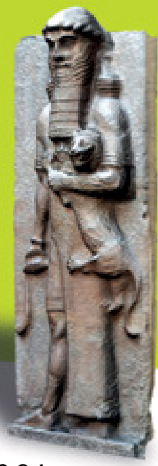
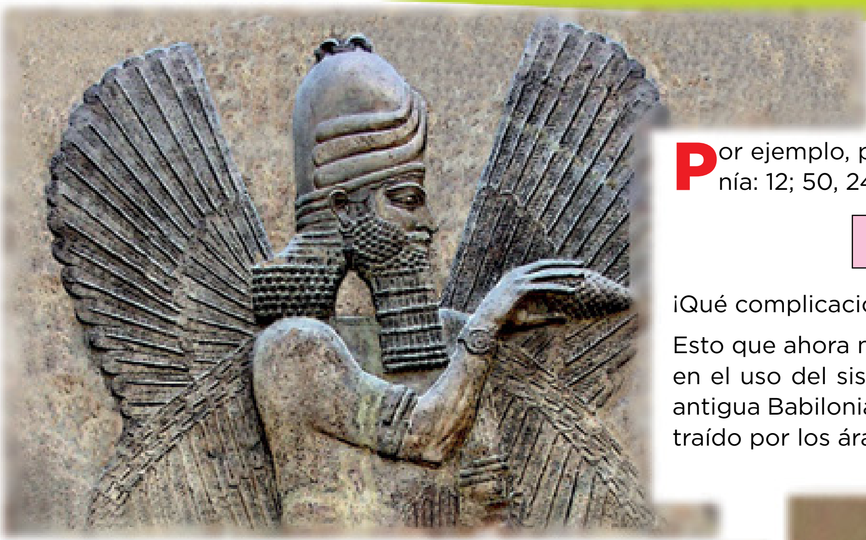
3 Los números decimales y las fracciones

En la Europa anterior a la Edad Moderna, los números enteros se expresaban en el sistema decimal, y las partes fraccionarias, en el sistema sexagesimal.





Por ejemplo, para expresar el número decimal 12,84 se ponía: 12; 50, 24 que significa:

$$\boxed{12{,}84} \rightarrow \boxed{12 + \frac{50}{60} + \frac{24}{60^2}}$$

¡Qué complicación! Pero no se sabía hacer de otra forma.

Esto que ahora nos parece tan engorroso se debe a la inercia en el uso del sistema sexagesimal, que tiene su origen en la antigua Babilonia, y a la lenta aceptación del sistema decimal, traído por los árabes desde la India, hacia el siglo VIII.

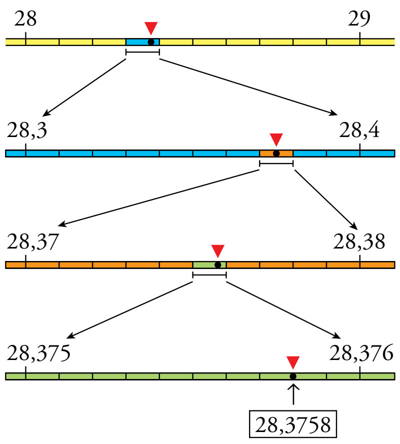
A mediados del siglo XVI, algunos matemáticos europeos, como el flamenco **Simon Stevin** (1548-1620), empezaron a sustituir las fracciones sexagesimales por las decimales, al constatar que con ellas se agilizaba el cálculo.

$$\boxed{12 + \frac{8}{10} + \frac{4}{10^2}} \rightarrow \boxed{12 + \frac{84}{100}} \rightarrow \boxed{12{,}84}$$

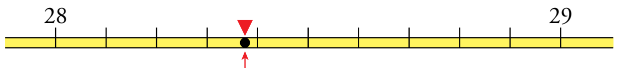
Con el uso, la notación basada en el sistema decimal fue evolucionando hacia la simplificación de su escritura para fijarse, a principios del XVII, en la que usamos en la actualidad.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Los números decimales



Para expresar cantidades comprendidas entre dos números enteros, utilizamos los números decimales.



28,3758 → $\begin{cases} 28 \to \text{PARTE ENTERA} \\ 0,3758 \to \text{PARTE DECIMAL} \end{cases}$

La parte decimal representa una cantidad menor que la unidad y sus órdenes de unidades tienen la misma estructura que los de la parte entera:

Una unidad de cualquier orden se divide en diez unidades del orden inmediato inferior.

1 unidad = 10 décimas ⟶ $1 = 10 \cdot \frac{1}{10} = 10 \cdot 0{,}1$

1 décima = 10 centésimas ⟶ $0{,}1 = 10 \cdot \frac{1}{100} = 10 \cdot 0{,}01$

1 centésima = 10 milésimas ⟶ $0{,}01 = 10 \cdot \frac{1}{1000} = 10 \cdot 0{,}001$

	MILLARES	CENTENAS	DECENAS	UNIDADES	DÉCIMAS	CENTÉSIMAS	MILÉSIMAS	DIEZMILÉSIMAS	CIENMILÉSIMAS	MILLONÉSIMAS	
...	M	C	D	U,	d	c	m	dm	cm	mm	...
			2	8,	3	7	5	8			

→ Veintiocho unidades y tres mil setecientas cincuenta y ocho diezmilésimas

$$28{,}3758 = 20 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{8}{10\,000} = 28 + \frac{3\,758}{10\,000}$$

En la web

Recuerda la lectura y la escritura de números decimales.

Clases de números decimales

Conviene que sepas diferenciar los distintos tipos de números decimales que te encontrarás en mediciones, resultados de operaciones y problemas.

- **Decimales exactos:** tienen un número limitado de cifras decimales.

  $4{,}\underbrace{75}_{\text{DOS CIFRAS DECIMALES}}$

- **Decimales periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que se repiten periódicamente. Pueden ser de dos tipos:

  Periódico puro:

  $7{,}151515\ldots = 7{,}\underbrace{\overset{\frown}{15}}_{\text{PERIODO}}$

  Periódico mixto:

  $8{,}24666\ldots = 8{,}\underbrace{24}_{\text{PARTE DECIMAL NO PERIÓDICA}}\underbrace{\overset{\frown}{6}}_{\text{PERIODO}}$

- **Decimales no exactos y no periódicos:** tienen infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente.

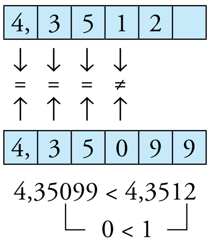
  $\sqrt{2} = 1{,}4124135\ldots$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Representación y ordenación de números decimales

Recuerda

Para comparar dos números decimales, contrastamos cifra a cifra los órdenes de unidades correspondientes, empezando por la izquierda.

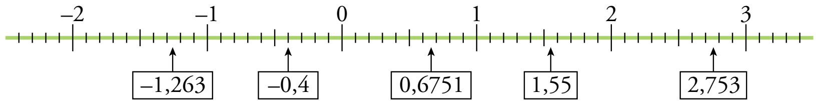


En la web

Practica la representación de números decimales en la recta numérica.

Cada número decimal se representa con un punto de la recta numérica.

Cada punto de la recta numérica se localiza mediante un número decimal.



$$-1{,}263 < -0{,}4 < 0{,}6751 < 1{,}55 < 2{,}753$$

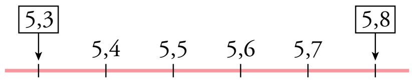
Los números decimales quedan ordenados en la recta numérica.

Si elegimos dos números cualesquiera, el menor queda a la izquierda, y el mayor, a la derecha.

Entre dos números decimales siempre hay otro decimal

- Tomemos dos decimales cualesquiera; por ejemplo, 5,3 y 5,8.

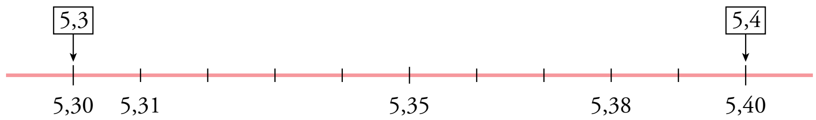
  Es evidente que entre ambos hay otros números.



$$\boxed{5{,}3} < 5{,}4 < 5{,}5 < 5{,}6 < 5{,}7 < \boxed{5{,}8}$$

- Tomemos, ahora, dos consecutivos de los anteriores; por ejemplo, 5,3 y 5,4.

  Ambos números se diferencian en una décima, que se divide en diez centésimas.



$$\boxed{5{,}30} < 5{,}31 < \ldots < 5{,}35 < \ldots < 5{,}38 < \ldots < \boxed{5{,}40}$$

El razonamiento puede continuar indefinidamente, y repetirse para cualquier otro par de números.

Entre dos números decimales cualesquiera hay infinitos decimales.

REGLA PRÁCTICA

El proceso anterior te resultará más claro si aumentas el número de cifras decimales añadiendo ceros a la derecha.

Ejemplo

Intercalemos varios números decimales entre 2,58 y 2,59:

$$\left.\begin{array}{l} 2{,}58 = 2{,}580 \\ 2{,}59 = 2{,}590 \end{array}\right\} \Rightarrow 2{,}580 < 2{,}581 < \ldots < 2{,}589 < 2{,}590$$

Ejemplo

Intercalar un número decimal entre:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{5{,}09} & < & \ldots\ldots\ldots & < & \boxed{5{,}1} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \boxed{5{,}090} & < & 5{,}095 & < & \boxed{5{,}100} \end{array}$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Aproximación de un número decimal a un determinado orden de unidades

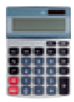
En ocasiones, como resultado del cálculo, obtenemos números con excesivas cifras decimales que resultan de manejo engorroso y aportan información poco significativa. En estos casos, sustituimos los resultados por otros más manejables de *valor aproximado*.

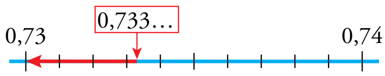
En la web

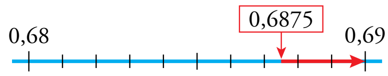
Practica la aproximación de números decimales.

Ejemplo

Para recorrer los 55 metros que van desde el portal de su casa hasta el quiosco de la esquina, Andrés ha necesitado 75 pasos, y Julia, 80 pasos. ¿Cuánto mide aproximadamente el paso de Andrés? ¿Y el de Julia?

55 : 75 = 0,73333… ←  → 55 : 80 = 0,6875





El resultado 0,7333… está más cerca de 0,73 que de 0,74.

Andrés avanza 0,73 m en cada paso.

El resultado 0,6875 está más cerca de 0,69 que de 0,68.

Julia avanza 0,69 m en cada paso.

La manipulación de los resultados anteriores recibe el nombre de *redondeo*.

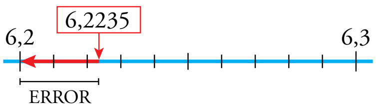
En la web

Practica el redondeo de números decimales.

El **redondeo** consiste en suprimir las cifras decimales a partir de un determinado orden de unidades, sumando uno a la última cifra resultante cuando la primera cifra suprimida es 5 o mayor que 5.

Ten en cuenta

VALOR ⟶ 6,2235



REDONDEO A LAS DÉCIMAS → 6,2

ERROR → 6,2235 – 6,2 =

= 0,0235 < 0,05

↓

MEDIA DÉCIMA

El error cometido en el redondeo es inferior a media unidad del orden al que se aproxima.

Error cometido en el redondeo

En el redondeo damos un valor aproximado; por tanto, cometemos voluntariamente un error.

	VALOR REAL	REDONDEO	ERROR	COTA DE ERROR
ANDRÉS	0,7333…	0,73	0,7333… – 0,73 = 0,00333…	< 0,005
JULIA	0,6875	0,69	0,6875 – 0,69 = 0,0025	< 0,005

En ambos casos hemos redondeado a las centésimas y el error cometido es menor que cinco milésimas, es decir, **menor que media centésima.**

Decimos que media centésima es una **cota del error** cometido.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Escribe cómo se leen las cantidades de la tabla:

	C	D	U,	d	c	m			
			0,	0	3	7			
		1	5,	4	6	8			
			0,	0	0	2	4		
4	3	5	8,	6					

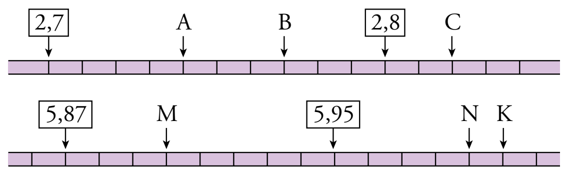
2. Escribe cómo se leen las siguientes cantidades:

a) 1,37
b) 5,048
c) 2,0024
d) 0,00538
e) 0,000468

3. Escribe con cifras.

a) Tres unidades y cinco centésimas.
b) Cuarenta y tres milésimas.
c) Ocho cienmilésimas.
d) Doscientas diecinueve millonésimas.
e) Veintitrés millonésimas.

4. Escribe el número asociado a cada letra:



5. Dibuja una recta numérica y representa en ella los siguientes números:

A = 8,7 B = 9 C = 9,4 D = 10

6. Dibuja una recta numérica y representa los números siguientes sobre ella:

M = –0,02 N = 0,07 K = 0,1 H = 0,15

7. Ordena de menor a mayor en cada caso:

a) 7,4; 6,9; 7,09; 7,11; 5,88
b) 3,9; 3,941; 3,906; 4,001; 4,04
c) 0,039; 0,01; 0,06; 0,009; 0,075

8. Copia y completa en tu cuaderno con los signos <, > o =, según corresponda.

2,5 ☐ 2,50 6,1 ☐ 6,987
3,009 ☐ 3,01 4,13 ☐ 4,1300

9. Intercala un número decimal entre:

a) 2,2 y 2,3
b) 4,01 y 4,02
c) 1,59 y 1,6
d) 8 y 8,1

10. Redondea a las décimas.

a) 5,48
b) 2,8346
c) 3,057

11. Redondea a las centésimas.

a) 6,284
b) 1,53369
c) 0,79462

12. Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS
8,53	
5,884	
$2,\widehat{4}$	
$5,\widehat{17}$	
4,083	
6,995	

13. Completa en tu cuaderno.

NÚMERO	APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS
6,527	
0,4639	
1,0894	
2,096	
$5,\widehat{15}$	
$3,\widehat{24}$	

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Operaciones con números decimales

Ya sabes sumar, restar y multiplicar números decimales. Como repaso, vamos a revisar este recibo de teléfono:

CUOTAS ABONO

$$\begin{array}{r} 15{,}68 \\ +\ 26 \\ \hline 41{,}68 \end{array}$$

COSTE LLAMADAS

MÓVILES

$$\begin{array}{r} 0{,}241 \\ \times\ \ 51 \\ \hline 241 \\ +12\ 05 \\ \hline 12{,}291 \end{array}$$

INTERNACIONALES

$$\begin{array}{r} 0{,}425 \\ \times\ \ 28 \\ \hline 3\ 400 \\ +\ 8\ 50 \\ \hline 11{,}900 \end{array}$$

TOTAL

$$\begin{array}{r} 12{,}2910 \\ +11{,}9000 \\ \hline 24{,}1910 \end{array}$$

TELEFOX

		N.º LLAM.	TIEMPO (minutos)	TARIFAS (€/min)	IMPORTE	SUMAS
A	CUOTAS ABONO					
	– LÍNEA BÁSICA				15,6800	
	– CONEXIÓN INTERNET				26,0000	41,6800
B	CONSUMO LLAMADAS					
	– MÓVILES	36	51	0,2410	12,2910	
	– INTERNACIONALES	2	28	0,4250	11,9000	24,1910
C	DESCUENTOS					
	– AHORRO NÚMEROS MÓVILES				5,8400	
	– PROMOCIÓN FAMILIAS				3,0742	8,9142
	TOTAL (base imponible A + B – C)					56,9568
	IVA (21 %)					11,9609
	TOTAL					68,9177

DESCUENTOS

$$\begin{array}{r} 5{,}84 \\ +\ 3{,}0742 \\ \hline 8{,}9142 \end{array}$$

TOTAL FACTURA

$$\begin{array}{rl} 41{,}68 & \rightarrow \text{CUOTAS} \\ +\ 24{,}191 & \rightarrow \text{COSTE LLAMADAS} \\ \hline 65{,}871 & \\ -\ \ 8{,}9142 & \rightarrow \text{DESCUENTOS} \\ \hline 56{,}9568 & \\ +\ 11{,}9609 & \rightarrow \text{IVA} \\ \hline 68{,}9177 & \end{array}$$

Las operaciones necesarias se realizan al margen y se recogen en las siguientes expresiones:

CÁLCULO BASE IMPONIBLE (A + B – C)

$$\underbrace{(15{,}6800 + 26{,}0000)}_{\text{CUOTA ABONO}} + \underbrace{(51 \cdot 0{,}2410 + 28 \cdot 0{,}4250)}_{\text{CONSUMO}} - \underbrace{(5{,}8400 + 3{,}0742)}_{\text{DESCUENTOS}} =$$

$$= 41{,}6800 + (12{,}2910 + 11{,}9000) - 8{,}9142 =$$

$$= 41{,}6800 + 24{,}1910 - 8{,}9142 = 65{,}871 - 8{,}9142 = 56{,}9568$$

CÁLCULO DEL IVA (21 %)

$$(56{,}9568 \cdot 21) : 100 = 11{,}960928 \xrightarrow[\text{A LAS DIEZMILÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 11{,}9609$$

CÁLCULO DEL TOTAL A PAGAR

$$\underbrace{56{,}9568}_{A + B - C} + \underbrace{11{,}9609}_{IVA} = 68{,}9177 \xrightarrow[\text{A LAS CENTÉSIMAS}]{\text{REDONDEO}} 68{,}92\ €$$

- Para **sumar** o **restar** números decimales, se colocan en columna haciendo coincidir los órdenes de unidades correspondientes.
- Para **multiplicar** números decimales, se opera como si fueran enteros y, después, se separan en el producto tantas cifras decimales como las que reúnen los dos factores.

En la web

Practica el cálculo mental de operaciones con números decimales.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web
Practica el algoritmo de la división con números decimales.

División de números decimales

Vamos a repasar ahora los distintos casos de división con números decimales. Para cada uno, partiremos de un problema que da sentido a la operación.

DIVISIONES CON EL DIVISOR ENTERO

Problema 1

Una máquina tejedora ha fabricado una pieza de tela de 25 metros en 8 minutos.

¿Cuántos metros teje en un minuto?

```
25, 0 0 0 |8
 1 0        3,125
    2 0
       4 0
          0
```

Solución: Teje 3,125 m en un minuto.

Problema 2

En un obrador de pastelería se han empleado 8,2 kg de harina para la fabricación de 15 tartas iguales.

¿Qué cantidad de harina lleva cada tarta?

```
 8, 2        |15
 0  7  0      0,5466…
    1  0  0
       1  0  0
          1  0
            …
```

Solución: Cada tarta lleva 0,54$\widehat{6}$ = 0,547 kg.

Para obtener **cifras decimales en el cociente:**

- Al *bajar* la cifra de las décimas del dividendo, se pone la coma decimal en el cociente y se continúa la división.
- Si no hay suficientes cifras decimales en el dividendo, se añaden los ceros necesarios para alcanzar la aproximación deseada.

Recuerda

Si se multiplican el dividendo y el divisor por el mismo número, el cociente no varía.

```
       6  :  2 = 3  ←┐
× 10   ↓     ↓ × 10   COCIENTES
                      IGUALES
      60  : 20 = 3  ←┘
```

DIVISIONES CON EL DIVISOR DECIMAL

Problema 3

Dos kilos y medio de manzanas han costado 4 euros.

¿Cuánto cuesta un kilo de manzanas?

```
        4 : 2,5
× 10       ⇓       × 10
   40,0  |25
   15 0   1,6
    0 0
```

Solución: Un kilo cuesta 1,60 €.

Problema 4

Por un consumo de 24,88 metros cúbicos de agua nos ha llegado una factura de 93,30 €.

¿A cómo sale el metro cúbico?

```
         93,3 : 24,88
× 100         ⇓         × 100
   9330,00  |2488
   1866 0    3,75
    124 40
     00 00
```

Solución: Un metro cúbico cuesta 3,75 €.

En la web
Cálculo mental con números decimales.

Cuando hay **decimales en el divisor:**

Se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya en el divisor. La nueva división tiene el mismo cociente y el divisor entero.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Operaciones combinadas

En las expresiones de números decimales con paréntesis y operaciones combinadas seguiremos las mismas normas que con los enteros en cuanto a la prioridad de las operaciones, la regla de los signos, etc.

Regla de los signos

$(+) \cdot (+) = +$

$(+) \cdot (-) = -$

$(-) \cdot (+) = -$

$(-) \cdot (-) = +$

Ejemplo

$1,5 - 0,5 \cdot (3,24 : 0,75 - 0,6 : 0,1)$

$1,5 - 0,5 \cdot (4,32 - 6)$

$1,5 - 0,5 \cdot (-1,68)$

$1,5 + 0,84$

$2,34$

Prioridad de las operaciones:

- Primero, los paréntesis.
- Después, las multiplicaciones y divisiones.
- Por último, las sumas y las restas.

$$1,5 - 0,5 \cdot (3,24 : 0,75 - 0,6 : 0,1) = 1,5 - 0,5 \cdot (4,32 - 6) =$$
$$= 1,5 - 0,5 \cdot (-1,68) =$$
$$= 1,5 + 0,84 = 2,34$$

Ten en cuenta

Úsala siguiendo las recomendaciones del profesor o de la profesora y solo cuando te lo pidan.

Los decimales y la calculadora

La calculadora, si se usa adecuadamente, es una magnífica herramienta para evitar cálculos largos y tediosos, y para comprobar soluciones.

Sin embargo, la precisión de la máquina en los resultados es superior a la que necesitamos para resolver la mayoría de problemas y situaciones cotidianas.

Por eso, normalmente, se hace necesario interpretar los resultados teniendo en cuenta el contexto en el que se trabaja.

En la web

Resuelve el problema "De compras".

Ejemplo

Se ha utilizado medio kilo de plata para fabricar 24 medallas destinadas a un campeonato internacional de natación. ¿Cuánta plata contiene cada medalla?

Solución:

500 gramos : 24 → $\boxed{20.833333}$ → 21 gramos / 20,8 gramos

En este caso, parece razonable aproximar a los gramos, 21 g, o como mucho, a las décimas de gramo, 20,8 g.

Ejemplo

¿Cuánto debe cobrar el frutero por un melón que pesa 2,410 kg y que se vende a 1,99 €/kg?

Solución:

2,410 kg · 1,99 €/kg → $\boxed{4.7959}$ → 4,80 €

En este caso, a diferencia del anterior, es norma redondear a los céntimos de euro.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Piensa y practica

1. Responde mentalmente.

a) 0,75 + 0,25
b) 0,75 – 0,25
c) 1,80 + 1,20
d) 1,80 – 1,20
e) 2,30 + 1,80
f) 2,30 – 1,80
g) 3,50 + 1,75
h) 3,50 – 1,75

2. Calcula.

a) 2,37 + 0,356
b) 5,86 – 1,749
c) 13,2 + 4,08 + 2,635
d) 15,4 – 6,843
e) 7,04 + 12,283 + 0,05
f) 0,35 – 0,0648

3. Resuelve.

a) 2,37 – 1,26 + 0,8 – 0,35
b) 2,50 – 1,25 – 1,75 – 0,20
c) 13,48 – 10,7 + 5,328 – 6,726
d) 5,6 – 8,42 – 4,725 + 1,48

4. Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

a) Multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir entre…
b) Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir entre…
c) Multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir entre…

5. Calcula mentalmente.

a) 12 · 0,5	b) 28 · 0,5	c) 0,02 · 0,5
d) 8 · 0,25	e) 1,2 · 0,25	f) 0,24 · 0,25
g) 17 · 0,1	h) 2,3 · 0,1	i) 0,6 · 0,1

6. Calcula.

a) 6,3 · 1,24
b) 0,44 · 2,375
c) 0,016 · 0,0025
d) 143 · 0,068
e) 5,48 · 2,63
f) 0,15 · 1,01

7. Experimenta, pon ejemplos y, después, completa:

a) Dividir entre 0,5 es lo mismo que multiplicar por…
b) Dividir entre 0,25 es lo mismo que multiplicar por…
c) Dividir entre 0,1 es lo mismo que multiplicar por…

8. Divide mentalmente.

a) 7 : 0,5	b) 0,3 : 0,5	c) 2,3 : 0,5
d) 2 : 0,25	e) 0,6 : 0,25	f) 1,2 : 0,25
g) 8 : 0,1	h) 0,7 : 0,1	i) 4,8 : 0,1

9. Calcula el cociente exacto o, como máximo, con tres cifras decimales.

a) 8 : 6	b) 218 : 16	c) 3 : 4
d) 12 : 536	e) 149,04 : 23	f) 2,58 : 15

10. Sustituye cada división por otra equivalente con el divisor entero. Después, calcula el cociente exacto o con tres cifras decimales.

a) 6 : 0,2	b) 13 : 0,75
c) 53 : 4,11	d) 4 : 0,009
e) 45,6 : 3,8	f) 23,587 : 5,1
g) 2,549 : 8,5	h) 6,23 : 0,011

11. Ejercicio resuelto

Aproximar a las centésimas el cociente de la división 17 : 2,45.

1700,000	$\cancel{,}$ 2,45
230 0	6,938
09 50	
2 150	APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS } → 6,94
190	

12. Aproxima a las centésimas cada cociente:

a) 5 : 6	b) 7 : 9
c) 6 : 3,5	d) 2,7 : 5,9

13. Calcula.

a) 2,6 · 100	b) 5,4 : 10	c) 0,83 · 10
d) 12 : 100	e) 0,0048 · 1 000	f) 350 : 1 000

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Raíz cuadrada de un número decimal

Ya sabes que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a \qquad \sqrt{0,25} = 0,5 \Leftrightarrow 0,5^2 = 0,25$$

También sabes que hay muchos números cuya raíz no es exacta. En esos casos, podemos tantear aproximaciones con tantas cifras decimales como queramos.

Como ejemplo, vamos a calcular sucesivas aproximaciones de $\sqrt{7,2}$.

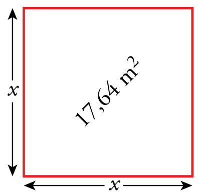
$$\left.\begin{array}{l} 2^2 = 4 \longrightarrow \text{no llega} \\ 3^2 = 9 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2 < \sqrt{7,2} < 3$$

$$\left.\begin{array}{l} 2,6^2 = 6,76 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2,7^2 = 7,29 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2,6 < \sqrt{7,2} < 2,7$$

$$\left.\begin{array}{l} 2,68^2 = 7,1824 \longrightarrow \text{no llega} \\ 2,69^2 = 7,2361 \longrightarrow \text{se pasa} \end{array}\right\} 2,68 < \sqrt{7,2} < 2,69$$

Aplicación

Calcular el lado de un cuadrado conociendo su superficie.



$$x \cdot x = x^2 = 17,64$$
$$x = \sqrt{17,64} = 4,2 \text{ m}$$

La raíz cuadrada en la calculadora

Normalmente, para calcular la raíz cuadrada, usamos la tecla $\boxed{\sqrt{}}$ de la calculadora, que nos ofrece con comodidad la aproximación deseada.

Ejemplo

Calcular $\sqrt{35}$.

a) Con dos cifras decimales.

En la calculadora obtenemos $\sqrt{35} = 5,9160797...$

Para dar la raíz con dos cifras decimales, aproximamos a las centésimas; es decir, $\sqrt{35} = 5,92$.

b) Aproximando el resultado a las milésimas.

$\sqrt{35} = 5,916$

Piensa y practica

1. Calcula las siguientes raíces e xactas:

a) $\sqrt{0,04}$ b) $\sqrt{0,49}$ c) $\sqrt{0,81}$
d) $\sqrt{0,0001}$ e) $\sqrt{0,0121}$ f) $\sqrt{0,1225}$

2. Obtén por tanteo, con una cifra decimal:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{11,5}$ c) $\sqrt{150}$

3. Obtén las siguientes raíces con dos cifras decimales. Ayúdate con la calculadora.

a) $\sqrt{7,84}$ b) $\sqrt{56}$ c) $\sqrt{39,0625}$

4. Usa la calculadora y redondea a las milésimas.

a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{2,54}$ c) $\sqrt{76,38}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Las fracciones

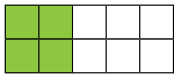
En la web
Practica con el concepto de fracción.

Ya conoces las fracciones. Vamos a recordar ahora algunos aspectos importantes para avanzar en la unidad.

Fracciones equivalentes

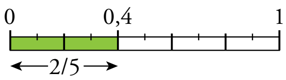
En la web
Repasa el concepto de fracciones equivalentes.

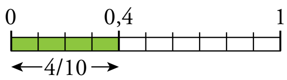
Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando expresan la misma porción de unidad.

$\frac{2}{5}$  $=$ $\frac{4}{10}$ 

Dos fracciones equivalentes tienen el mismo valor numérico.

$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$ $\qquad$ $\frac{4}{10} = 4 : 10 = 0{,}4$





Recuerda

¿Cómo reconocer fracciones equivalentes?

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

En las fracciones equivalentes, los productos de los términos cruzados son iguales.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \leftrightarrow \underbrace{2 \cdot 15}_{30} = \underbrace{6 \cdot 5}_{30}$$

■ PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES

Si se multiplican los dos miembros de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

■ SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

En la web
Practica la simplificación de fracciones.

Como consecuencia de la propiedad anterior, podemos afirmar:

Si se dividen los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

Esta transformación recibe el nombre de **simplificación de fracciones.**

Una fracción que no se puede simplificar se llama **irreducible.**

En la web
Practica el cálculo de fracciones irreducibles.

$$\frac{12}{30} = \frac{12:2}{30:2} = \frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5} \rightarrow \text{FRACCIÓN IRREDUCIBLE}$$

Piensa y practica

1. Escribe tres fracciones equivalentes a:

a) $\frac{2}{3}$ $\quad$ b) $\frac{6}{8}$ $\quad$ c) $\frac{5}{50}$

2. Divide, expresa en forma decimal y comprueba que las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$ son equivalentes.

3. Obtén en cada caso la fracción irreducible.

a) $\frac{15}{18}$ $\quad$ b) $\frac{30}{54}$ $\quad$ c) $\frac{25}{75}$

4. Calcula, en cada igualdad, el término desconocido:

a) $\frac{8}{20} = \frac{10}{x}$ $\quad$ b) $\frac{25}{x} = \frac{15}{9}$ $\quad$ c) $\frac{x}{21} = \frac{12}{28}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Reducción de fracciones a común denominador

Comparar, sumar y restar fracciones es muy sencillo cuando todas tienen el mismo denominador. Por eso, cuando no lo tienen, las sustituimos por otras equivalentes con igual denominador.

Analiza el proceso que se ha de seguir en el ejemplo que viene a continuación.

Ejemplo

Vamos a ordenar de menor a mayor las fracciones $\frac{7}{12}, \frac{13}{30}$ *y* $\frac{11}{20}$.

- Elegimos como denominador común el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{l} 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{mín.c.m. } (12, 30, 20) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

- En cada fracción, multiplicamos numerador y denominador por el mismo número, el adecuado para obtener 60 en el denominador:

$$\left.\begin{array}{l} 60 : 12 = 5 \rightarrow \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60} \\ 60 : 30 = 2 \rightarrow \frac{13}{30} = \frac{13 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{26}{60} \\ 60 : 20 = 3 \rightarrow \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{33}{60} \end{array}\right\} \frac{26}{60} < \frac{33}{60} < \frac{35}{60}$$

Ahora, ya podemos ordenar las fracciones: $\frac{13}{30} < \frac{11}{20} < \frac{7}{12}$

Para reducir fracciones a común denominador:

- Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Se multiplican los dos miembros de cada fracción por el número que resulta de dividir el mínimo común múltiplo entre el denominador correspondiente.

Recuerda

Para obtener el mínimo común múltiplo de varios números:

- Se descomponen en factores primos.
- Se toman los factores primos comunes y los no comunes, con el mayor exponente.

En la web

Practica la comparación de fracciones.

Piensa y practica

5. Reduce a común denominador, poniendo como denominador común el que se indica en cada caso.

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \rightarrow$ Denominador común: 8

b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{9} \rightarrow$ Denominador común: 18

c) $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{9} \rightarrow$ Denominador común: 36

d) $\frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{10} \rightarrow$ Denominador común: 20

6. Reduce a común denominador los siguientes grupos de fracciones:

a) $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

d) $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{11}{18}$

e) $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{15}$

f) $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}$

g) $\frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

h) $\frac{2}{5}, \frac{5}{9}, \frac{11}{15}, \frac{22}{45}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Fracciones y números decimales

Las notaciones fraccionaria y decimal son formas numéricas y, como verás ahora, muchas cantidades se pueden expresar tanto en la una como en la otra.

Paso de fracción a decimal

Ya sabes que una fracción es una división indicada cuyo resultado es un decimal exacto o un decimal periódico.

$\frac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6$ — DECIMAL EXACTO

$\frac{5}{3} = 5 : 3 = 1{,}\widehat{6}$ — DECIMAL PERIÓDICO PURO

$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8\widehat{3}$ — DECIMAL PERIÓDICO MIXTO

Toda fracción se puede pasar a forma decimal. Para ello, se divide el numerador entre el denominador. Sin embargo, lo contrario no es cierto: solo se pueden pasar a fracción los decimales exactos y los periódicos.

Decimal exacto. Paso a fracción

Un decimal exacto se transforma en fracción quitándole la coma y dividiéndolo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se hayan suprimido.

Ejemplo

$0{,}7 = \frac{7}{10}$

$1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$

$0{,}875 = \frac{875}{1\,000} = \frac{7}{8}$

Piensa y practica

1. Expresa en forma decimal.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{10}$

e) $\frac{2}{9}$ f) $\frac{17}{110}$

2. Expresa en forma de fracción.

a) 0,5 b) 0,8

c) 1,6 d) 0,04

e) 1,35 f) 0,325

3. Tantea, prueba y resuelve:

a) Comprueba con la calculadora.

$\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}11111\ldots$

$\frac{2}{9} = 2 : 9 = 0{,}22222\ldots$

$\frac{3}{9} = 3 : 9 = 0{,}33333\ldots$

b) Busca la fracción generatriz de:

0,44444… 0,55555… 1,55555…

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Sistema de numeración decimal

1. Copia y completa.

a) 5 décimas = … milésimas

b) 2 milésimas = … millonésimas

c) 6 cienmilésimas = … centésimas

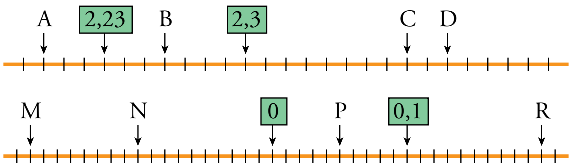
d) 8 millonésimas = … milésimas

2. Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) 5,1 - 5,099 - 4,83 - 4,9 - 4,99

b) 0,21 - 0,03 - 0,15 - 0,209 - 0,101 - 0,121

3. Escribe el número asociado a cada letra.



4. Copia y completa la tabla en tu cuaderno.

NÚMERO	$2,\widehat{7}$	$5,\widehat{29}$	$4,6\widehat{51}$
APROXIMACIÓN A LAS UNIDADES			
APROXIMACIÓN A LAS DÉCIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS CENTÉSIMAS			
APROXIMACIÓN A LAS MILÉSIMAS			

5. Berta pesa 52 kg y 450 gramos. María pesa 52,5 kg. Jacinto pesa más que Berta, pero menos que María.

a) ¿Qué puedes decir del error cometido al estimar el peso de Jacinto en 52 kilos?

b) ¿Y al estimarlo en cincuenta y dos kilos y medio?

Operaciones con números decimales

6. Calcula.

a) 3,2 – 1,63 – 0,528

b) 0,85 + 1,23 – 0,638 – 0,4

c) 3,458 – (6,7 – 4,284)

d) 5,2 – (2,798 + 1,36)

7. Opera con la calculadora y aproxima el resultado a las centésimas.

a) $2,63 \cdot 0,84$

b) $0,27 \cdot 0,086$

c) 62,35 : 12

d) 5,27 : 153

e) $\sqrt{851}$

f) $\sqrt{13,29}$

8. Obtén el resultado con ayuda de la calculadora y redondea a las centésimas.

a) 8,73 : 1,7 – 3,42 : 2,1

b) (8,73 : 1,7 – 3,42) : 2,1

9. Opera.

a) $5,8 - 3,2 \cdot 1,6 - 0,29$

b) $(5,8 - 3,2) \cdot 1,6 - 0,29$

c) $5,8 - 3,2 \cdot (1,6 - 0,29)$

d) $5,8 - (3,2 \cdot 1,6 - 0,29)$

10. Para multiplicar por 0,1 podemos dividir entre diez, como ves en el ejemplo.

- **80 · 0,1 = 80 : 10 = 8**

¿Por qué número hay que dividir para …

a) … multiplicar por 0,01?

b) … multiplicar por 0,001?

11. Copia y completa en tu cuaderno este cuadrado mágico.

La suma de cada fila, de cada columna y de cada diagonal ha de ser la misma.

	1,23	
1,08	0,03	0,78

12. Continúa en tres términos cada serie.

a) 2,37 - 2,16 - 1,95 - 1,74 - …

b) 5 - 1 - 0,2 - 0,04 - …

c) 0,24 - 1,2 - 6 - 30 - …

13. Calcula, con dos cifras decimales, la nota media de Julián en cada asignatura.

a) Lengua: 8 - 6 - 7 - 7 - 6 - 7

b) Matemáticas: 5,2 - 6 - 5,8 - 4,5 - 7,1 - 5,7

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

14. ¿Verdadero o falso?

a) El producto de un decimal por un entero es siempre decimal.

b) El producto de dos números decimales puede ser entero.

c) Al dividir dos números decimales nunca se obtiene un entero.

d) La raíz cuadrada de un número decimal siempre es menor que el número.

e) La raíz cuadrada de un número decimal nunca es un decimal exacto.

15. Expresa en horas como número decimal y fracción.

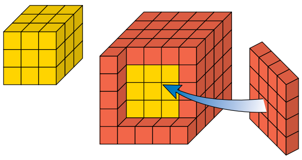
a) 48 min   b) 66 min   c) 6 120 s

16. Pasa a horas, minutos y segundos.

a) 8,42 h   b) 123,45 min   c) 12 746 s

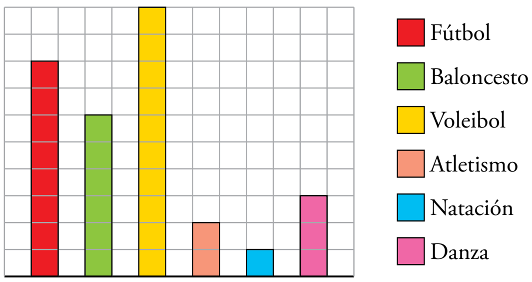
Fracciones. Aplicación de conceptos

17. El cubo pequeño está construido con dados amarillos. Para formar el cubo grande, recubrimos el anterior de dados rojos.



¿Qué fracción de los dados del cubo grande son amarillos? ¿Y rojos?

18. La gráfica informa sobre los deportes preferidos en una clase de 30 estudiantes de segundo de ESO.



¿Qué fracción de la clase…

a) … practica fútbol?

b) … practica baloncesto?

c) … no practica baloncesto?

d) … no practica ni fútbol ni baloncesto?

19. ¿Cuántos gramos son?

a) $\frac{3}{4}$ de kilo   b) $\frac{3}{5}$ de kilo   c) $\frac{7}{20}$ de kilo

20. ¿Cuántos minutos son?

a) $\frac{5}{6}$ de hora   b) $\frac{3}{12}$ de hora   c) $\frac{4}{5}$ de hora

21. ¿Qué fracción de hora son?

a) 5 minutos   b) 24 minutos   c) 360 segundos

Equivalencia de fracciones

22. Escribe:

a) Una fracción equivalente a 4/10 que tenga por numerador 6.

b) Una fracción equivalente a 15/45 que tenga por denominador 12.

c) Una fracción equivalente a 35/45 que tenga por numerador 91.

23. Simplifica:

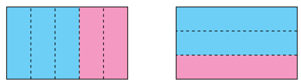
a) $\frac{12}{16}$ b) $\frac{21}{28}$ c) $\frac{30}{48}$ d) $\frac{33}{55}$ e) $\frac{42}{99}$ f) $\frac{63}{180}$

24. Reduce a común denominador.

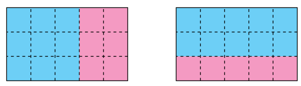
a) $\frac{5}{6}, \frac{1}{9}$ b) $1, \frac{3}{12}, \frac{5}{8}$

c) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ d) $\frac{4}{9}, \frac{17}{33}, \frac{52}{99}$

25. Estos dos trozos de tela son igual de grandes:



¿Cuál de los dos tiene una porción mayor de azul? Explica la transformación que propone este gráfico para resolver la pregunta:



Fracciones y decimales

26. Expresa en forma decimal:

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{27}{50}$ c) $\frac{13}{125}$ d) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{5}{11}$

27. Pasa a forma fraccionaria.

a) 1,1   b) 0,13   c) 0,008   d) $0,\widehat{8}$

e) $1,\widehat{8}$ f) $0,2\widehat{8}$ g) $0,\widehat{24}$ h) $0,0\widehat{2}$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resuelve problemas

28. ¿Cuánto cuestan dos kilos y ochocientos gramos de manzanas a 1,65 € el kilo?

29. ¿Cuánto pagaré si compro 1,083 kg de salmón a 9,75 €/kg?

Atención al redondeo.

30. Para fabricar 3 500 dosis de cierto medicamento, se necesitan 1,96 kg de principio activo. ¿Cuántos gramos de este principio lleva cada dosis?

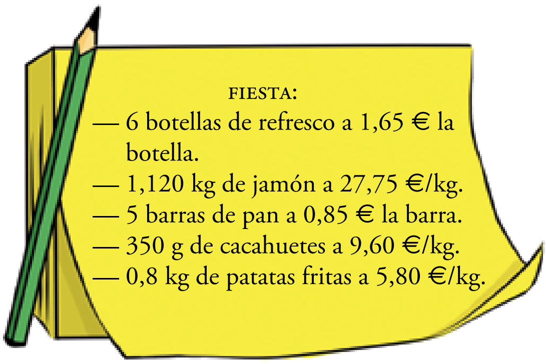
31. Marcelo compra un melón que pesa dos kilos y cuatrocientos gramos.

Si el melón se vende a 1,99 €/kg, ¿cuál de estas cantidades debe pagar por la compra?

4,80 € 4,90 € 4,78 € 4,88 €

32. Karla ha comprado 340 gramos de jamón, ha pagado con un billete de 10 € y le han devuelto 3,88 €. ¿A cómo está el kilo de jamón?

33. Para celebrar una fiesta, trece amigos adquieren:



¿Cuánto debe poner cada uno?

34. Una empresa inmobiliaria adquiere un terreno rectangular de 125,40 m de largo y 74,60 m de ancho por 350 000 €. Después, lo urbaniza, con un coste de 62 528,43 €. Y, por último, lo divide en parcelas y lo pone a la venta a 52,75 € el metro cuadrado. ¿Qué beneficio espera obtener?

35. Problema resuelto

Un ciclista ha cubierto los 52 kilómetros de una etapa contrarreloj en una hora y treinta seis minutos. ¿Cuál ha sido su velocidad media en km/h?

Resolvemos el problema con una división:

Velocidad (km/h) = Espacio (km) : Tiempo (h)

Para que los datos sean compatibles, hemos de expresar el tiempo en horas:

1 h 36 min = (1 + 36 : 60) h = (1 + 0,6) h = 1,6 h

Solución: 52 : 1,6 = 32,5 km/h

36. Un camión de mudanzas ha realizado un viaje de 169,29 km en 2 h 42 min. ¿Cuál ha sido su velocidad media?

37. Problema resuelto

Un ciclista ha cubierto los 52 kilómetros de una etapa contrarreloj a una velocidad de 32,5 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en la etapa?

Resolvemos el problema con una división:

Tiempo (h) = Espacio (km) : Velocidad (km/h)

52 : 32,5 = 1,6 h

Pero la solución, una cantidad de tiempo, se tiene que expresar en el sistema sexagesimal. Para eso, calculamos el cociente entero (horas), multiplicamos el resto por 60 y seguimos dividiendo para obtener los minutos.

```
520            | 32,5
195 →  1 9 5     1 h 36 min
     ×   6 0
     1 1 7 0 0
       1 9 5 0
         0 0 0
```

Solución: 52 : 32,5 = 1 hora y 36 minutos

38. Un tren de mercancías ha recorrido 187 km a 55 km/h. ¿Cuánto tiempo ha invertido en el trayecto?

39. Un autobús de línea ha invertido siete horas y doce minutos en el trayecto Barcelona – Murcia. ¿Cuál ha sido la velocidad media del viaje?

Si te falta algún dato, debes buscarlo.

40. Un barco velero, a una velocidad media de 5 nudos, recorre la distancia entre dos islas en una hora y 24 minutos. ¿Qué distancia ha cubierto en la travesía?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Analiza y exprésate

41. Describe las distintas formas en que se ha resuelto el problema y di si aprecias errores en algunas de ellas.

Un camión circula por una autopista a 90 kilómetros por hora. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 300 km?

Resolución 1

```
300       |90
 30→30     3 h 20 min
  ×  60
   1800
    000
```

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 2

```
300,00 |90
 30 0   3,33
  3 00
     30
```

El camión tarda 3 h 33 min.

Resolución 3

$$\begin{array}{ccccccc} 300 = 90 & + & 90 & + & 90 & + & 30 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1\text{h} & & 1\text{h} & & 1\text{h} & & 20\text{ min} \end{array}$$

Resolución 4

90 km/h = 90 000 : 60 m/min = 1 500 m/min

300 km = 300 000 m

300 000 m : 1 500 m/min = 200 min =

= 180 min + 20 min = 3 h 20 min

El camión tarda 3 h 20 min.

Resolución 5

```
300     |90
  300    3,33 h = 3 h + 0,33 h
    300
      30
```

0,33 h $\rightarrow$ 0,33 · 60 = 19,8 min = 19 + 0,8

0,8 min $\rightarrow$ 0,8 · 60 = 48 s

El camión tarda 3,33 h = 3 h 19 min 48 s.

Autoevaluación

1. Escribe con cifras.

a) Dieciocho centésimas.

b) Trece cienmilésimas.

c) Doscientas treinta y cinco millonésimas.

2. Redondea a las centésimas.

a) 5,052 b) 0,55555 c) 0,7481

3. Calcula.

a) 0,25 · 11,48 b) 23 : 4,5

c) 0,08 : 1,6 d) 10,2 : 0,034

4. Calcula.

a) 1,4 – 1,8 · 0,2 – 0,4 : 1,6

b) 2,024 – 0,3 · (7,1 – 4,02)

5. Obtén con la calculadora y redondea a las centésimas.

a) $\sqrt{21,8}$ b) $\sqrt{290}$

6. Expresa en forma decimal.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{26}{13}$ c) $\frac{15}{12}$

7. Expresa cada decimal con una fracción irreducible.

a) 0,05 b) 1,2 c) $0,\widehat{7}$ d) $0,3\widehat{6}$

8. Simplifica.

a) $\frac{50}{75}$ b) $\frac{27}{45}$ c) $\frac{210}{180}$

9. Reduce a común denominador las fracciones.

a) $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{7}{10}$

10. Un automóvil realiza un viaje de ida y vuelta. En la ida gasta 13/15 de la capacidad total del depósito de combustible. A la vuelta, reposta, y consume 17/20 de este. ¿En cuál de los dos trayectos ha gastado más combustible?

11. Un camión que circula por una autovía a una velocidad de 95 km/h debe realizar un recorrido de 228 km. ¿Cuánto durará el viaje?

12. Un mayorista compra en una bodega una cuba con 15 000 litros de vino a 0,60 €/litro, para envasarlo en botellas de 0,75 litros destinadas a una cadena de supermercados. ¿Cuál será la ganancia si recibe 0,95 € por cada botella y estima sus gastos de almacén en 2 350 €?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....