RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES

Actividades iniciales

1. Una función F es primitiva de otra f siempre y cuando la derivada de F sea f, es decir:

F es primitiva de $f \Leftrightarrow F' = f$

Encuentra dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x$ ***b)*** $f(x) = sen\ x$

c) $f(x) = e^{-x}$ ***d)*** $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

a) Primitivas de $f(x) = 2x$ son:
$F(x) = x^2 + 7$; $G(x) = x^2 - \sqrt{2}$

b) Primitivas de $f(x) = \text{sen } x$ son:
$F(x) = -cos\ x + \dfrac{1}{3}$; $G(x) = -\ cos\ x$

c) Primitivas de $f(x) = e^{-x}$ son:
$F(x) = -e^{-x} + \sqrt{5}$; $G(x) = -e^{-x} - 3$

d) Primitivas de $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ son:

$F(x) = 3 \cdot ln\ |x+2| \angle \dfrac{3}{2}$; $G(x) = 3\ ln\ |x+2| + 1$

2. ¿Comprueba, en cada caso, que F es primitiva de f?:

a) $F(x) = -ln\ (1-x) - arc\ tg\ x + 7$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)\ (1+x^2)}$$

b) $F(x) = \dfrac{(2-x)\ sen\ (2x)}{2} - \dfrac{1}{4}\ cos\ (2x) - \sqrt{3}$

$f(x) = (2-x)\ cos\ (2x)$

a) Veamos que $F'(x) = f(x)$

$F(x) = -ln\ (1-x) - arc\ tg\ x + 7$

$$F'(x) = -\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1 + x^2 - (1-x)}{(1-x)\ (1+x^2)} = \frac{x^2 + x}{(1-x)\ (1+x^2)} = f(x)$$

b) Veamos que $F'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \frac{(2-x) \cdot sen\ (2x)}{2} - \frac{1}{4}\ cos\ (2x) - \sqrt{3}$$

$$F'(x) = \frac{-sen\ 2x}{2} + 2 \cdot \frac{cos\ (2x) \cdot (2-x)}{2} - \frac{1}{4}\left[-2\ sen\ (2x)\right] =$$

$$= \frac{-sen\ 2x}{2} + (2-x) \cdot cos\ (2x) + \frac{1}{2}\ sen\ (2x) =$$

$$= (2-x) \cdot cos\ (2x) = f(x)$$

Actividades de Enseñanza-Aprendizaje

1 **Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de integrales inmediatas:**

a) $\displaystyle\int (2x^2 - 4x + 5)\ dx$ ***b)*** $\displaystyle\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

c) $\displaystyle\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx$ ***d)*** $\displaystyle\int \left[\frac{x^3 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\right] dx$

e) $\displaystyle\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\ dx$ ***f)*** $\displaystyle\int (2x^2 + 3)^2 \cdot 5x\ dx$

g) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 + 5}\ dx$ ***h)*** $\displaystyle\int \frac{4x + 8}{x^2 + 4x}\ dx$

i) $\displaystyle\int 4x^2\sqrt{1 - x^3}\ dx$ ***j)*** $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}}\ dx$

k) $\displaystyle\int \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\ dx$ ***l)*** $\displaystyle\int \frac{1 - cos\ 2x}{2x - sen\ 2x}\ dx$

m) $\displaystyle\int cos\ \left(\frac{x}{2}\right) dx$ ***n)*** $\displaystyle\int 3x \cdot 3^{x^2}\ dx$

ñ) $\displaystyle\int \frac{e^{ln\ x}}{x}\ dx$ ***o)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + 7x^2}$

p) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^8}}\ dx$ ***q)*** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}\ dx$

r) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{4 - x^2}}\ dx$ ***s)*** $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2 + 9}\ dx$

t) $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 + 9}\ dx$ ***u)*** $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + x^2) \cdot arc\ tg\ x}\ dx$

v) $\displaystyle\int \frac{1 - ln\ x}{x \cdot ln\ x}\ dx$ ***w)*** $\displaystyle\int \frac{3x}{x^4 + 16}\ dx$

x) $\displaystyle\int sen^3\ 2x \cdot cos\ 2x\ dx$ ***y)*** $\displaystyle\int \frac{3^x}{1 + 9^x}\ dx$

z) $\displaystyle\int tg\ x\ \ dx$

a) $\displaystyle\int (2x^2 - 4x + 5)\ dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x + C$

b) $\displaystyle\int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (3x + x^{-2})\ dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$

c) $\displaystyle\int \left(2\sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx = \int \left(2x^{\frac{3}{4}} - \frac{5}{x}\right) dx = \frac{8\sqrt[4]{x^7}}{7} - 5\ ln\ |x| + C$

d) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x\sqrt{x} + 2}{x}\ dx = \int \left(x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{x}\right) dx =$

$$= \frac{x^4}{4} - 2\sqrt{x^3} + 2\ ln\,|x| + C$$

e) $$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) dx =$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C$$

f) $$\int (2x^2+3)^2 \cdot 5x \cdot dx = \frac{5}{4}\int (2x^2+3)^2 \cdot 4x\ dx =$$

$$= \frac{5}{4}\,\frac{(2x^2+3)^3}{3} + C$$

g) $$\int \frac{3x}{x^2+5}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx = \frac{3}{2}\ ln\,|x^2+5| + C$$

h) $$\int \frac{4x+8}{x^2+4x}\,dx = 2\int \frac{2x+4}{x^2+4x}\,dx = 2\ ln\,|x^2+4x| + C$$

i) $$\int 4x^2 \cdot \sqrt{1-x^3}\ dx = \frac{4}{-3}\int (1-x^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (-3x^2)\ dx =$$

$$= -\frac{4}{3}\,\frac{2\sqrt{(1-x^3)^3}}{3} = \frac{-8}{9}\sqrt{(1-x^3)^3} + C$$

j) $$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx = \frac{1}{3}\int \left(3x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x \cdot dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1} + C$$

k) $$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{-\frac{1}{2}} + 2 + x^{\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= 2\sqrt{x} + 2x + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

l) $$\int \frac{1 - cos\,2x}{2x - sen\,2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2 - 2\,cos\,2x}{2x - sen\,2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ ln\,|2x - sen\,2x| + C$$

m) $$\int cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot dx = 2\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

n) $$\int 3x \cdot 3^{x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int 3^{x^2} \cdot 2x\ dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{x^2}}{ln\,3} + C$$

ñ) $$\int \frac{e^{ln\,x}}{x} \cdot dx = e^{ln\,x} + C$$

o) $$\int \frac{dx}{4+7x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{1+\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot arc\ tg\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right) + C$$

p) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-(x^4)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\ arc\cdot\ tg\ (x^4) + C$$

q) $$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \frac{1}{-2}\int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\ dx = -\frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\sqrt{4-x^2} + C$$

r) $$\int \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 3\int \frac{1/2}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = 3 \cdot arc\cdot\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

s) $$\int \frac{3x}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\ ln\,|x^2+9| + C$$

t) $$\int \frac{3}{x^2+9}\,dx = \int \frac{1/3}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx = arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

u) $$\int \frac{1}{(1+x^2) \cdot arc\ tg\ x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\ tg\ x}\,dx = arc\ tg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

v) $$\int \frac{1 - ln\ x}{x\ ln\ x}\,dx = \int \frac{1/x}{ln\ x}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = ln\,|ln\ x| - ln\ x + C$$

w) $$\int \frac{3x}{x^4+16}\,dx = \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\frac{x^4}{16}}\,dx = \frac{3}{8}\int \frac{\frac{2x}{4}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot arc\cdot\ tg\left(\frac{x^2}{4}\right) + C$$

x) $$\int sen^3\,2x \cdot cos\,2x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (sen\,2x)^3 \cdot 2 \cdot cos\,2x\ dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(sen\,2x)^4}{4} + C$$

y) $$\int \frac{3^x}{1+9^x}\,dx = \frac{1}{ln\,3}\int \frac{3^x \cdot ln\,3}{1+(3^x)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{ln\,3} \cdot arc\ tg(3^x) + C$$

z) $$\int tg\ x\ dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\,dx = -\int \frac{-sen\ x}{cos\ x}\,dx = -ln\,|cos\ x| + C$$

2 **Resuelve las siguientes integrales por el método de integración por partes:**

a) $\int x^2 \cdot \cos x\, dx$ ***b)*** $\int x^3 \cdot \ln x\, dv$

c) $\int x^2 \cdot e^x\, dx$ ***d)*** $\int e^x \cdot \cos 2x\, dx$

e) $\int 2^x \cdot \operatorname{sen} x\, dx$ ***f)*** $\int \ln x\, dx$

g) $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$ ***h)*** $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

i) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x\, dx$ ***j)*** $\int (1 - 3x)\, 3^x\, dx$

k) $\int x^3 \cdot \operatorname{sen} 2x\, dx$ ***l)*** $\int e^{-x} \cdot \cos x\, dx$

m) $\int e^{-2x}\, (2x + 1)^2\, dx$ ***n)*** $\int \cos (\ln x)\, dx$

ñ) $\int \ln^2 x\, dx$ ***o)*** $\int x \operatorname{sen} x \cdot \cos x\, dx$

p) $\int x^3 \ln^2 x\, dx$ ***q)*** $\int \frac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

a) $\int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx &\Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot \cos x \cdot dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x - \int 2x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$u = 2x \Rightarrow du = 2 \cdot dx$

$dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow v = -\cos x$

$$I = x^2 \operatorname{sen} x - \left[-2x \cos x - \int 2 \cdot (-\cos x) \cdot dx \right] =$$

$= x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$

Por tanto:

$$\int x^2 \cdot \cos x\, dx = x^2 \cdot \operatorname{sen} x + 2x \cdot \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C$$

b) $\int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = \ln x &\Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^3\, dx &\Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot \ln x \cdot dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4x}\, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

c) $\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx &\Rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = 2x &\Rightarrow du = 2\, dx \\ dv = e^x\, dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2\, e^x - \left[2x\, e^x - \int 2\, e^x\, dx \right] =$$

$= x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C \Rightarrow$

$$\int x^2 \cdot e^x \cdot dx = x^2 \cdot e^x - 2x\, e^x + 2\, e^x + C$$

d) $\int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = \cos 2x &\Rightarrow du = -2 \operatorname{sen} 2x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int e^x \cdot \cos 2x \cdot dx = e^x \cdot \cos 2x - \int -2\, e^x \operatorname{sen} 2x\, dx =$$

$$= e^x \cos 2x + 2 \int e^x \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = \operatorname{sen} 2x &\Rightarrow du = 2 \cdot \cos 2x \cdot dx \\ dv = e^x \cdot dx &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int e^x \cdot \cos 2x + 2 \left[e^x \operatorname{sen} 2x - \int 2\, e^x \cdot \cos 2x\, dx \right] =$$

$$= e^x \cos 2x + 2\, e^x \operatorname{sen} 2x - 4 \int e^x \cdot \cos 2x \Rightarrow$$

$\Rightarrow I = e^x \cdot \cos 2x + 2\, e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 4\, I \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{e^x \cos 2x + 2\, e^x \operatorname{sen} 2x}{5} + C$$

e) $\int 2^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{aligned} u = 2^x &\Rightarrow du = 2^x \cdot \ln 2 \cdot dx \\ dv = \operatorname{sen} x \cdot dx &\Rightarrow v = -\cos x \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int 2^x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = -2^x \cdot \cos x + \int 2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo este método, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2^x \Rightarrow du = 2^x \cdot ln\ 2 \cdot dx \\ dv = cos\ x \cdot dx \Rightarrow v = sen\ x \end{array}\right\}$$

$$I = \int -2^x \cdot cos\ x +$$

$$+ ln\ 2 \left[2^x \cdot sen\ x - \int 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x \cdot dx \right] = -2^x \cdot cos\ x +$$

$$+ 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x - (ln\ 2)^2 \int 2^x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -2^x \cdot cos\ x + 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x - (ln\ 2)^2 \cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{-2^x \cdot cos\ x + 2^x \cdot ln\ 2 \cdot sen\ x}{1 + (ln\ 2)^2} + C$$

f) $\int ln\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\ x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int ln\ x \cdot dx = x \cdot ln\ x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot ln\ x - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int ln\ x \cdot dx = x\ ln\ x - x + C$$

g) $\int arc\ sen\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\ sen\ x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int arc\ sen\ x \cdot dx = x \cdot arc\ sen\ x - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ sen\ x + \frac{1}{2} \int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x)\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ sen\ x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

h) $\int arc\ tg\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\ tg\ x \Rightarrow du = \frac{1}{1 - x^2}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int arc\ tg\ x\ dx = x \cdot arc\ tg\ x - \int \frac{x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ tgx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx =$$

$$= x \cdot arc\ tg\ x - \frac{1}{2}\, ln\left|1 + x^2\right| + C$$

i) $\int \sqrt{x} \cdot ln\ x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\ x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = \sqrt{x} \cdot dx \Rightarrow v = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \sqrt{x} \cdot ln\ x\ dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\, ln\ x - \int \frac{2}{3}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\, ln\ x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C$$

j) $\int (1 - 3x) \cdot 3^x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{l} u = (1 - 3x) \Rightarrow du = -3\, dx \\ dv = 3^x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{3^x}{ln\ 3} \end{array}\right\}$$

$$I = \int (1 - 3x) \cdot 3^x \cdot dx = \frac{(1 - 3x) \cdot 3^x}{ln\ 3} - \int -\frac{3 \cdot 3^x}{ln\ 3}\, dx =$$

$$= \frac{(1 - 3x) \cdot 3^x}{ln\ 3} + \frac{3 \cdot 3^x}{(ln\ 3)^2} + C$$

k) $\int x^3 \cdot sen\ 2x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 \cdot dx \\ dv = sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = -\frac{cos\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot sen\ 2x \cdot dx = -\frac{x^3 \cdot cos\ 2x}{2} - \int \frac{-3x^2 \cdot cos\ 2x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{-x^3 \cdot cos\ 2x}{2} + \frac{3}{2} \int x^2 \cdot cos\ 2x \cdot dx$$

A esta última integral la aplicamos de nuevo el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x \cdot dx \\ dv = cos\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{sen\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{-x^3 \cdot cos\ 2x}{2} + \frac{3}{2}\left[\frac{x^2 \cdot sen\ 2x}{2} - \int 2x \cdot \frac{sen\ 2x}{2} \cdot dx \right] =$$

$$= \frac{-x^3 \cdot cos\ 2x}{2} + \frac{3x^2 \cdot sen\ 2x}{4} - \frac{3}{2} \int x \cdot sen\ 2x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo el método, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow v = \frac{-cos\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{-x^3 \cdot cos\, 2x}{2} + \frac{3x^3 \cdot sen\, 2x}{4} -$$

$$- \frac{3}{2}\left[\frac{-x \cdot cos\, 2x}{2} - \int \frac{-\,cos\, 2x}{2}\, dx\right] = \frac{-x^3 \cdot cos\, 2x}{2} +$$

$$+ \frac{3x^2 \cdot sen\, 2x}{4} + \frac{3x\; cos\, 2x}{4} - \frac{3\; sen\, 2x}{8} + C$$

l) $\int e^{-x} \cdot cos\; x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} \cdot dx \\ dv = cos\; x \cdot dx \Rightarrow v = sen\; x \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^{-x}\, cos\; x\; dx = e^{-x} \cdot sen\; x - \int -e^{-x} \cdot sen\; x \cdot dx =$$

$$= e^{-x} \cdot sen\; x + \int e^{-x} \cdot sen\; x \cdot dx$$

Aplicando de nuevo este método a la última integral, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} \cdot dx \\ dv = sen\; x \cdot dx \Rightarrow v = -\,cos\; x \end{array}\right\}$$

$$I = e^{-x}\, sen\; x + \left[-e^{-x} \cdot cos\; x - \int (-e^{-x})\,(-cos\; x)\; dx\right] =$$

$$= e^{-x}\, sen\; x - e^{-x}\, cos\; x - \int e^{-x} \cdot cos\; x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = e^{-x}\, sen\; x - e^{-x}\, cos\; x - I \Rightarrow I = \frac{e^{-x}\, sen\; x - e^{-x}\, cos\; x}{2} + C$$

m) $\int e^{-2x} \cdot (2x + 1)^2\; dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = (2x+1)^2 \Rightarrow du = 2\,(2x+1) \cdot 2 \cdot dx \\ dv = e^{-2x}\, dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^{-2x} \cdot (2x+1)^2 \cdot dx = \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} -$$

$$- \int \frac{2 \cdot (2x+1) \cdot 2 \cdot e^{-2x}}{-2} \cdot dx = \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} +$$

$$+ 2 \int (2x+1) \cdot e^{-2x} \cdot dx$$

Aplicamos de nuevo este método a esta última integral:

$$\left.\begin{array}{r} u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2\, dx \\ dv = e^{-2x}\, dx \Rightarrow v = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} + 2\left[\frac{(2x+1)\; e^{-2x}}{-2} - \int \frac{2 \cdot e^{-2x}}{-2}\, dx\right] =$$

$$= \frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{-2} - (2x+1) \cdot e^{-2x} + \frac{2\; e^{-2x}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{(2x+1)^2 \cdot e^{-2x}}{2} - (2x+1)\; e^{-2x} - e^{-2x} + C$$

n) $\int cos\,(ln\; x)\; dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = cos\,(lnx) \Rightarrow du = -sen\,(ln\; x) \cdot \dfrac{1}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int cos\,(ln\; x)\; dx = x \cdot cos\,(ln\; x) -$$

$$- \int -x \cdot sen\,(ln\; x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot cos\,(ln\; x) + \int sen\,(ln\; x)\; dx$$

Aplicamos este método a la última integral y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} u = sen\,(ln\; x) \Rightarrow du = cos\,(ln\; x) \cdot \dfrac{1}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = x \cdot cos\,(ln\; x) + \left[x \cdot sen\,(ln\; x) - \int x \cdot cos\,(ln\; x) \cdot \frac{1}{x}\; dx\right] =$$

$$= x \cdot cos\,(ln\; x) + x \cdot sen\,(ln\; x) - \int cos\,(ln\; x)\; dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x \cdot cos\,(ln\; x) + x \cdot sen\,(ln\; x) - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x \cdot cos\,(ln\; x) + x\; sen\,(ln\; x)}{2} + C$$

ñ) $\int ln^2\; x \cdot dx = I$

$$\left.\begin{array}{r} u = ln^2\; x \Rightarrow du = 2 \cdot ln\; x \cdot \dfrac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int ln^2\; x \cdot dx = x \cdot ln^2\; x - \int 2 \cdot x \cdot ln\; x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= x \cdot ln^2\; x - 2 \int ln\; x \cdot dx$$

Aplicamos este método a esta última integral:

$$\left.\begin{array}{r} u = ln\; x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}\, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = x \cdot ln^2\; x - 2\left[x \cdot ln\; x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right] =$$

$$= x \cdot ln^2\; x - 2x\; ln\; x + 2x + C$$

$$o)\ \int x \cdot sen\ x \cdot cos\ x \cdot dx = I = \int \frac{x}{2} \cdot sen\ 2x \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\, dx \\ dv = sen\ 2x \cdot dx \Rightarrow \forall = \frac{-cos\ 2x}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{x}{2} \cdot sen\ 2x \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{-cos\ 2x}{2}\right) - \int \frac{1}{2}\left(\frac{-cos\ 2x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{-x \cdot cos\ 2x}{4} + \frac{1}{4}\int cos\ 2x \cdot dx = \frac{-x\ cos\ 2x}{4} + \frac{sen\ 2x}{8} + C$$

$$p)\ \int x^3 \cdot ln^2\ x \cdot dx = I$$

$$\left.\begin{array}{l} u\ ln^2\ x \Rightarrow du = 2\ ln\ x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^3\ dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^3 \cdot ln^2\ x \cdot dx = \frac{x^4}{4}\, ln^2\ x - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2\ ln\ x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\, ln^2\ x - \frac{1}{2}\int x^3 \cdot ln\ x \cdot dx$$

Aplicando este método a la última integral, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\ x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^3\ dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{x^4}{4}\, ln^2\ x - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\, ln\ x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right] =$$

$$= \frac{x^4}{4}\, ln^2\ x - \frac{x^4}{8}\, ln\ x + \frac{x^4}{32} + C$$

$$q)\ \int \frac{x \cdot arc\ senx}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = I$$

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\ sen\ x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \Rightarrow v = -\sqrt{1 - x^2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int \frac{x \cdot arc\ senx}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\sqrt{1 - x^2} \cdot arc\ senx -$$

$$- \int \frac{-\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\sqrt{1 - x^2} \cdot arc\ sen\ x + x + C$$

3 **Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de funciones racionales:**

$$a)\ \int \frac{x}{x - 2}\, dx \qquad b)\ \int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

$$c)\ \int \frac{x^3}{x^2 - 1}\, dx \qquad d)\ \int \frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)}\, dx$$

$$e)\ \int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 (x + 1)}\, dx \qquad f)\ \int \frac{3x^2 + 5x - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\, dx$$

$$g)\ \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}\, dx \qquad h)\ \int \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x + 1}\, dx$$

$$i)\ \int \frac{dx}{x^3 - 1} \qquad j)\ \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$k)\ \int \frac{x^3 + 4x}{x^2 + 1}\, dx \qquad l)\ \int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$$

$$m)\ \int \frac{2x^2 + 4x + 2}{x + 1}\, dx \qquad n)\ \int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2}\, dx$$

$$ñ)\ \int \frac{x + 3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx \qquad o)\ \int \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 4}\, dx$$

$$p)\ \int \frac{x^2 - 1}{3x^3 - 11x^2 + 12x - 4}\, dx \qquad q)\ \int \frac{x^4}{(x - 1)^2}\, dx$$

$$a)\ \int \frac{x}{x - 2}\, dx = \int \frac{x - 2}{x - 2}\, dx + \int \frac{2}{x - 2}\, dx = x + 2\ ln\,|x - 2| + C$$

$$b)\ \int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

Descomponemos la fracción integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x\,(x - 1)\,(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 2}$$

$$\frac{1}{x\,(x - 1)\,(x - 2)} =$$

$$= \frac{A\,(x - 1)\,(x - 2) + B \cdot x \cdot (x - 2) + C \cdot x\,(x - 1)}{x\,(x - 1)\,(x - 2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow -B = 1 \Rightarrow B = -1$
- $x = 0 \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $x = 2 \Rightarrow 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x - 1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x - 2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, ln\,|x| - ln\,|x - 1| + \frac{1}{2}\, ln\,|x - 2| + C = ln\left|\frac{\sqrt{x\,(x - 2)}}{x - 1}\right| + C$$

$$c)\ \int \frac{x^3}{x^2 - 1}\, dx = \int \frac{x\,(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1}\, dx =$$

$$= \int x\ dx + \int \frac{x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\, ln\,|x^2 - 1| + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)}\,dx$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{A}{1 - x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}$$

$$\frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)} = \frac{A\ (1 + x^2) + (Bx + C)(1 - x)}{(1 - x)(1 + x^2)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$
- $x = 0 \Rightarrow A + C = 0 \Rightarrow C = -1$
- $x = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow B = 0$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{x^2 + x}{(1 - x)(1 + x^2)}\,dx = \int \frac{1}{1 - x}\,dx + \int \frac{-1}{1 + x^2}\,dx =$$

$= -ln\,|1 - x| - arc\ tg\ x + C$

e) $\displaystyle\int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)}\,dx$

Descomponemos la fracción en suma de fracciones simples:

$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{x + 1}$$

$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} =$$

$$= \frac{A\ (x + 1) + B\,(x - 1)(x + 1) + C\,(x - 1)^2}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)}$$

- $x = 1 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$
- $x = -1 \Rightarrow 4C = -8 \Rightarrow C = -2$
- $x = 0 \Rightarrow A - B + C = -1 \Rightarrow B = 1$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)}\,dx = \int \frac{2}{(x - 1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x - 1}\,dx +$$

$$+ \int \frac{-2}{x + 1}\,dx = -\frac{2}{x - 1} + ln\,|x - 1| - 2\ ln\,|x + 1| + C =$$

$$= \frac{-2}{x - 1} + ln\left|\frac{x - 1}{(x + 1)^2}\right| + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5x - 7}{x^3 - 2x^2 + x - 2}\,dx$

Descomponemos la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x^2 + 5x - 7}{(x - 2)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\frac{3x^2 + 5x - 7}{(x - 2)(x^2 + 1)} = \frac{A\ (x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 1)}$$

- $x = 2 \Rightarrow 5A = 15 \Rightarrow A = 3$
- $x = 0 \Rightarrow A - 2C = -7 \Rightarrow C = 5$
- $x = 1 \Rightarrow 2A - B - C = 1 \Rightarrow B = 0$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{3x^2 + 5x - 7}{(x - 2)(x^2 + 1)}\,dx = \int \frac{3}{x - 2}\,dx + \int \frac{5}{x^2 + 1}\,dx =$$

$= 3\ ln\,|x \angle 2| + 5 \cdot arc\ tg\ x + C$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}\,dx$

Procediendo de forma análoga a las anteriores obtenemos:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x\,(x - 1)(x + 1)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x - 1}\,dx +$$

$$+ \int \frac{1}{x + 1}\,dx = -ln\,|x| + ln\,|x - 1| + ln\,|x + 1| =$$

$$= ln\left|\frac{(x + 1)(x - 1)}{x}\right| + C$$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 + x + 1}\,dx$

Procediendo de modo análogo, obtenemos:

$$\int \frac{x^2 - x}{(x + 1)(x^2 + 1)}\,dx = \int \frac{1}{x + 1}\,dx + \int \frac{-1}{x^2 + 1}\,dx =$$

$= ln\,|x + 1| - arc\ tg\ x + C$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 1}$

Descomponemos la función en suma de fracciones simples y obtenemos:

$$\frac{1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x}{x - 1} + \frac{\frac{-1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2 + x + 1}$$

La integral pedida vale:

$$\int \frac{1}{x^3 - 1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x - 1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2 + x + 1}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| - \frac{1}{6}\,ln\,|x^2 + x + 1| - \frac{3}{6}\int \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| - \frac{1}{6}\,ln\,|x^2 + x + 1| -$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\int \frac{1}{1 + \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,ln\,|x - 1| -$$

$$-\frac{1}{6}\ ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ ln\left|x-1\right|-\frac{1}{6}\ ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{\sqrt{3}}{3}\ arc\ tg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=ln\left|\sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\right|-\frac{\sqrt{3}}{3}\ arc\ tg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

j) $$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ arc\ tg\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot arc\ tg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

k) $$\int\frac{x^3+4x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{x\,(x^2+1)+3x}{x^2+1}\,dx=\int x\,dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ ln\left|x^2+1\right|+C$$

l) $$\int\frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx=$$

$$=\int\frac{(x-1)\,(x^3+x^2-2x)+(3x^2-6)}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int(x-1)\,dx+$$

$$+\int\frac{3x^2-6}{x^3+x^2-2x}\,dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{3}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x-1}\,dx+$$

$$+\int\frac{1}{x+2}\,dx=\frac{x^2}{2}-x+ln\left|\frac{x^3\cdot(x+2)}{x-1}\right|+C$$

(*) Esta integral la obtendremos descomponiendo la fracción $\frac{3x^2-6}{x\,(x-1)\,(x+2)}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x^2-6}{x\,(x-1)\,(x+2)}=\frac{3}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

m) $$\int\frac{2x^2+4x+2}{x+1}\,dx=\int\frac{(2x+2)\,(x+1)}{x+1}\,dx=$$

$$=\int(2x+2)\,dx=x^2+2x+C$$

n) $$\int\frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{(x^2+1)\cdot x-x}{(x^2+1)^2}\,dx=$$

$$=\int\frac{(x^2+1)\cdot x}{(x^2+1)^2}\,dx-\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=$$

$$=\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\int(x^2+1)^{-2}\cdot x\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\int(x^2+1)^{-2}\cdot 2x\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ ln\left|x^2+1\right|-\frac{1}{2}\ \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2\,(x^2+1)}+C$$

ñ) $$\int\frac{x+3}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx=\int\frac{x+3}{(x-1)^3}\,dx$$

$$=\int\frac{(x-1)+4}{(x-1)^3}\,dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{4}{(x-1)^3}\,dx=$$

$$=\int(x-1)^{-2}\,dx+4\int(x-1)^{-3}\,dx=\frac{-1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+C$$

o) $$\int\frac{x^3-3x^2}{x^2-4}\,dx=\int\frac{(x^2-4)\,(x-3)+4x-12}{x^2-4}\,dx=$$

$$=\int\frac{(x^2-4)\,(x-3)}{x^2-4}\,dx+\underset{(*)}{\int\frac{4x-12}{x^2-4}\,dx}=\int(x-3)\,dx+$$

$$+\int\frac{-1}{x-2}\,dx+\int\frac{5}{x+2}\,dx=\frac{x^2}{2}-3x-ln\left|x-2\right|+$$

$$+5\ ln\left|x+2\right|=\frac{x^2}{2}-3x+ln\left|\frac{(x+2)^5}{x-2}\right|+C$$

(*) Esta integral la resolvemos descomponiendo la fracción $\frac{4x-12}{x^2-4}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{4x-12}{x^2-4}=\frac{-1}{x-2}+\frac{5}{x+2}$$

p) $$\int\frac{x^2-1}{3x^3-11x^2+12x-4}\,dx=\int\frac{(x-1)\,(x+1)}{(x-1)\,(x-2)\,(3x-2)}\,dx=$$

$$= \int \frac{x+1}{(x-2)\,(3x-2)}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{3x-2}\,dx =$$

(*)

$$= ln \left| \frac{\sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[12]{(3x-2)^5}} \right| + C$$

(*) Descomponemos la fracción $\frac{x+1}{(x-2)\,(3x-2)}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{(x-2)\,(3x-2)} = \frac{3/4}{x-2} + \frac{-5/4}{3x-2}$$

q) $$\int \frac{x^4}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x+3)\,(x-1)^2 + 4x - 3}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \int (x^2+2x+3)\,dx + \int \frac{4x-3}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x +$$

$$+ \int \frac{4\,(x-1)+1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + \int \frac{4\,(x-1)}{(x-1)^2}\,dx +$$

$$+ \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\int \frac{1}{x-1}\,dx +$$

$$+ \int (x-1)^{-2}\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\,ln\,|x-1| +$$

$$+ \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\,ln\,|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

4 **Resuelve las siguientes integrales por el método de integración de cambio de variable.**

a) $\int x\,\sqrt{x-1}\;dx$ *b)* $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

c) $\int \frac{\sqrt[3]{1+ln\,x}}{x}\,dx$ *d)* $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)\,\sqrt{x+1}}$ *f)* $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{x \cdot ln^2\,x}$ *h)* $\int \frac{sen\;3x}{\sqrt[3]{1+3\;cos\;3x}}\,dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$ *j)* $\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$ *l)* $\int \frac{dx}{x\,\sqrt{x+4}}$

m) $\int \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$ *n)* $\int \sqrt{25-x^2}\;dx$

ñ) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$ *o)* $\int \frac{dx}{e^x\,(e^x-3)}$

p) $\int \frac{sen\;x \cdot cos\;x}{1-cos\;x}\,dx$ *q)* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}}$

a) $\int x \cdot \sqrt{x-1}\;dx$

Hacemos el cambio de variables:
$x-1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\;dt$

$$\int x \cdot \sqrt{x-1}\;dx = \int (t^2+1) \cdot t \cdot 2t\;dt = \int (2t^4+2t^2)\;dt =$$

$$= \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + C$$

Deshaciendo el cambio $t = \sqrt{x-1}$, obtenemos:

$$\int x\,\sqrt{x-1}\;dx = 2\,\frac{\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\,\sqrt{(x-1)^3}}{3} + C$$

b) $$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -ln\,|1+e^{-x}| + C$$

También se puede hacer mediante el cambio de variable: $1+e^{-x} = t$

c) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+ln\,x}}{x}\,dx = \int (1+ln\,x)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{(1+ln\,x)^{\frac{4}{3}}}{4/3} =$$

$$= \frac{3}{4}\,\sqrt[3]{(1+ln\,x)^4} + C$$

También se puede hacer con el cambio de variable: $1 + ln\,x = t$.

d) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx$

Hacemos el cambio de variable:
$2x-3 = t^2 \Rightarrow dx = t\;dt$

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx = \int \frac{t}{t+1} \cdot t\;dt = \int \frac{t^2}{t+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t+1)\,(t-1)+1}{t+1}\,dt = \int (t-1)\,dt + \int \frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + ln\,|t+1| + C$$

Deshaciendo el cambio: $t = \sqrt{2x-3}$, obtenemos:

$$\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x-3}+1}\,dx = \frac{2x-3}{2} - \sqrt{2x-3} + ln\,|\sqrt{2x-3}+1| + C$$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)\,\sqrt{x+1}}$

Hacemos el cambio: $x+1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\;dt$

$$\int \frac{dx}{(x+5)\,\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t\;dt}{(t^2+4) \cdot t} = \int \frac{2}{t^2+4}\,dt =$$

$$= \int \frac{1/2}{1 + t^2/4}\, dt = \int \frac{1/2}{1 + (t/2)^2}\, dt = arc\ tg\left(\frac{t}{2}\right) + C =$$

$= arc\ tg\dfrac{\sqrt{x+1}}{2} + C$ tras deshacer el cambio con $t = \sqrt{x+1}$.

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx$

Hacemos el cambio: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx = \int \frac{t}{t^2+2} \cdot 2t \cdot dt = \int \frac{2t^2}{t^2+2}\, dt =$$

$$= 2\int \frac{(t^2+2)-2}{t^2+2}\, dt = 2\int \frac{t^2+2}{t^2+2}\, dt - 4\int \frac{1}{t^2+2}\, dt =$$

$$= 2t - 2\int \frac{1}{1+\frac{t^2}{2}}\, dt = 2t - 2\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt =$$

$$= 2t - 2\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dt = 2t - 2\sqrt{2}\cdot arc\ tg\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\cdot arc\ tg\sqrt{\frac{x}{2}} + C$$

al deshacer el cambio con $t = \sqrt{x}$.

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\cdot ln^2\, x} = \int (ln\, x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \frac{(ln\, x)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{ln\, x} + C$

También se puede hacer mediante el cambio de variable $lnx = t$.

h) $\displaystyle\int \frac{sen\, 3x}{\sqrt[3]{1+3\, cos\, 3x}}\, dx = \int (1+3\, cos\, 3x)^{-\frac{1}{3}}\cdot sen\, 3x\cdot dx =$

$$= \frac{1}{-9}\int (1+3\, cos\, 3x)^{-\frac{1}{3}}\cdot(-9\, sen\, 3x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{9}\,\frac{(1+3\, cos\, 3x)^{2/3}}{2/3} = \frac{-\sqrt[3]{(1+3\, cos\, 3x)^2}}{6} + C$$

También se puede hacer mediante el cambio de variable:
$1 + 3\, cos\, 3x = t^3$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$

Hacemos el cambio $x^2 + 1 = t^2 \Rightarrow dx = \dfrac{t\, dt}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = \int \frac{t}{x}\cdot\frac{t\, dt}{x} = \int \frac{t^2}{x^2}\, dt = \int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\, dt = \int \frac{t^2-1}{t^2-1}\, dt = \int \frac{1}{t^2-1}\, dt = t + \int \frac{1/2}{t-1}\, dt +$$

$$+ \int \frac{-1/2}{t+1}\, dt = t + \frac{1}{2}\, ln\,|t-1| - \frac{1}{2}\, ln\,|t+1| + C =$$

$$= t + ln\left|\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right| + C = \sqrt{x^2+1} + ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}} + C$$

j) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2-x}}\, dx =$

$$= \int \frac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx - \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, dx - \int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x\cdot dx =$$

$$= 2\int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\, dx - \frac{1}{-2}\int (4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\, dx =$$

$$= 2\, arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{(4-x^2)^{1/2}}{1/2} + C =$$

$$= 2\, arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2} + C$$

k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\, dx$

Hacemos el cambio $1 - x^3 = t^2 \Rightarrow dx = \dfrac{-2t\, dt}{3x^2}$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\, dx = \int \frac{\sqrt{x}}{t}\cdot\frac{-2t\, dt}{3x^2} = \frac{-2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dt =$$

$$= \frac{-2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{-2}{3}\, arc\ sent = \frac{-2}{3}\, arc\ sen\left(\sqrt{1-x^3}\right) + C$$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}}$

Hacemos el cambio $x + 4 = t^2 \Rightarrow dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = \int \frac{2t\, dt}{(t^2-4)\cdot t} = \int \frac{2}{t^2-4}\, dt =$$

$$= \int \frac{1/2}{t-2}\, dt + \int \frac{-1/2}{t+2}\, dt = \frac{1}{2}\, ln\,|t-2| - \frac{1}{2}\, ln\,|t+2| + C =$$

$$= ln\left|\sqrt{\frac{t-2}{t+2}}\right| + C = ln\left|\sqrt{\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}}\right| + C$$

m) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}\, dx = 5\int \frac{1/5}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}}\, dx =$

$$= 5\cdot arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

También se puede hacer mediante el cambio: $x = 5 \cdot sen\ t \Rightarrow dx = 5\ cos\ t \cdot dt$, quedando:

$$\int \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx = \int \frac{5}{\sqrt{25 - 25\ sen^2\ t}} \cdot 5\ cos\ t\ dt =$$

$$= \int \frac{25\ cos\ t}{5\ cos\ t}\, dt = 5t = 5 \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

después de deshacer el cambio $t = arc \cdot sen\ \left(\frac{x}{5}\right)$

n) $\displaystyle\int \sqrt{25 - x^2}\ dx$

Hacemos el cambio $x = 5 \cdot sen\ t \Rightarrow dx = 5 \cdot cos\ t \cdot dt$

$$\int \sqrt{25 - x^2} \cdot dx = \int \sqrt{25 - 25\ sen^2\ t} \cdot 5 \cdot cos\ t \cdot dt =$$

$$= \int 5\ cos\ t \cdot 5\ cos\ t\ dt = 25 \int cos^2\ t \cdot dt =$$

$$= 25 \int \frac{1 + cos\ 2t}{2}\, dt = \frac{25}{2} \int dt + \frac{25}{2} \int cos\ 2t \cdot dt =$$

$$= \frac{25}{2}\, t + \frac{25}{4}\, sen\ 2t + C = \frac{25}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{25}{4} \cdot 2 \cdot$$

$$\cdot\ sen\ t \cdot cos\ t + C = \frac{25}{2}\, arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{25}{2} \cdot \frac{x}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}\ +$$

$$+\ C = \frac{25}{2}\, arc\ sen\left(\frac{x}{5}\right) + \frac{x}{2}\, \sqrt{25 - x^2} + C$$

ñ) $\displaystyle\int \frac{x}{x + \sqrt{x}}\, dx$

Hacemos el cambio $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\ dt$

$$\int \frac{t^2}{t^2 + t} \cdot 2t\ dt = \int \frac{2t^2}{t + 1}\, dt = \int \frac{2\,(t + 1)\,(t - 1) + 2}{t + 1}\, dt =$$

$$= \int 2\,(t - 1)\ dt + \int \frac{2}{t + 1}\, dt = t^2 - 2t + 2\ ln\,|t + 1| + C =$$

$$= x - 2\sqrt{x}\ 2\ ln\,|\sqrt{x} + 1| + C$$

o) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\,(e^x - 3)}$

Hacemos el cambio $e^x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{e^x}$

$$\int \frac{dx}{e^x\,(e^x - 3)} = \int \frac{1}{t\,(t - 3)} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2\,(t - 3)}\, dt =$$

$$= \frac{-1}{3} \int \frac{1}{t^2}\, dt - \frac{1}{9} \int \frac{1}{t}\, dt + \frac{1}{9} \int \frac{1}{t - 3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{9}\, ln\,|t| + \frac{1}{9}\, ln\,|t - 3| + C = \frac{1}{3e^x} + ln \sqrt[9]{\frac{e^x - 3}{e^x}} + C$$

Hemos descompuesto la fracción $\dfrac{1}{t^2\,(t - 3)}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2\,(t - 3)} = \frac{-1/3}{t^2} + \frac{-1/9}{t} + \frac{1/9}{t - 3}$$

p) $\displaystyle\int \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{1 - cos\ x}\, dx$

Hacemos el cambio: $cos\ x = t \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{-sen\ x}$

$$\int \frac{sen\ x \cdot cos\ x}{1 - cos\ x} \cdot dx = \int \frac{sen\ x \cdot t}{1 - t} \cdot \frac{dt}{-sen\ x} = \int \frac{t}{t - 1}\, dt =$$

$$= \int \frac{t - 1 + 1}{t - 1}\, dt = \int \frac{t - 1}{t - 1}\, dt + \int \frac{1}{t - 1}\, dt = t + ln\,|t - 1| =$$

$$= cos\ x + ln\,|cos\ x - 1| + C$$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}}$

Hacemos el cambio $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\ d$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3\ dt}{t^2 - t} = \int \frac{4t^2}{t - 1}\, dt =$$

$$= \int \frac{4\,(t - 1)\,(t + 1) + 4}{t - 1}\, dt = 4 \int (t + 1)\ dt + 4 \int \frac{1}{t - 1}\, dt =$$

$$= 2t^2 + 4t + 4\ ln\,|t - 1| = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ ln\,|\sqrt[4]{x} - 1| + C$$

5 Resuelve las siguientes integrales por el método de integración más conveniente:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x + 1}}\, dx$ *b)* $\displaystyle\int x^2 \cdot arc\ sen\ x\ dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 + 4x - x^2}}\, dx$ *d)* $\displaystyle\int sen^3\ x\ dx$

e) $\displaystyle\int \frac{arc\ sen\ x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{3x}{x^4 + 16}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{[ln\ x]^5}{x}\, dx$ *h)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ [ln\ x - 1]}$

i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + ln\ x}{2x}\, dx$ *j)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1)\ \sqrt{x^2 + 2x}}$

k) $\displaystyle\int \frac{ln\ (ln\ x)}{x}\, dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}\, dx$

m) $\displaystyle\int sen\ (ln\ x) \cdot dx$ *n)* $\displaystyle\int \frac{x}{cos^2\ x}\, dx$

ñ) $\displaystyle\int ln\ \left[x + \sqrt{1 + x^2}\right] dx$ *o)* $\displaystyle\int \frac{6x^3 - x}{1 + x^4}\, dx$

p) $\int x \ln (x^2-1) \, dx$

q) $\int \frac{6x^3-7x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

r) $\int x \cdot \ln \left[\frac{1-x}{1+x}\right] dx$

s) $\int \frac{x^5+1}{x^4-1} \, dx$

t) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$

u) $\int sen^4 5x \cdot cos\ 5x \, dx$

v) $\int \frac{cos\ 5x}{sen^4 5x} \, dx$

w) $\int \sqrt{6-5x^2} \, dx$

x) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} \, dx$

y) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} \, dx$

z) $\int \frac{1}{x(4+\ln^2 x)} x$

a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \, dx$

La resolvemos por el método de cambio de variable haciendo: $x+1=t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{1}{1+t} \cdot 2t\,dt = \int \frac{2(t+1)-2}{t+1}\,dt = \int 2\,dt - \int \frac{2}{t+1}\,dt =$$

$$= 2t - 2\ln|t+1| = 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C$$

b) $\int x^2 \cdot arc\ sen\ x \cdot dx = I$

La resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = arc\ sen\ x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ dv = x^2\,dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x^2 \cdot arc\ sen\ x \cdot dx = \frac{x^3}{3}\, arc\ sen\ x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Esta última integral la resolvemos por cambio de variables, haciendo $1-x^2=t^2 \Rightarrow dx = \frac{-t\,dt}{x}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x^3}{t}\cdot\frac{-t\,dt}{x} = \int -x^2 \cdot dt = \int (t^2-1)\,dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - t = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \sqrt{1-x^2}$$

Por tanto, la integral pedida vale:

$$\int x^2 \cdot arc\ sen\ x \cdot dx = \frac{x^3}{x} \cdot arc\ senx -$$

$$- \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \sqrt{1-x^2}\right] = \frac{x^3}{3}\, arc\ senx - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9} +$$

$$+ \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + C$$

c) $$\int \frac{1}{\sqrt{1+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-(2-x)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(2-x)^2}{5}}}\,dx = -\int \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-x}{\sqrt{5}}\right)^2}}\,dx =$$

$$= -arc\ sen\left(\frac{2-x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

d) $$\int sen^3 x \cdot dx = \int sen\ x \cdot sen^2 x \cdot dx =$$

$$= \int sen\,x\,(1-cos^2 x)\,dx = \int sen\ x\ dx -$$

$$- \int (cos\,x)^2 \cdot sen\ x \cdot dx = -cos\ x + \int (cos\,x)^2\,(-sen\,x)\,dx =$$

$$= -cos\,x + \frac{(cos\,x)^3}{3} + C$$

e) $$\int \frac{arc\ senx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int (arc\ senx)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \frac{(arc\ senx)^2}{2} + C$$

f) $$\int \frac{3x}{x^4+16}\,dx = \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\frac{x^4}{16}}\,dx = \int \frac{\frac{3x}{16}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{\frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}\,dx = \frac{3}{8}\cdot arc\ tg\left(\frac{x^2}{4}\right) + C$$

g) $$\int \frac{(ln\ x)^5}{x}\cdot dx = \int (ln\ x)^5 \cdot \frac{1}{x}\cdot dx = \frac{(ln\ x)^6}{6} + C$$

h) $$\int \frac{dx}{x\,(ln\ x-1)} = \int \frac{1/x \cdot dx}{ln\ x - 1} = ln\,|ln\ x - 1| + C$$

i) $$\int \frac{\sqrt{x}+ln\ x}{2x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}}{2x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{ln\ x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int ln\ x \cdot \frac{1}{x}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{2}\,\frac{(ln\ x)^2}{2} + C =$$

$$= \sqrt{x} + \frac{(ln\ x)^2}{4} + C$$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

Hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo: $x^2 + 2x = t \Rightarrow dx = \dfrac{t\,dt}{x+1}$

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} = \int \frac{1}{(x+1)\cdot t}\cdot\frac{t\,dt}{x+1} + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = arc\ tg\ t =$$

$$= arc\ tg\sqrt{x^2+2x} + C$$

k) $\displaystyle\int \frac{ln\,(ln\,x)}{x}\,dx = I$

Hacemos esta integral por el método de cambio de variable, haciendo: $lnx = t \Rightarrow dx = x \cdot dt$

$$I = \int \frac{ln\,t}{x}\cdot x\,dt = \int ln\,t \cdot dt$$

Esta última integral la hacemos por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = ln\,t \Rightarrow du = \frac{1}{t}\,dt \\ dv = dt \Rightarrow v = t \end{array}\right\}$$

$$\int ln\,t \cdot dt = t \cdot ln\,t - \int t \cdot \frac{1}{t}\cdot dt = t\cdot ln\,t - t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{ln\,(ln\,x)}{x}\cdot dx = ln\,x \cdot [ln\,(ln\,x)] - ln\,x + C$$

l) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

Ésta es una integral racional en la cual el grado del polinomio numerador es mayor que el grado del polinomio denominador, por tanto dividimos numerador por denominador y obtenemos:

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \int \frac{(x^3-4x)(x^2+x+4)+(4x^2+16x-8)}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \int (x^2+x+4)\,dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx$$

Esta última integral la resolvemos descomponiendo la fracción $\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} + \frac{-3}{x+2}$$

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{5}{x-2}\,dx +$$

$$+ \int \frac{-3}{x+2}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\,ln\,|x| + 5\,ln\,|x-2| -$$

$$-3\,ln\,|x+2| + C$$

m) $\displaystyle\int sen\,(ln\,x)\,dx = I$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes.

$$\left.\begin{array}{r} u = sen\,(ln\,x) \Rightarrow du = cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int sen\,(ln\,x)\,dx = x \cdot sen\,(ln\,x) -$$

$$- \int x \cdot cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = x\cdot sen\,(ln\,x) - \int cos\,(ln\,x)\,dx$$

Volvemos a aplicar este método a la última integral:

$$\left.\begin{array}{r} u = cos\,(ln\,x) \Rightarrow du = -sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = x\cdot sen\,(ln\,x) - \left[x\cdot cos\,(ln\,x) - \int -x\,sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right] =$$

$$= x\cdot sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x) - \int sen\,(ln\,x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x\,sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x) - I \Rightarrow 2I = x\,sen\,(ln\,x) -$$

$$- x\,cos\,(ln\,x) \Rightarrow I = \frac{x\,sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x)}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{x\,sen\,(ln\,x) - x\,cos\,(ln\,x)}{2} + C$$

n) $\displaystyle\int \frac{x}{cos^2\,x}\,dx = I$

Hacemos esta integral por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{r} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{1}{cos^2\,x}\,dx \Rightarrow v = tg\,x \end{array}\right\}$$

$$I = x\cdot tg\,x - \int tg\,x\cdot dx = x\cdot tg\,x - \int \frac{sen\,x}{cos\,x}\,dx =$$

$$= x\cdot tg\,x + ln\,|cos\,x| + C$$

ñ) $\int ln\,(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx = I$

Hacemos esta integral por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) \Rightarrow du = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) \cdot dx = x \cdot ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) -$$

$$- \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = x \cdot ln\,(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C$$

o) $\int \dfrac{6x^3 - x}{1 + x^4}\,dx = \int \dfrac{6x^3}{1 + x^4}\,dx - \int \dfrac{x}{1 + x^4}\,dx =$

$$= \frac{6}{4} \int \frac{4x^3}{1 + x^4}\,dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + (x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\,ln\,|1 + x^4| - \frac{1}{2}\,arc\ tg(x^2) + C$$

p) $\int x \cdot ln\,(x^2 - 1) \cdot dx = I$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\,(x^2 - 1) \Rightarrow du = \dfrac{2x}{x^2 - 1}\,dx \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x \cdot ln\,(x^2 - 1) \cdot dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2 - 1) - \int \frac{x^3}{x^2 - 1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2 - 1) - \int \frac{(x^2 - 1)\,x + x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2 - 1) -$$

$$- \int x\,dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\,(x^2 - 1) - \frac{x^2}{2} -$$

$$- \frac{1}{2}\,ln\,|x^2 - 1| + C$$

q) $\int \dfrac{6x^3 - 7x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx = \int \dfrac{6x^3}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx - \int \dfrac{7x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx =$

$$= \frac{6}{-4} \int (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x^3)\,dx - \frac{7}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{2}\,\frac{(1 - x^4)^{\frac{1}{2}}}{1/2} - \frac{7}{2}\,arc\ sen(x^2) =$$

$$= -3\sqrt{1 - x^4} - \frac{7}{2} \cdot arc\ sen(x^2) + C$$

r) $\int x \cdot ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right) dx = I$

Hacemos esta integral por medio del método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right) \Rightarrow du = \dfrac{-2}{1 - x^2}\,dx \\ dv = x \cdot dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}$$

$$I = \int x \cdot ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{-2}{1 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) - \int \frac{x^2}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) -$$

$$- \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) - \int \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1}\,dx -$$

$$- \int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx = \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) - x - \underbrace{\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx}_{(*)} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) - x - \int \frac{1/2}{x - 1}\,dx - \int \frac{-1/2}{x + 1}\,dx +$$

$$+ \frac{x^2}{2}\,ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) - x - \frac{1}{2}\,ln\,|x - 1| + \frac{1}{2}\,ln\,|x + 1| + C$$

(*) En esta integral hemos aplicado el método de integración de funciones racionales, descomponiendo la fracción $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{(x - 1)\,(x + 1)} = \frac{1/2}{x - 1} + \frac{-1/2}{x + 1}$$

s) $\int \dfrac{x^5 + 1}{x^4 - 1}\,dx$

Esta integral la resolvemos por el método de integrales racionales 1) dividiendo y 2) en la integral que quede descomponiendo la fracción en suma de fracciones simples:

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 1}\,dx = \int \frac{x\,(x^4 - 1) + x + 1}{x^4 - 1}\,dx = \int x\,dx +$$

$$+ \int \frac{x + 1}{(x^2 + 1)\,(x + 1)\,(x - 1)}\,dx = \frac{x^2}{2} +$$

$$+ \int \frac{1}{(x^2 + 1)\,(x - 1)}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2 + 1}\,dx + \int \frac{1/2}{x - 1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{-1}{2} \int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1}\,dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\,ln\,|x^2 + 1| - \frac{1}{2}\,arc\ tgx + \frac{1}{2}\,ln\,|x - 1| + C$$

$$t)\ \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por cambio de variable, haciendo

$$x = tgt \Rightarrow dx = (1 + tg^2 t)\,dt$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{tg^2\,t}{(1+tg^2\,t)^2}\cdot(1+tg^2\,t)\,dt =$$

$$= \int \frac{tg^2\,t \cdot dt}{1+tg^2\,t} = \int \frac{tg^2\,t+1-1}{tg^2\,t+1}\,dt = \int \frac{tg^2\,t+1}{tg^2\,t+1}\,dt -$$

$$-\int \frac{1}{tg^2\,t+1}\,dt = t - \int cos^2\,t\,dt = t - \int \frac{1+cos\,2t}{2}\,dt = t -$$

$$-\frac{t}{2} - \frac{sen\,2t}{4} = \frac{t}{2} - \frac{sen\,2t}{4} = \frac{arc\ tg\ x}{2} - \frac{sen\left[2\,(arc\ tg\ x)\right]}{4} + C$$

$$u)\ \int sen^4\,5x \cdot cos\,5x \cdot dx = \frac{1}{5}\int (sen\,5x)^4 \cdot 5 \cdot cos\,5x\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{(sen\,5x)^5}{5} + C$$

$$v)\ \int \frac{cos\,5x}{sen^4\,5x}\,dx = \frac{1}{5}\int (sen\,5x)^{-4}\cdot 5 \cdot cos\,5x \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{5}\,\frac{(sen\,5x)^{-3}}{-3} = \frac{-1}{15\,(sen\,5x)^3} + C$$

$$w)\ \int \sqrt{6-5x^2}\cdot dx$$

Esta integral la resolvemos por el método de integración por cambio de variable, haciendo

$$x = \frac{\sqrt{6}\cdot sen\ t}{\sqrt{5}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{6}\cdot cos\ t}{\sqrt{5}}\cdot dt$$

$$\int \sqrt{6-5x^2}\cdot dx = \int \sqrt{6 - 5\cdot\frac{6\,sen^2\,t}{5}}\cdot\frac{\sqrt{6}\cdot cos\ t}{\sqrt{5}}\cdot dt =$$

$$= \int \frac{6}{\sqrt{5}}\,cos^2\,t\,dt = \frac{6}{\sqrt{5}}\int \frac{1+cos\,2t}{2}\,dt = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot t +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}}\,sen\,2t = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot arc\ sen\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{2\sqrt{5}}\cdot 2\cdot sen\ t\cdot cos\ t = \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot arc\ sen\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{6}} +$$

$$+ \frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{6}}\right)^2} + C$$

$$x)\ \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = \int \sqrt{\frac{2+x^2}{(2+x^2)\,(2-x^2)}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\,dx = arc\ sen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$y)\ \int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$$

Esta integral la resolvemos por el método de cambio de variable, haciendo $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5dt$

$$\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx = \int \frac{t^3-t}{t^2+1}\cdot 6t^5\,dt = \int \frac{6t^8-6t^6}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{(6t^6-12t^4+12t^2-12)\,(t^2+1)+12}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int (6t^6-12t^4+12t^2-12)\,dt + \int \frac{12}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{6t^7}{7} - \frac{12t^5}{5} + \frac{12t^3}{3} - 12t + 12\cdot arc\ tg\ t =$$

$$= \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{12\sqrt[6]{x^5}}{5} + 4\sqrt{x} - 12\sqrt[6]{x} + 12\cdot arc\ tg\sqrt[6]{x} + C$$

$$z)\ \int \frac{1}{x\,(4+ln^2\,x)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{ln\ x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}x}{1+\left(\frac{ln\ x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,arc\ tg\left(\frac{ln\ x}{2}\right) + C$$

6 **Sea la función primitiva de la función g. Calcula una primitiva de *g* que se anule en *x = a*.**

Si $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$, todas las primitivas de $g(x)$ son de la forma $F(x) = G(x) + C$.

La primitiva que se anule para $x = a$ verifica:

$$F(a) = G(a) + C = 0 \Rightarrow C = -G(a)$$

es decir la primitiva buscada es:

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

7 **Halla la primitiva de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ cuya gráfica pase por el punto (2, 2).**

Calculamos las primitivas de $f(x)$:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$$

Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable, haciendo $x^2 - 1 = t^2 \Rightarrow dx = \frac{t\,dt}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\cdot dx = \int \frac{t}{x}\cdot\frac{t\,dt}{x} = \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^2+1}\,dt - \int \frac{1}{t^2+1} = t - arc\ tg\ t =$$

$$= \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\sqrt{x^2-1} + C$$

Todas las primitivas de $f(x)$ son las funciones:

$$F(x) = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\ \sqrt{x^2-1} + C$$

La primitiva buscada que pase por el punto (2, 2) cumple:

$$2 = \sqrt{3} - arc\ tg\sqrt{3} + C \Rightarrow C = 2 - \sqrt{3} + \frac{\Pi}{3}$$

Luego la primitiva buscada es:

$$F(x) = \sqrt{x^2-1} - arc\ tg\sqrt{x^2-1} + \left(2 - \sqrt{3} + \frac{\Pi}{3}\right)$$

Actividades propuestas en pruebas de acceso a la Universidad

8 Estudia si alguna de las siguientes igualdades es cierta:

$$\int 4\ sen(2x)\cdot\ cos(2x)dx = sen^2(2x)$$

$$\int 4\ sen(2x)\cdot\ cos(2x)dx = -cos^2(2x)$$

Veamos si la 1.ª igualdad es cierta o falsa. Para ello, hemos de demostrar que la derivada de la función del segundo miembro es igual a la derivada del integrando.

$$D[sen^2(2x)] = 2\cdot sen\ (2x)\cdot cos\ 2x \cdot 2 = 4\ sen\ 2x\cdot cos\ 2x$$

Esta igualdad es cierta.

Veamos la segunda:

$$D[-cos^2(2x)] = -2\cdot cos\ (2x)\cdot[-sen\ (2x)]\cdot 2 =$$
$$= +4\cdot cos\ (2x)\cdot sen\ (2x)$$

La segunda igualdad también es verdadera.

9 Resuelve la siguiente integral indefinida:

$$I = \int \frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10}\,dx$$

$$\int \frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10}\,dx$$

Resolvemos esta integral por el método de integración de funciones racionales. Para ello descomponemos la fracción dada en suma de fracciones simples:

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+10)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+10}$$

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+10)} = \frac{A(x^2-2x+10)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+10)}$$

Igualamos los numeradores:

- Para $x = 1 \Rightarrow 9A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{9}$
- Para $x = 0 \Rightarrow 10A - C = -2 \Rightarrow C = \frac{28}{9}$
- Para $x = -1 \Rightarrow 13A + 12B - 2C = -5 \Rightarrow B = -\frac{1}{9}$

$$\int \frac{3x-2}{x^3-3x^2+12x-10}\,dx = \int \frac{1/9}{x-1}\,dx +$$

$$+ \int \frac{-1/9x+28/9}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{1}{9}\ ln\,|x-1| - \frac{1}{9}\int \frac{x}{x^2-2x+10}\,dx +$$

$$+ \frac{28}{9}\int \frac{1}{x^2-2x+10}\,dx = \frac{1}{9}\ ln\,|x-1| -$$

$$-\frac{1}{18}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\ ln\,|x-1| -$$

$$-\frac{1}{18}\ ln\,|x^2-2x+10| + \int \frac{\frac{3}{9}}{1+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{9}\ ln\,|x-1| -$$

$$-\frac{1}{18}\ ln\,|x^2-2x+10| + arc\ tg\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$$

10 Calcula:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx$$

Descomponemos la fracción $\frac{x+1}{x^2-x}$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-x}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = -ln\,|x| + 2\ ln\,|x-1| + C$$

11 Calcula:

$$I = \int e^{3x}\cdot sen\ 2x\ dx$$

$$I = \int e^{3x}\cdot\ sen\ 2x\ dx$$

Esta integral la resolvemos por el método de integración de partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{3x} \Rightarrow du = 3e^{3x}\ dx \\ dv = sen\ 2x\cdot dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\ cos\ 2x \end{array}\right\}$$

$$I = \int e^{3x} \cdot sen\,2x \cdot dx = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} -$$

$$- \int \frac{-3}{2} e^{3x} \cdot cos\,2x \cdot dx = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} +$$

$$+ \int \frac{3}{2} e^{3x} \cdot cos\,2x \cdot dx$$

Esta última integral la hacemos por el mismo método:

$$\left.\begin{array}{r} u = \frac{3}{2} e^{3x} \Rightarrow du = \frac{9}{2} e^{3x}\,dx \\ dv = cos\,2x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} sen\,2x \end{array}\right\}$$

$$I = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} + \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot sen\,2x}{4} -$$

$$- \int \frac{9}{4} e^{3x} \cdot sen\,2x \cdot dx \Rightarrow I = \frac{-e^{3x} \cdot cos\,2x}{2} + \frac{3\,e^{3x}\,sen\,2x}{4} -$$

$$- \frac{9}{4} I \Rightarrow I = \int e^{3x} \cdot sen\,2x \cdot dx = \frac{-2\,e^{3x}\,cos\,2x}{13} +$$

$$+ \frac{3\,e^{3x} \cdot sen\,2x}{13} + C$$

12 Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$I = \int \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 3}\,dx \qquad I = \int cos\,\sqrt{x}\,dx$$

- $$\int \frac{x-1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} ln\,|x^2+2x+3| - \sqrt{2} \int \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} ln\,|x^2+2x+3| - \sqrt{2} \cdot arc\,tg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

- $$\int cos\,\sqrt{x} \cdot dx = I = \int 2\sqrt{x} \cdot cos\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = 2\sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\ dv = cos\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \Rightarrow v = sen\,\sqrt{x} \end{array}\right\}$$

$$I = \int 2\sqrt{x} \cdot cos\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} \cdot sen\,\sqrt{x} -$$

$$- \int sen\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2\sqrt{x} \cdot sen\,\sqrt{x} - 2 \int sen\,\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x} \cdot sen\,\sqrt{x} + 2 \cdot cos\,\sqrt{x} + C$$

13 Calcula la primitiva de la función $f(x) = [lnx]^2$ que se anule en $x = e$.

$$\int (ln\,x)^2\,dx = I$$

$$\left.\begin{array}{r} u = (ln\,x)^2 \Rightarrow du = 2\,(ln\,x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int (ln\,x)^2\,dx = x \cdot (ln\,x)^2 - \int 2\,ln\,x \cdot dx$$

$$\left.\begin{array}{r} u = 2\,ln\,x \Rightarrow du = \frac{2}{x}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right\}$$

$$I = \int (ln\,x)^2\,dx = x \cdot (ln\,x)^2 - \left[2x\,ln\,x - \int 2\,dx\right] =$$

$$= x\,(ln\,x)^2 - 2x\,ln\,x + 2x + C$$

Todas las primitivas de $f(x) = (ln\,x)^2$ son las funciones de la forma:

$$F(x) = x\,(ln\,x)^2 - 2x\,ln\,x + 2x + C$$

Lo que se anula para $x = e$ verificara:

$$0 = e - 2e + 2e + C \Rightarrow C = -e$$

La primitiva buscada es:

$$F(x) = x\,(ln\,x)^2 - 2x\,ln\,x + 2x - e$$

14 Halla $f(x)$ si sabemos que $f(0) = 1$; $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$

Si $f''(x) = 3x \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{2} + C$

Como $f'(0) = 2 \Rightarrow C = 2$, por tanto:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + C$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$, luego la función $f(x)$ buscada es:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$$

15 Resuelve las siguientes integrales:

$$I = \int x\,e^{-x}\,dx \qquad I = \int \frac{5x + 8}{2x^2 + x - 3}\,dx$$

- $$I = \int x \cdot e^{-x}\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx &\Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} +$$

$$+ \int e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C \Rightarrow \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C$$

• $\displaystyle\int \frac{5x+8}{2x^2+x-3}\,dx$

$$\frac{5x+8}{(x-1)(2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x+8}{(x-1)(2x+3)} = \frac{13/5}{x-1} + \frac{-1/5}{2x+3}$$

$$\int \frac{5x+8}{2x^2+x-3}\,dx = \int \frac{13/5}{x-1}\,dx + \int \frac{-1/5}{2x+3}\,dx =$$

$$= \frac{13}{5}\,ln\,|x-1| - \frac{1}{10}\,ln\,|2x+3| = ln\left|\frac{(x-1)^{13/5}}{(2x+3)^{1/10}}\right| + C$$

16 **Resuelve** $\displaystyle\int \frac{4^x + 5\cdot 16^x}{1+16^x}\,dx$

$$\int \frac{4^x + 5\cdot 16^x}{1+16^x}\,dx = \int \frac{4^x}{1+16^x}\,dx + \int \frac{5\cdot 16^x}{1+16^x}\,dx =$$

$$= \int \frac{4^x}{1+(4^x)^2}\,dx + 5\int \frac{16^x}{1+16^x}\,dx = \frac{1}{ln\,4}\int \frac{4^x\cdot ln\,4}{1+(4^x)^2}\,dx +$$

$$+ \frac{5}{ln\,16}\int \frac{16^x\cdot ln\,16}{1+16^x}\,dx = \frac{1}{ln 4}\cdot arc\ tg(4^x) +$$

$$+ \frac{5}{ln\,16}\cdot ln\,|1+16^x| + C$$

17 **Calcula** $\displaystyle\int \frac{1+ln^3 x}{x\,(ln^2 x - ln\,x)}\,dx$

$$\int \frac{1+ln^3 x}{x\,(ln^2 x - ln\,x)}\,dx$$

Resolvemos esta integral por el método de integración de cambio de variable, haciendo: $ln\,x = t \Rightarrow dx = x\,dt$

$$\int \frac{1+ln^3 x}{x\,(ln^2 x - ln\,x)}\,dx = \int \frac{1+t^3}{x\,(t^2-t)}\cdot x\cdot dt = \int \frac{t^3+1}{t^2-t}\,dt =$$

$$= \int \frac{(t^2-t)(t+1)+(t+1)}{t^2-t}\,dt = \int (t+1)\,dt + \int \frac{t+1}{t^2-t}\,dt =$$

$$= \frac{(t+1)^2}{2} + \int \frac{-1}{t}\,dt + \int \frac{2}{t-1}\,dt = \frac{(t+1)^2}{2} -$$

$$- ln\,|t| + 2\,ln\,|t-1| = \frac{(ln\,x+1)^2}{2} + ln\left|\frac{(ln\,x-1)^2}{ln\,x}\right| + C$$

18 **Calcula, integrando por partes** $\boldsymbol{I = \int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx}$**.**

Comprueba el resultado por derivación.

$$I = \int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} u = sen\,(ln\,x) &\Rightarrow du = cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = x\,dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \int \frac{x}{2}\cdot cos\,(ln\,x)\,dx$$

Esta última integral la resolvemos por el mismo método de integración por partes:

$$\left.\begin{aligned} u = cos\,(ln\,x) &\Rightarrow du = -sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = \frac{x}{2}\,dx &\Rightarrow v = \frac{x^2}{4} \end{aligned}\right\}$$

$$I = \int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) -$$

$$-\left[\frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x) - \int -\frac{x}{4}\,sen\,(ln\,x)\,dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x) - \frac{1}{4}\,I$$

$$\frac{5}{4}\,I = \frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{5}\left[\frac{x^2}{2}\,sen\,(ln\,x) - \frac{x^2}{4}\,cos\,(ln\,x)\right] + C$$

$$\int x\cdot sen\,(ln\,x)\,dx = \frac{2x^2\,sen\,(ln\,x)}{5} - \frac{x^2\,cos\,(ln\,x)}{5} + C$$

Vamos a comprobar el resultado, para ello veremos que la derivada del segundo miembro es igual a la función del primer miembro.

$$D\left[\frac{2x^2\cdot sen\,(ln\,x)}{5} - \frac{x^2\cdot cos\,(ln\,x)}{5} + C\right]$$

$$= \frac{4x\cdot sen\,(ln\,x) + 2x^2\cdot cos\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}}{5} -$$

$$- \frac{2x\cdot cos\,(ln\,x) - x^2\,sen\,(ln\,x)\cdot\frac{1}{x}}{5} =$$

$$= \frac{4x\cdot sen\,(ln\,x) + 2x\cdot cos\,(ln\,x) - 2x\cdot cos\,(ln\,x) + x\cdot sen\,(ln\,x)}{5}$$

$$= \frac{5x\cdot sen\,(ln\,x)}{5} = x\cdot sen\,(ln\,x)$$