2 Los números enteros

Los objetos existen, pero los números son un invento humano en el terreno de las ideas.

Los números negativos surgen mucho después de los naturales, respondiendo a las necesidades del comercio y tras aparecer los sistemas de numeración dotados del cero, elemento imprescindible para su construcción.

Se los ha llamado números falsos y números absurdos, lo que refleja su dificultad y los ubica en un nivel más elaborado del mundo de las ideas.

Los números negativos no aparecen sistematizados hasta el siglo VII, en escritos hindúes, ligados a cuestiones y actividades cotidianas como *tener* en contraste con *deber*.

"Una deuda restada de la nada se convierte en un bien".

"Un bien restado de la nada se convierte en una deuda".

En este tipo de enunciados observamos que manejaban el cero y la regla de los signos.

La introducción en Europa de los números negativos fue lenta y desigual.

Muchos matemáticos desde el siglo XVI teorizaron sobre ellos, pero no fue hasta finales del siglo XIX, que el pensamiento matemático se desvincula de modelos físicos, cuando el conjunto de los números enteros negativos es aceptado y reconocido como objeto matemático de pleno derecho.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

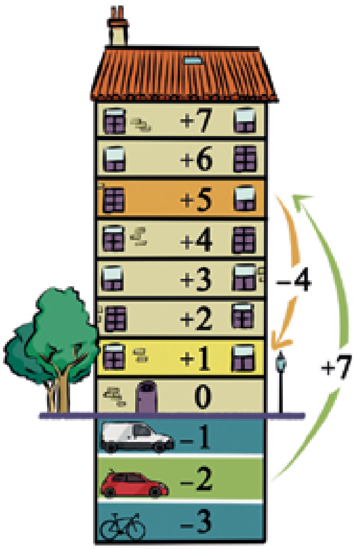
1 Números positivos y negativos

Los números negativos surgen, en contraste con los positivos, ante la necesidad de cuantificar magnitudes capaces de tomar valores opuestos: tener-deber, subir-bajar, ganar-perder, aumentar-disminuir, etc.

Ejemplos

- He crecido doce centímetros. → +12 cm
- He adelgazado ochocientos gramos. → –800 g

- Los números negativos se escriben precedidos del signo menos (–).
- Si un número no lleva signo, entendemos que es positivo.
- Los números negativos, en las operaciones, se escriben entre paréntesis para evitar que aparezcan dos signos seguidos.



Ejemplos

- 8 + (– 4) → El número positivo +8 se suma con el negativo – 4.
- (–2) · (–5) → El número negativo –2 se multiplica por el negativo –5.

Utilidad de los números positivos y negativos

VALORACIÓN DE POSICIONES FIJAS

- Vivo en la quinta planta. → +5
- Tengo el coche en el segundo sótano. → –2

VALORACIÓN DE CAMBIOS O VARIACIONES

- Subo del segundo sótano al quinto piso (siete plantas). → +7
- Bajo del quinto piso al primero (cuatro plantas). → – 4

Piensa y practica

1. Asocia a cada enunciado un número con signo.

a) Durante la visita nocturna a París estábamos a dos grados bajo cero.

b) Ayer tuvimos doce grados de máxima.

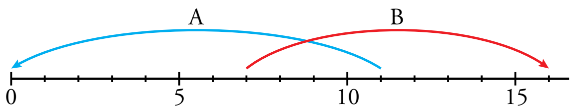
c) La empresa tuvo el mes pasado unas ganancias de medio millón de euros.

d) El programa de televisión perdió ciento cincuenta mil espectadores.

e) El barco hundido está a ciento veinte metros de profundidad.

f) El avión vuela a once mil pies de altura.

2. Escribe un número para cada movimiento en la recta.



3. Dibuja en una recta como la del ejercicio anterior:

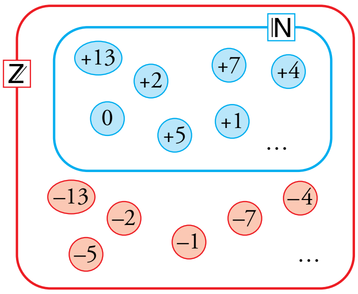
a) Un movimiento asociado al número –7.

b) Un movimiento asociado al número +4.

c) ¿Qué movimiento resulta de encadenar los dos anteriores?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros



Si tomamos el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y, por cada elemento distinto de cero, $+a$, añadimos otro con el signo negativo, $-a$, habremos obtenido un nuevo conjunto que se conoce en matemáticas como el conjunto de los números enteros y se designa por la letra $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \begin{cases} \text{POSITIVOS} \rightarrow +1, +2, +3, +4, +5, \dots \\ \text{CERO} \rightarrow 0 \\ \text{NEGATIVOS} \rightarrow -1, -2, -3, -4, -5, \dots \end{cases}$$

Valor absoluto y opuesto de un número entero

- El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta de quitarle el signo y se expresa escribiéndolo entre barras.

$$|a| \rightarrow \text{valor absoluto de } a$$

Ejemplos

$$|+7| = 7 \qquad |-7| = 7$$

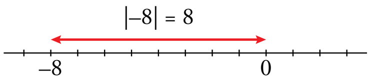
- El **opuesto** de un número entero es otro entero con el mismo valor absoluto, pero de signo contrario.

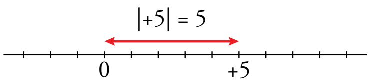
Ejemplos

Opuesto de (+7) → (–7)   Opuesto de (–7) → (+7)

Ten en cuenta

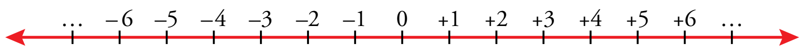
El valor absoluto de un número es su distancia al cero en la recta numérica.





Orden en el conjunto $\mathbb{Z}$

El conjunto de los números enteros se representa, ordenado, en la recta numérica:



Así, vemos que un número es mayor que cualquier otro que esté a su izquierda y menor que cualquier otro que esté a su derecha.

- Cualquier número positivo es mayor que el cero, y este, mayor que cualquier número negativo.
- Los números negativos se ordenan *al revés* que los positivos. Es mayor el que tenga menor valor absoluto.

Ejemplos

$(-7) < 0 < (+1)$

$(-12) < (-9) < (-2)$

Piensa y practica

1. Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada número.

a) –3 b) +8 c) –1

d) +23 e) –37 f) +60

2. Ordena de menor a mayor.

–7, –13, +8, –1, +1, +5, 0, +10, –24

3. ¿Verdadero o falso?

a) Cualquier número entero es también natural.

b) Cualquier número natural es entero.

c) Solo los negativos tienen opuesto.

d) Dos números enteros opuestos tienen el mismo valor absoluto.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Operaciones con números enteros

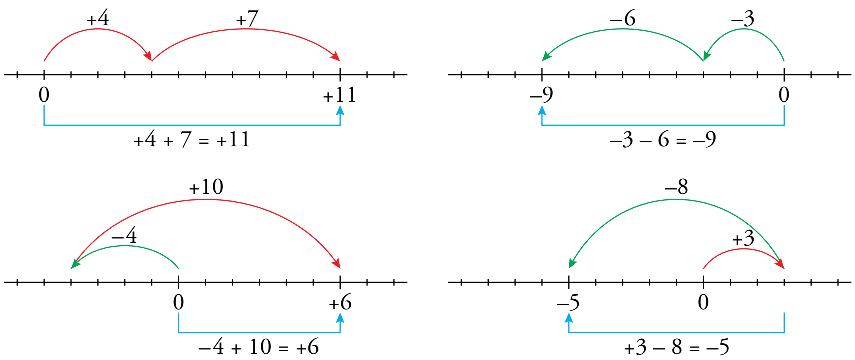
Suma y resta de números enteros

Recuerda algunas reglas básicas para resolver expresiones con números enteros:

Para sumar (restar) dos números:

- Si tienen **el mismo signo,** se suman sus valores absolutos y se pone el signo que tenían los sumandos.
- Si tienen **distinto signo,** se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos



- Al suprimir un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores no varían.

$$+(-3 + 8 - 2) = -3 + 8 - 2$$

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo menos, se cambian los signos interiores: más por menos y menos por más.

$$-(-3 + 8 - 2) = +3 - 8 + 2$$

Para operar más de dos números positivos y negativos podemos seguir dos caminos:

- Ir operando, paso a paso, en el orden en que aparecen.

$$2 - 3 + 4 - 8 =$$
$$= -1 + 4 - 8 =$$
$$= 3 - 8 = -5$$

- Agrupar los positivos por un lado y los negativos por otro. Después, operar.

$$7 - 5 + 4 - 8 - 3 =$$
$$= 7 + 4 - 5 - 3 - 8 =$$
$$= 11 - 16 = -5$$

Ejemplo

$$\mathbf{(7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9)} = (-3) - (2 + 4 - 5 - 9) =$$
$$= (-3) - (6 - 14) =$$
$$= (-3) - (-8) = -3 + 8 = +5$$

En la web

Actividades guiadas para practicar sumas y restas.

En la web

Practica la suma y la resta de números enteros.

Ten en cuenta

Otra forma:

$\mathbf{(7 - 10) - (2 - 5 + 4 - 9)} =$

$= 7 - 10 - 2 + 5 - 4 + 9 =$

$= 7 + 5 + 9 - 10 - 2 - 4 =$

$= 21 - 16 = +5$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Calcula mentalmente:

a) $5 - 7$ b) $2 - 9$
c) $3 - 4$ d) $6 - 10$
e) $5 - 12$ f) $9 - 15$
g) $-12 + 17$ h) $-22 + 10$
i) $-21 + 15$ j) $-3 - 6$
k) $-1 - 9$ l) $-12 - 13$

2. Resuelve.

a) $10 - 3 + 5$ b) $5 - 8 + 6$
c) $2 - 9 + 1$ d) $7 - 15 + 2$
e) $16 - 4 - 6$ f) $22 - 7 - 8$
g) $9 - 8 - 7$ h) $15 - 12 + 6$

3. Calcula.

a) $-3 + 10 - 1$ b) $-8 + 2 - 3$
c) $-5 + 6 + 4$ d) $-12 + 2 + 6$
e) $-18 + 3 + 6$ f) $-20 + 12 + 5$
g) $-7 - 3 - 4$ h) $-2 - 13 - 5$

4. Copia y completa como en el ejemplo.

- $\mathbf{7 - 4 - 6 - 2 + 5 + 3 - 4 = 15 - 16 = -1}$

a) $3 - 9 + 4 - 8 - 2 + 13 = \square - \square = \square$

b) $-15 - 4 + 12 - 3 - 11 - 2 = \square - \square = \square$

5. Calcula.

a) $3 - 7 + 2 - 5$
b) $2 - 6 + 9 - 3 + 4$
c) $7 - 10 - 5 + 4 + 6 - 1$
d) $-6 + 4 - 3 - 2 - 8 + 5$
e) $12 + 5 - 17 - 11 + 20 - 13$
f) $16 - 22 + 24 - 31 + 12 - 15$

6. Quita paréntesis y calcula.

a) $(-3) - (+4) - (-8)$
b) $-(-5) + (-6) - (-3)$
c) $(+8) - (+6) + (-7) - (-4)$
d) $-(-3) - (+2) + (-9) + (+7)$

7. Resuelve de dos formas, como en el ejemplo.

- $\mathbf{10 - (13 - 7) = 10 - (+6) = 10 - 6 = 4}$

  $\mathbf{10 - (13 - 7) = 10 - 13 + 7 = 17 - 13 = 4}$

a) $15 - (12 - 8)$
b) $9 - (20 - 6)$
c) $8 - (15 - 12)$
d) $6 - (13 - 2)$
e) $15 - (6 - 9 + 5)$
f) $21 - (3 - 10 + 11 + 6)$

8. Resuelve de una de las formas que ofrece el ejemplo.

- $\mathbf{(8 - 13) - (5 - 4 - 7) = (8 - 13) - (5 - 11) =}$

  $\mathbf{= (-5) - (-6) = -5 + 6 = 1}$

  $\mathbf{(8 - 13) - (5 - 4 - 7) = 8 - 13 - 5 + 4 + 7 =}$

  $\mathbf{= 19 - 18 = 1}$

a) $4 - (8 + 2) - (3 - 13)$
b) $12 + (8 - 15) - (5 + 8)$
c) $(8 - 6) - (3 - 7 - 2) + (1 - 8 + 2)$
d) $(5 - 16) - (7 - 3 - 6) - (9 - 13 - 5)$

9. **Ejercicio resuelto**

Calcular: $\boldsymbol{6 - [5 + (8 - 2)]}$

a) Primera forma: quitando paréntesis.

$6 - [5 + (8 - 2)] = 6 - [5 + 8 - 2] =$

$= 6 - 5 - 8 + 2 = 8 - 13 = -5$

b) Segunda forma: operando dentro de los paréntesis.

$6 - [5 + (8 - 2)] = 6 - [5 + (+6)] =$

$= 6 - [5 + 6] = 6 - [+11] = 6 - 11 = -5$

10. Calcula.

a) $7 - [1 + (9 - 13)]$
b) $-9 + [8 - (13 - 4)]$
c) $12 - [6 - (15 - 8)]$
d) $-17 + [9 - (3 - 10)]$
e) $2 + [6 - (4 - 2 + 9)]$
f) $15 - [9 - (5 - 11 + 7)]$

En la web Completa los cuadrados mágicos.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Multiplicación de números enteros

Podemos calcular el producto de dos números enteros teniendo en cuenta que una multiplicación es una suma de sumandos iguales:

$(+3) \cdot (-6) = $ → Sumamos tres veces (-6): → $+(-6) + (-6) + (-6) = -6 - 6 - 6 = -18$

$(-3) \cdot (-6) = $ → Restamos tres veces (-6): → $-(-6) - (-6) - (-6) = +6 + 6 + 6 = +18$

Sin embargo, para multiplicar con rapidez, aplicamos la siguiente regla:

REGLA DE LOS SIGNOS

El producto de dos números enteros es:

- **Positivo,** si los dos factores tienen **signos iguales.** $(+) \cdot (+) = +$; $(-) \cdot (-) = +$
- **Negativo,** si los dos factores tienen **signos diferentes.** $(+) \cdot (-) = -$; $(-) \cdot (+) = +$

En la web

Practica la regla de los signos.

Ejemplos

$(+4) \cdot (+3) = +12$ $(-5) \cdot (-4) = +20$ $(+6) \cdot (-4) = -24$ $(-4) \cdot (+8) = -32$

División de números enteros

La división de números enteros guarda con la multiplicación las mismas relaciones que en los números naturales. En la división se aplica la misma regla de los signos que en la multiplicación:

$(+4) \cdot (+6) = +24 \longrightarrow (+24) : (+4) = +6$

$(-4) \cdot (-6) = +24 \longrightarrow (+24) : (-4) = -6$

$(+4) \cdot (-6) = -24 \longrightarrow (-24) : (+4) = -6$; $(-24) : (-6) = +4$

En la web

Recuerda la multiplicación y división de números enteros.

Operaciones combinadas

Observa el orden en el que realizamos las operaciones para calcular el valor de la siguiente expresión combinada:

$(-15) : (4 - 9) + 3 \cdot (8 - 1)$

- Primero, las operaciones que están dentro de los paréntesis. → $(-15) : (-5) + 3 \cdot (-3)$
- Después, las multiplicaciones y las divisiones. → $(+3) + (-9)$
- Por último, las sumas y las restas. → $3 - 9 = -6$

En la web

Actividades guiadas para practicar operaciones combinadas.

En la web

Practica las operaciones combinadas con números enteros.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

11. Multiplica.

a) $(+10) \cdot (-2)$ b) $(-4) \cdot (-9)$

c) $(-7) \cdot (+5)$ d) $(+11) \cdot (+7)$

12. Observa los ejemplos y calcula.

- $\mathbf{\underbrace{(-3) \cdot (+2)} \cdot (-5) = (-6) \cdot (-5) = +30}$

  $\mathbf{(-3) \cdot \underbrace{(+2) \cdot (-5)} = (-3) \cdot (-10) = +30}$

a) $(-2) \cdot (-3) \cdot (+4)$ b) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-5)$

c) $(+4) \cdot (-3) \cdot (+2)$ d) $(-6) \cdot (-2) \cdot (-5)$

13. Divide.

a) $(-18) : (+3)$ b) $(-15) : (-5)$

c) $(+36) : (-9)$ d) $(-30) : (-10)$

e) $(-52) : (+13)$ f) $(+22) : (+11)$

14. Calcula el valor de x en cada caso.

a) $(-18) : x = +6$ b) $(+4) \cdot x = -36$

c) $x \cdot (-13) = +91$ d) $x : (-11) = +5$

15. Calcula.

a) $(+3) \cdot (-5) \cdot (+2)$ b) $(-4) \cdot (-1) \cdot (+6)$

c) $(-2) \cdot (-7) \cdot (-2)$ d) $(+5) \cdot (-4) \cdot (-3)$

16. Opera, sin olvidar el papel de los paréntesis.

a) $[(+80) : (-8)] : (-5)$ b) $(-70) : [(-2) : (-7)]$

c) $[(+50) : (-30)] : (+6)$ d) $(-40) : [(+24) : (+3)]$

17. Calcula como en los ejemplos.

- $\mathbf{15 - 8 \cdot 3 = 15 - 24 = -9}$

  $\mathbf{18 : 6 - 5 = 3 - 5 = -2}$

a) $18 - 5 \cdot 3$ b) $6 - 4 \cdot 2$ c) $7 \cdot 2 - 16$

d) $18 - 15 : 3$ e) $5 - 30 : 6$ f) $20 : 2 - 11$

18. Calcula como en el ejemplo.

- $\mathbf{21 - 4 \cdot 6 + 12 : 3 = 21 - 24 + 4 = 25 - 24 = 1}$

a) $20 - 4 \cdot 7 + 11$ b) $12 - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2$

c) $15 - 20 : 5 - 3$ d) $6 - 10 : 2 - 14 : 7$

e) $5 \cdot 3 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 6$ f) $7 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 18 : 6$

19. Observa el ejemplo y calcula.

- $\mathbf{(-3) \cdot (-4) + (-6) \cdot 3 = (+12) + (-18) = 12 - 18 = -6}$

a) $5 \cdot (-8) - (+9) \cdot 4$

b) $32 : (-8) - (-20) : 5$

c) $(-2) \cdot (-9) + (-5) \cdot (+4)$

d) $(+25) : (-5) + (-16) : (+4)$

e) $(+6) \cdot (-7) + (-50) : (-2)$

f) $(+56) : (-8) - (-12) \cdot (+3)$

20. Calcula.

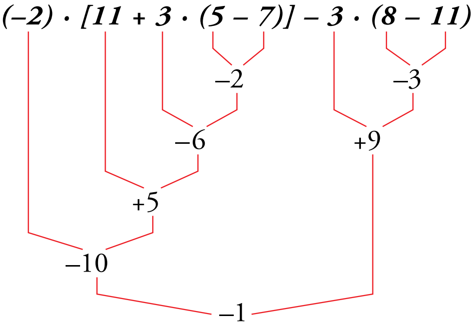
a) $18 - 5 \cdot (3 - 8)$

b) $4 \cdot (8 - 11) - 6 \cdot (7 - 9)$

c) $(4 - 5) \cdot (-3) - (8 - 2) : (-3)$

21. **Ejercicio resuelto**

$\boldsymbol{(-2) \cdot [11 + 3 \cdot (5 - 7)] - 3 \cdot (8 - 11)}$



$(-2) \cdot [11 + 3 \cdot (5 - 7)] - 3 \cdot (8 - 11) =$

$= (-2) \cdot [11 + 3 \cdot (-2)] - 3 \cdot (-3) =$

$= (-2) \cdot [11 - 6] + 9 = (-2) \cdot [+5] + 9 = -10 + 9 = -1$

22. Calcula.

a) $5 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3)$

b) $20 : (-5) - 8 : (+2)$

c) $2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-7) - 4 \cdot (+3)$

d) $6 : (+2) + 5 \cdot (-3) - 12 : (-4)$

23. Opera.

a) $(-8) \cdot (+2) + (-5) \cdot (-3)$

b) $(+40) : (-8) - (-30) : (+6)$

c) $(-2) \cdot (-9) + (-24) : (-3) - (-6) \cdot (-4)$

d) $(+27) : (6 - 9) - (11 - 8) \cdot (-5) - (-6) \cdot (-2)$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Potencias de números enteros

Recuerda que una potencia es una multiplicación de factores iguales:

$$\overset{\text{EXPONENTE}}{\underset{\text{BASE}}{a^n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplos

$(+4)^2 = (+4) \cdot (+4) = +16$

$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

Potencias de números negativos

En las sucesivas potencias de un número negativo obtenemos, alternativamente, resultados positivos y negativos:

$(-3)^1 = -3 \qquad (-3)^2 = +9 \qquad (-3)^3 = -27 \qquad (-3)^4 = +81$

Al elevar un número negativo a una potencia:

- Si el exponente es par, el resultado es positivo.

  $(-a)^{n\ (\text{par})} \rightarrow$ **positivo**

- Si el exponente es impar, el resultado es negativo.

  $(-a)^{n\ (\text{impar})} \rightarrow$ **negativo**

Piensa y practica

1. Escribe en forma de potencia.

a) $(-2) \cdot (-2)$

b) $(+5) \cdot (+5) \cdot (+5)$

c) $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

d) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

2. Copia y completa en tu cuaderno.

POTENCIA	BASE	EXPONENTE	VALOR
$(-1)^7$			
$(-2)^4$			
$(+3)^3$			
$(-4)^2$			

3. Escribe en forma de producto y calcula:

a) $(-2)^6$ b) $(-3)^1$

c) $(+3)^4$ d) $(-5)^2$

e) $(-10)^5$ f) $(-8)^3$

4. Obtén con ayuda de la calculadora como se hace en el ejemplo.

- $\mathbf{12^5} \rightarrow$ 1 2 × × = = = = $\rightarrow$ 248832

a) 8^6 b) $(-8)^6$

c) 11^5 d) $(-11)^5$

e) 27^7 f) $(-27)^7$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Operaciones con potencias

Vas a aprender, ahora, algunas propiedades que facilitan el cálculo con potencias. Por eso, es conveniente que las memorices y que ensayes su aplicación en diferentes situaciones.

Potencia de un producto

Compara las dos expresiones siguientes y observa que en ambas se obtiene el mismo resultado.

No te confundas

$(2 + 3)^4 = 5^4 = 625$

$2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$

$(2 + 3)^4 \neq 2^4 + 3^4$

La potencia de una suma NO ES IGUAL a la suma de las potencias de los sumandos.

Ejemplo

- $(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
- $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 8 \cdot 27 = 216$

La **potencia** de un **producto** es igual al producto de las potencias de los factores. $\rightarrow (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Ejercicio resuelto

Calcular, por el camino más sencillo, $5^6 \cdot 2^6$.

$5^6 \cdot 2^6 = (5 \cdot 2)^6 = 10^6 = 1\,000\,000$

Potencia de un cociente

Observa otras dos expresiones que también tienen el mismo valor.

Ejemplo

- $(6 : 3)^3 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $6^3 : 3^3 = (6 \cdot 6 \cdot 6) : (3 \cdot 3 \cdot 3) = 216 : 27 = 8$

La **potencia** de un **cociente** es igual al cociente de las potencias del dividendo y del divisor. $\rightarrow (a : b)^n = a^n : b^n$

Ejercicios resueltos

1. **Calcular, por el camino más sencillo, $12^3 : 4^3$.**
   $12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

2. **Calcular: $(6^4 \cdot 5^4) : 15^4$**
   $(6^4 \cdot 5^4) : 15^4 = (6 \cdot 5)^4 : 15^4 = 30^4 : 15^4 = (30 : 15)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Producto de potencias de la misma base

Al multiplicar dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^4 \cdot 5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4 \text{ veces}} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{3 \text{ veces}} = 5^7$$

Observa que el exponente del producto final es la suma de los exponentes de los factores.

> Para **multiplicar** dos **potencias** de la **misma base,** se deja la base y se suman los exponentes. $\Big\} \rightarrow a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Por ejemplo:

$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$

Cociente de potencias de la misma base

Al dividir dos potencias del mismo número, se obtiene otra potencia de dicho número.

$$5^7 : 5^3 = 5^4 \longleftrightarrow 5^4 \cdot 5^3 = 5^7$$

Observa que el exponente del cociente es la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

> Para **dividir** dos **potencias** de la **misma base,** se deja la base y se restan los exponentes. $\Big\} \rightarrow a^m : a^n = a^{m-n}$

Por ejemplo:

$a^8 : a^6 = a^{8-6} = a^2$

Ten en cuenta

$$2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$$

$$2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$$

La **potencia cero** de un número es igual a 1.

Potencia de otra potencia

Al elevar una potencia a otra potencia, se obtiene una nueva potencia de la misma base.

$$(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$$

Observa que el exponente final es el producto de los exponentes de la expresión inicial.

> Para **elevar** una **potencia** a **otra potencia**, se deja la base y se multiplican los exponentes. $\Big\} \rightarrow (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Por ejemplo:

$(a^2)^4 = a^{2 \cdot 4} = a^8$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Calcula como en el ejemplo y compara los resultados.

- $\left.\begin{array}{l}\mathbf{(4 \cdot 3)^2 = 12^2 = 144} \\ \mathbf{4^2 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144}\end{array}\right\} \to \mathbf{(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2}$

a) $\left.\begin{array}{l}(3 \cdot 5)^2 = \dots \\ 3^2 \cdot 5^2 = \dots\end{array}\right\} \dots$

b) $\left.\begin{array}{l}(4 \cdot 2)^3 = \dots \\ 4^3 \cdot 2^3 = \dots\end{array}\right\} \dots$

c) $\left.\begin{array}{l}(12 : 3)^2 = \dots \\ 12^2 : 3^2 = \dots\end{array}\right\} \dots$

d) $\left.\begin{array}{l}(20 : 4)^3 = \dots \\ 20^3 : 4^3 = \dots\end{array}\right\} \dots$

2. Copia y completa las casillas vacías.

a) $(3 \cdot 5)^4 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$

b) $8^3 \cdot 6^3 = (\square \cdot \square)^{\square}$

c) $(6 : 3)^7 = 6^{\square} : 3^{\square}$

d) $15^{\square} : 5^{\square} = (\square : \square)^4$

e) $(a \cdot b)^{\square} = \square^3 \cdot \square^3$

f) $m^2 \cdot n^2 = (\square \cdot \square)^2$

g) $(a : b)^{\square} = a^3 : \square^3$

h) $m^4 : n^4 = (\square : \square)^{\square}$

3. Reduce a una sola potencia como en el ejemplo.

- $\mathbf{2^5 \cdot (-3)^5 = [2 \cdot (-3)]^5 = (-6)^5}$

a) $3^2 \cdot 4^2$ b) $(-2)^3 \cdot 4^3$

c) $(-5)^2 \cdot (+3)^2$ d) $3^6 \cdot (-2)^6$

4. Expresa con una sola potencia igual que en el ejemplo.

- $\mathbf{(-15)^4 : (+3)^4 = [(-15) : (+3)]^4 = (-5)^4 = 5^4}$

a) $9^4 : 3^4$ b) $(+15)^3 : (-5)^3$

c) $(-20)^2 : (-4)^2$ d) $(-18)^4 : (-6)^4$

5. Reflexiona y calcula de la forma más sencilla.

a) $5^3 \cdot 2^3$ b) $4^2 \cdot 5^2$

c) $25^2 \cdot 4^2$ d) $20^3 \cdot 5^3$

e) $16^5 : 8^5$ f) $18^3 : 6^3$

g) $21^4 : 7^4$ h) $35^2 : 5^2$

6. Copia y completa las casillas vacías.

a) $5^2 \cdot 5^3 = 5^{\square}$ b) $6^4 \cdot 6^3 = 6^{\square}$

c) $a^5 \cdot a^3 = a^{\square}$ d) $m^3 \cdot m^{\square} = m^9$

e) $2^6 : 2^4 = 2^{\square}$ f) $7^8 : 7^5 = 7^{\square}$

g) $a^9 : a^8 = a^{\square}$ h) $m^8 : m^{\square} = m^6$

i) $(4^2)^3 = 4^{\square}$ j) $(5^3)^3 = 5^{\square}$

k) $(a^2)^2 = a^{\square}$ l) $(m^4)^{\square} = m^{12}$

7. Reduce a una sola potencia.

a) $5^2 \cdot 5^2$ b) $3^2 \cdot 3^5$

c) $10^5 \cdot 10^2$ d) $a^5 \cdot a^5$

e) $m^7 \cdot m$ f) $x^2 \cdot x^6$

8. Copia y completa en tu cuaderno.

a) $(-6)^3 \cdot (-6)^4 = (-6)^{\square}$ b) $(+3)^6 \cdot (+3)^2 = 3^{\square}$

c) $(-2)^8 \cdot (-2)^2 = 2^{\square}$ d) $(-5)^3 \cdot (+5)^2 = (-5)^{\square}$

9. Reduce a una sola potencia.

a) $2^5 \cdot 2^7$ b) $(-2)^3 \cdot (+2)^6$

c) $(-12)^2 \cdot (+12)^2$ d) $(+9)^4 \cdot (-9)^2$

10. Expresa con una potencia única.

a) $2^6 : 2^2$ b) $3^8 : 3^5$

c) $10^7 : 10^6$ d) $a^{10} : a^6$

e) $m^5 : m$ f) $x^8 : x^4$

11. Copia y completa en tu cuaderno.

a) $5^9 : 5^3 = 5^{\square}$ b) $(-2)^6 : (-2)^3 = (-2)^{\square}$

c) $(-4)^8 : (+4)^3 = 4^{\square}$ d) $(+6)^8 : (-6)^5 = (-6)^{\square}$

12. Reduce a una potencia única.

a) $(-7)^8 : (-7)^5$ b) $10^9 : (-10)^4$

c) $12^4 : (-12)$ d) $(-4)^{10} : (+4)^6$

13. Reduce a una única potencia.

a) $(5^2)^3$ b) $(2^5)^2$

c) $(10^3)^3$ d) $(a^5)^3$

e) $(m^2)^6$ f) $(x^4)^4$

14. Reduce a una sola potencia.

a) $[(-2)^2]^2$ b) $[(+5)^3]^2$

c) $[(+7)^3]^3$ d) $[(-4)^2]^4$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Raíces de números enteros

Raíz cuadrada

Recuerda que la **raíz cuadrada** es la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$$

Los números cuya raíz cuadrada es entera se llaman **cuadrados perfectos.**

Ejemplos

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{49} = 7 \;\Leftrightarrow\; 7^2 = 49 \\ \sqrt{400} = 20 \;\Leftrightarrow\; 20^2 = 400 \end{array}\right\} \text{49 y 400 son cuadrados perfectos}$$

La raíz cuadrada de un número positivo tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.

$$\sqrt{(+16)} = \begin{cases} = +4 \rightarrow \text{porque } (+4)^2 = +16 \\ = -4 \rightarrow \text{porque } (-4)^2 = +16 \end{cases}$$

Sin embargo, para evitar ambigüedades, por convenio, tomaremos:

$$+\sqrt{(+16)} = +4 \qquad -\sqrt{(+16)} = -4$$

Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

$\sqrt{(-16)} = x \Leftrightarrow x^2 = -16 \rightarrow$ Imposible

$\sqrt{(-16)} \rightarrow$ No existe, porque no hay ningún número cuyo cuadrado sea un resultado negativo.

Piensa y practica

1. Escribe las dos soluciones enteras, si existen.

a) $\sqrt{(+1)}$ b) $\sqrt{(-1)}$ c) $\sqrt{(+4)}$

d) $\sqrt{(-4)}$ e) $\sqrt{(+36)}$ f) $\sqrt{(-49)}$

g) $\sqrt{(+64)}$ h) $\sqrt{(-81)}$ i) $\sqrt{(+100)}$

2. Ejercicio resuelto

$$\sqrt{20} \rightarrow \begin{cases} (\pm 4)^2 = 16 \text{ (no llega)} \rightarrow +4 < \sqrt{20} < +5 \\ (\pm 5)^2 = 25 \text{ (se pasa)} \rightarrow -5 < \sqrt{20} < -4 \end{cases}$$

Las dos raíces cuadradas de 20 están comprendidas, una, entre 4 y 5, y la otra, entre –5 y –4.

3. Resuelve, si es que existen soluciones.

a) $\sqrt{(+10)}$ b) $\sqrt{(-12)}$ c) $\sqrt{(+70)}$

d) $\sqrt{(-55)}$ e) $\sqrt{(+72)}$ f) $\sqrt{(-110)}$

4. Ejercicio resuelto

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \\ \sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14 \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{36+64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

5. Calcula, si existen, y observa las diferencias.

a) $\sqrt{16+9}$ y $\sqrt{16} + \sqrt{9}$

b) $\sqrt{100-36}$ y $\sqrt{100} - \sqrt{36}$

c) $\sqrt{16-25}$ y $\sqrt{16} - \sqrt{25}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Los números enteros

1. Asocia cada enunciado con un número entero.

a) Ayer gasté cinco euros en un cómic.

b) Me he encontrado una moneda de dos euros.

c) Ha llegado una factura de 57 euros.

d) Al concierto acudieron 2 480 personas.

e) Se ha obtenido una cosecha de once toneladas de aceituna.

f) La temperatura ha bajado de cinco grados a dos bajo cero.

g) Subo desde el primer sótano hasta la quinta planta.

2. Ordena de menor a mayor.

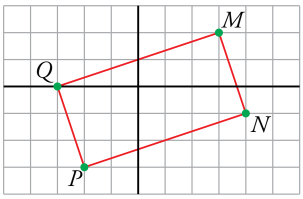
–6, +8, –16, –3, +12, –7, +4, +15, –11

3. Dibuja una recta numérica y representa:

a) Todos los enteros de una cifra menores que –5.

b) Todos los enteros de dos cifras mayores que –16 y menores que 1.

4. Escribe las coordenadas de los vértices de este rectángulo.



5. Dibuja un rectángulo igual que el anterior, con el vértice M en el punto (–1, 0), y escribe las coordenadas de los otros tres.

Suma y resta de números enteros

6. Calcula mentalmente.

a) 5 – 9	b) 5 – 11	c) 13 – 9
d) 22 – 30	e) 21 – 33	f) 46 – 52
g) –8 – 14	h) –21 – 15	i) –33 – 22
j) –13 + 18	k) –22 + 9	l) –37 + 21

7. Calcula.

a) 5 – 8 – 4 + 3 – 6 + 9

b) 10 – 11 + 7 – 13 + 15 – 6

c) 9 – 2 – 7 – 11 + 3 + 18 – 10

d) –7 – 15 + 8 + 10 – 9 – 6 + 11

8. Opera.

a) 16 + [3 – 9 – (11 – 4)]

b) 8 – [(6 – 9) – (7 – 13)]

c) (6 – 15) – [1 – (1 – 5 – 4)]

d) (2 – 12 + 7) – [(4 – 10) – (5 – 15)]

e) [9 – (5 – 17)] – [11 – (6 – 13)]

Multiplicación y división de números enteros

9. Opera aplicando la regla de los signos.

a) (–4) · (+7)	b) (–21) : (+3)
c) (–6) · (–8)	d) (+30) : (+5)
e) (+10) · (+5)	f) (–63) : (–9)
g) (–9) · (–5)	h) (+112) : (–14)

10. Obtén el valor de x en cada caso:

a) $x \cdot (-9) = +9$	b) $(-5) : x = -1$
c) $(-5) \cdot x = -45$	d) $x : (-4) = +3$
e) $x \cdot (+6) = -42$	f) $(+28) : x = -7$

11. Calcula.

a) (–2) · [(+3) · (–2)]	b) [(+5) · (–3)] · (+2)
c) (+6) : [(–30) : (–15)]	d) [(+40) : (–4)] : (–5)
e) (–5) · [(–18) : (–6)]	f) [(–8) · (+3)] : (–4)
g) [(–21) : 7] · [8 : (–4)]	h) [6 · (–10)] : [(–5) · 6]

Operaciones combinadas con números enteros

12. Calcula.

a) 5 – 4 · 3	b) 2 · 9 – 7
c) 4 · 5 – 6 · 3	d) 2 · 8 – 4 · 5
e) 16 – 4 · 7 + 2 · 5 – 19	f) 5 · 6 – 21 – 3 · 7 + 12

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

13. Opera dentro del paréntesis y, después, multiplica.

a) $-5 \cdot (4 - 9)$

b) $5 \cdot (9 - 4) - 12$

c) $1 + 4 \cdot (6 - 10)$

d) $6 \cdot (8 - 12) - 3 \cdot (5 - 11)$

e) $4 \cdot (13 - 8) + 3 \cdot (9 - 15)$

14. Calcula y observa que el resultado varía según la posición de los paréntesis.

a) $17 - 6 \cdot 2$ b) $(17 - 6) \cdot 2$

c) $(-10) - 2 \cdot (-3)$ d) $[(-10) - 2] \cdot (-3)$

e) $(-3) \cdot (+5) + (-2)$ f) $(-3) \cdot [(+5) + (-2)]$

15. Calcula paso a paso.

a) $5 \cdot (-4) - 2 \cdot (-6) + 13$

b) $-6 \cdot (+4) + (-3) \cdot 7 + 38$

c) $(-2) \cdot (+8) - (-5) \cdot (-6) + (-9) \cdot (+4)$

d) $-(-9) \cdot (+5) \cdot (-8) \cdot (+7) - (+4) \cdot (-6)$

Potencias de números enteros

16. Calcula.

a) $(-2)^1$ b) $(-2)^2$ c) $(-2)^3$

d) $(-2)^4$ e) $(-2)^5$ f) $(-2)^6$

g) $(-2)^7$ h) $(-2)^8$ i) $(-2)^9$

17. Calcula.

a) $(-5)^4$ b) $(+4)^5$ c) $(-6)^3$

d) $(+7)^3$ e) $(-8)^2$ f) $(-10)^7$

18. Observa y, después, calcula.

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$
$$(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$$
$$-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$$
$$+2^3 = +(2 \cdot 2 \cdot 2) = +8$$

a) $(-3)^4$ b) $(+3)^4$ c) -3^4 d) $+3^4$

19. Expresa como potencia de un único número.

a) $10^4 : 5^4$ b) $12^7 : (-4)^7$

c) $(-9)^6 : 3^6$ d) $2^6 \cdot 2^6$

e) $(-4)^5 \cdot (-2)^5$ f) $2^4 \cdot (-5)^4$

20. Reduce a una sola potencia.

a) $(x^2)^5$ b) $(m^4)^3$

c) $[a^{10} : a^6]^2$ d) $(a \cdot a^3)^3$

e) $(x^5 : x^2) \cdot x^4$ f) $(x^6 \cdot x^4) : x^7$

Raíces de números enteros

21. Calcula.

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{7^2}$ c) $\sqrt{-49}$

d) $\sqrt{15^2}$ e) $\sqrt{225}$ f) $\sqrt{-225}$

g) $\sqrt{2\,500}$ h) $\sqrt{50^2}$ i) $\sqrt{-2\,500}$

22. Calcula.

a) $\sqrt{2^2}$ b) $\sqrt{9^2}$ c) $\sqrt{13^2}$

d) $\sqrt{a^2}$ e) $\sqrt{m^2}$ f) $\sqrt{y^2}$

23. Observa el ejemplo y reduce.

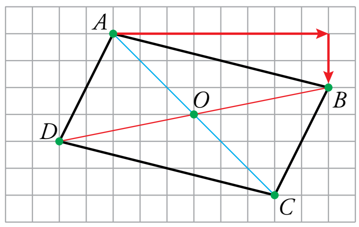
- $\sqrt{x^6} = \sqrt{x^{3 \cdot 2}} = \sqrt{(x^3)^2} = x^3$

a) $\sqrt{(x^2)^2}$ b) $\sqrt{(m^3)^2}$ c) $\sqrt{(a^4)^2}$

d) $\sqrt{x^4}$ e) $\sqrt{m^6}$ f) $\sqrt{a^8}$

Interpreta, describe, exprésate

24. En el siguiente paralelogramo definimos, con dos números enteros, el desplazamiento que nos lleva desde el punto A al punto B.



Desplazamiento desde A hasta B

↓

[+8, –2]

a) ¿Cómo definiríamos, con el mismo código, el desplazamiento desde B hasta A?

b) ¿De qué vértice a qué vértice irías con el desplazamiento [–2, –4]?

c) Expresa, con el mismo código, los desplazamientos que llevan desde el centro O a cada uno de los vértices.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

25. Una plataforma petrolífera marina se sostiene sobre flotadores, a 55 metros sobre la superficie del agua, anclada en una zona con una profundidad de 470 metros.

Sobre ella, hay una grúa de 35 metros de altura, de la que pende un cable y, en su extremo, un batiscafo auxiliar que se utiliza para los trabajos de mantenimiento de la plataforma.

En este momento, la grúa ha largado 120 metros de cable y sigue bajando el batiscafo a razón de un metro cada 3 segundos.

a) ¿Cuánto tardará el batiscafo en llegar al fondo?

b) ¿Cuánto tardará la grúa en izar el batiscafo hasta la superficie de la plataforma, si sube a la misma velocidad que baja?

Resuelve problemas

26. El brazo mecánico de un robot ha sido programado de la siguiente forma:

– Encendido: inicio del programa.

– Primer minuto: avanza 1 cm y retrocede 5 cm.

– Segundo minuto: avanza 2 cm y retrocede 5 cm.

– Tercer minuto: avanza 3 cm y retrocede 5 cm.

Y así continúa, hasta que, al final de un determinado minuto, se encuentra en la posición inicial. Entonces, repite el proceso.

¿Cuántas veces repite el ciclo en hora y media? Justifica la respuesta.

27. Tengo dos cuentas en el mismo banco, una con algo de dinero y la otra en números rojos. La suma de los saldos es 6 €, y la diferencia 22 €. ¿Cuál es el saldo de cada cuenta?

28. La suma de dos números enteros es –22, y la suma de sus valores absolutos, 70. ¿Cuáles son esos números?

29. Si escribes todos los números enteros desde –50 hasta +50, ¿cuántas veces habrás utilizado la cifra 7? ¿Y la cifra 5? ¿Y la cifra 3?

Autoevaluación

1. Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada uno de estos números.

a) (–1) b) (+13) c) (–16) d) (+9)

2. Copia y completa.

a) $|-6| = \square$ b) $|+6| = \square$ c) $-(|+6|) = \square$

3. Ordena de menor a mayor.

–7, –13, +8, –1, –11, +5, 0, +10, –24

4. Quita paréntesis.

a) +(+13) b) –(+17) c) +(–15) d) –(–23)

5. Calcula.

a) 6 – 11 + (9 – 13) b) 2 – (5 – 8)

c) (7 – 15) – (6 – 2) d) 5 – [2 – (3 – 2)]

6. Calcula.

a) $4 \cdot 3 - 13$ b) $5 \cdot (-2) + 3 \cdot 4$ c) $20 - 4 \cdot 6 - 12 : (-2)$

7. Calcula.

a) $4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot (-8) - 4 \cdot (-3)$

b) $(10 - 3 \cdot 6) - 2 \cdot [5 + 3 \cdot (4 - 7)]$

8. Calcula.

a) 5^2 b) $(-5)^2$ c) $(-5)^3$

9. Reduce a una sola potencia.

a) $3^5 \cdot 3^2$ b) $(-12)^4 : (-3)^4$

c) $2^3 \cdot 4^3$ d) $(-5)^7 : (-5)^5$

10. Opera y calcula.

a) $10^4 : (5^3 \cdot 2^3)$

b) $(-15)^6 : [(-5)^4 \cdot 3^4]$

c) $[(-9)^5 \cdot (-2)^5] : 6^5$

11. Calcula, si existen, estas raíces:

a) $\sqrt{(+9)}$ b) $\sqrt{(-100)}$ c) $\sqrt{(-2)^2}$

12. La suma de dos números enteros es 4, y la suma de sus valores absolutos, 16. ¿Qué números son?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....