el origen. Es decir, el punto $P$ es solución de

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y \phantom{+ z} = 0 \\ \phantom{x -} y - z = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $P$ (1/3, 1/3, 1/3).
El punto 0' ($x'$, $y'$, 2') cumple, con respecto a los puntos $O$ y $P$, la relación:

$$\frac{0 + x'}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{0 + y'}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{0 + z'}{2} = \frac{1}{3}$$

Las coordenadas de $O'$ son $x' = 2/3$, $y' = 2/3$, $z' = 2/3$.

**44** **Halla el punto simétrico del punto $A$ (2, 0, 1) respecto de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z - 2}{1}$**

Sea $P$ ($at$, $-t + 3$, $t + 2$) un punto genérico de la recta. Para fijar este punto como punto medio del segmento $AA'$ imponemos la condición $\overline{PA} \cdot (2, -1, 1) = 0$.
Es decir,

$$(2t - 2) \cdot 2 + (-t + 3) \cdot (-1) + (t + 1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

El punto $P$ es $P$ (2, 2, 3).
Las coordenadas de $A'$ ($x'$, $y'$, $z'$) simétrico de $A$ debe cumplir:

$$\frac{x' + 2}{2} = 2, \quad \frac{y' + 0}{2} = 2, \quad \frac{z' + 1}{2} = 3$$

Por tanto, $x' = 2$, $y' = 4$, $z' = 5$.

**45** **Dados el punto $A$ (1, 0, –1) y el plano $\pi$: $2x - y + 3z = 4$, se pide:**

***a)*** **La ecuación de la recta que pasa por $A$ y es perpendicular a $\pi$.**
***b)*** **El punto simétrico de $A$ respecto a $\pi$.**
***c)*** **De los planos que pasan por $A$ y son perpendiculares a $\pi$, halla el que pasa por $B$ (2, 1, 2).**
***d)*** **La ecuación del plano que pasa por $A$ y es paralelo a $\pi$.**

*a)* La ecuación de la recta es: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z + 1}{3}$

*b)* El punto $P$ del plano $\pi$ que es el punto medio del segmento $AA'$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y \phantom{+ z} = 0 \\ \phantom{x -} y - z = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas de $P$ son: $\left(\frac{24}{14}, \frac{5}{14}, -\frac{1}{14}\right)$
El punto simétrico de $A$, $A'$ tiene por coordenadas: $\left(\frac{17}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{8}{7}\right)$

*c)* El plano buscado $Ax + By + Cz = D$ debe cumplir:

$$\begin{cases} A \phantom{+ B} - C = D \\ 2A + B + 2C = D \\ 2A - B + 3C = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $2x + y - z = 3$.

*d)* El plano buscado es $2x - y + 3z = -1$.

**46** **Halla la recta perpendicular común a las rectas**

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \text{ y } s: \frac{x - 1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

Sean $P$ ($t$, $t$, $t$) y $Q$ ($s + 1$, $3s$, $s$) dos puntos genéricos de las rectas $r$ y $s$. Los puntos anteriores quedan fijados bajo las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} \overline{PQ} \cdot (1, 1, 1) = 0 &\Rightarrow 3t - 5s = 1 \\ \overline{PQ} \cdot (1, 3, 1) = 0 &\Rightarrow 5t - 11s = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = 3/4, s = 1/4$$

Los puntos fijados son $P$ (3/4, 3/4, 3/4) y $Q$ (5/4, 3/4, 1/4).
La perpendicular común tiene por ecuación:

$$\frac{x - 3/4}{1} = \frac{y - 3/4}{0} = \frac{z - 3/4}{1}$$

**47** **Halla la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A$ (1, 0, 0) y $B$ (0, 1, 1) y el eje $OY$.**

Sea $r$: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s$: $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ las rectas del enunciado

Procediendo como en el ejercicio anterior, buscamos los puntos $P$ y $Q$ que nos dan la perpendicular común.
Sean $P$ ($1 - t$, $t$, $t$) y $Q$ ( 0, $s$, 0), debe cumplirse:

$$\left.\begin{aligned} \overline{PQ} \cdot (-1, 1, 1) = 0 &\Rightarrow 3t - s = 1 \\ \overline{PQ} \cdot (0, 1, 0) = 0 &\Rightarrow t - s = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t = 1/2, s = 1/2$$

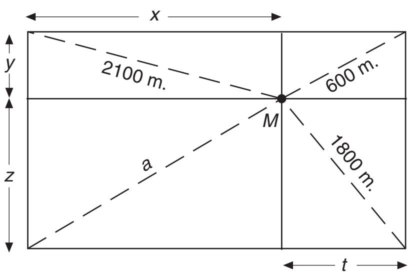
Los puntos $P$ y $Q$ son $P$ (1/2, 1/2, 1/2), $Q$ (0, 1/2, 0).
La distancia buscada es:

$$d(r, s) = d(P,Q) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071$$

## Resolución de problemas

**1. EL MANANTIAL OCULTO. En una antigua ciudad amurallada, de forma rectangular, existía en un punto intramuros un manantial que se encontraba a 2 100 m de la esquina superior izquierda, a 600 m de la esquina superior derecha y a 1 800 m de la esquina inferior dere-**

**cha. El manantial actualmente ha desaparecido, ¿a qué distancia se encontraría de la esquina inferior izquierda?**




Denotando con *x, y, z, t* los lados de los distintos triángulos rectángulos que se formen y con a la distancia que queremos hallar, al aplicar el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=2.100^2 \\ -y^2+t^2=600^2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} x^2+x^2=2.100^2 \\ -y^2-t^2=-600^2 \\ \hline x^2-t^2=2\ 100^2-600^2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} z^2+t^2=1\ 800^2 \\ x^2+z^2=a^2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} z^2+t^2=1\ 800^2 \\ \hline x^2+z^2=2\ 100^2-600^2+1\ 800^2 \end{array}$$

Entre esta última igualdad obtenida y la última igualdad del sistema, obtenemos:

$$a^2 = 2\ 100^2 - 600^2 + 1\ 800^2 \Rightarrow a = 2\ 700 \text{ m}$$

**2. NÚMERO OCULTO. La siguiente expresión esconde un número conocido. ¿Sabes cuál es?**

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

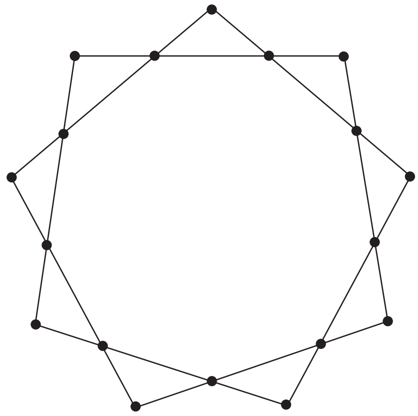
Llamando x a la expresión dada, obtenemos:

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

$$\Rightarrow\ x-1=\frac{1}{x} \Rightarrow\ x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Luego $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$ = número de oro.

**3. MONEDAS. ¿Es posible colocar 18 monedas en 9 filas de manera que cada fila contenga 4 monedas?**



En la figura puedes ver 18 monedas colocadas en 9 filas y con 4 monedas en cada fila.

**4. TANTOS POR CIENTO. Parte de los 8.000 habitantes de un pueblo se van de vacaciones en verano. De los que quedan, al 63,636363...% les gusta la música y al 22,297297297...% les gusta usar pantalones vaqueros. ¿Cuántos habitantes se fueron de vacaciones en verano?**

$$63{,}6363.... = \frac{6\ 300}{99} = \frac{700}{11}$$

$$22{,}297297.... = \frac{22\ 275}{999} = \frac{2\ 475}{111} = \frac{825}{37}$$

Al $63{,}\widehat{66}\%$ de los que quedan les gusta la música, es decir al $\frac{700}{11}\ \%$ les gusta la música.

Al $22{,}\widehat{297}\%$ de los que queden les gusta usar pantalones vaqueros, es decir al $\frac{825}{37}\ \%$ les gusta usar pantalones vaqueros.

Les gusta la música: $\frac{700}{1\ 100}\cdot x=\frac{7}{11}\cdot x$

Les gusta usar vaqueros: $\frac{825}{3\ 700}\cdot x=\frac{33}{148}\cdot x$

Por lo tanto, $x$ ha de ser múltiplo de 11 y de 148.

Puede ser $x$ = 1 628; $x$ = 3 256; $x$ = 4 884; $x$ = 6 512.

Se fueron de vacaciones: 6 372 si $x$ = 1 628; 4 744 si $x$ = 3.256; así sucesivamente.