9 Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es un importantísimo resultado geométrico. Como sabes, relaciona los cuadrados de los lados de cualquier triángulo rectángulo.

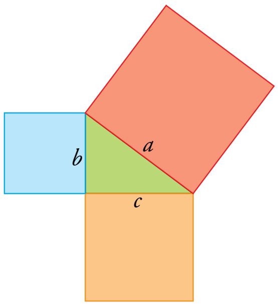
Hace más de 3000 años, tanto los egipcios como los babilonios sabían que ciertos triángulos eran rectángulos. En concreto, aquellos cuyos lados miden 3, 4 y 5, y los de medidas 5, 12 y 13. Se valían de esta propiedad para construir ángulos rectos.

Pitágoras conoció, indudablemente, estos resultados. Su gran mérito fue que enunció el teorema de forma general, relacionando las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de *cualquier* triángulo rectángulo. Sin embargo, no fue él quien dio la demostración de este teorema, sino Euclides dos siglos después.

Euclides de Alejandría escribió sus *Elementos* en torno al año 300 a.C. Se trata de un conjunto de 13 libros en los que se recopila, amplía y organiza todo el saber matemático de su época, aportándole una sólida estructura lógica. En el libro I demuestra el que ahora llamamos *teorema de Pitágoras.*

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, los lados menores son los que forman el ángulo recto. Se llaman **catetos.** El lado mayor se llama **hipotenusa.**

En general, llamaremos a a la hipotenusa y b y c a los catetos.

El **teorema de Pitágoras** afirma lo siguiente: $a^2 = b^2 + c^2$

Esto quiere decir que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Esta relación es cierta, solamente si el triángulo es rectángulo.

¡Sorprendente!

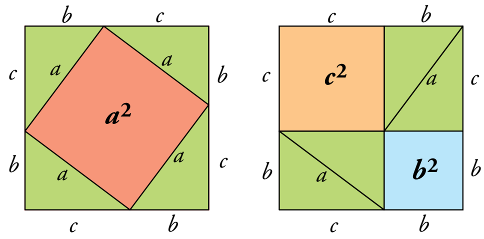
Esta demostración la construyeron los chinos 400 años antes de que naciera Pitágoras.

En la web

Demostración gráfica del teorema de Pitágoras.

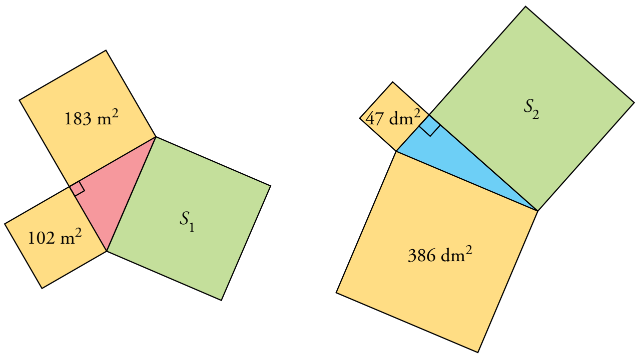
Observa la siguiente demostración:

Los dos cuadrados iguales tienen por lados $b + c$. Comparando las dos descomposiciones, es claro que $a^2 = b^2 + c^2$.



Ejercicio resuelto

¿Cuáles son las áreas de los cuadrados desconocidos en las siguientes figuras?



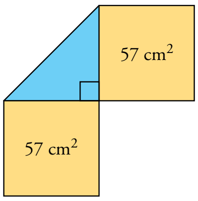
Como ambos triángulos son rectángulos, en los dos casos el área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de los cuadrados menores. Por tanto:

$S_1 = 183 \text{ m}^2 + 102 \text{ m}^2 = 285 \text{ m}^2$ $\qquad S_2 = 386 \text{ dm}^2 - 47 \text{ dm}^2 = 339 \text{ dm}^2$

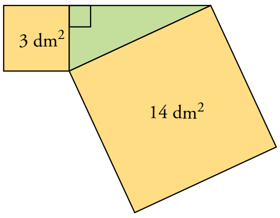
Piensa y practica

1. Dibuja en tu cuaderno estas figuras. Complétalas construyendo el cuadrado que falta en cada una y di cuál es su área.

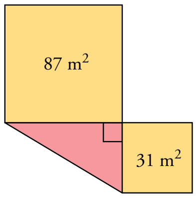
a)



b)



c)



En la web Actividad manipulativa para razonar sobre la demostración del teorema de Pitágoras.

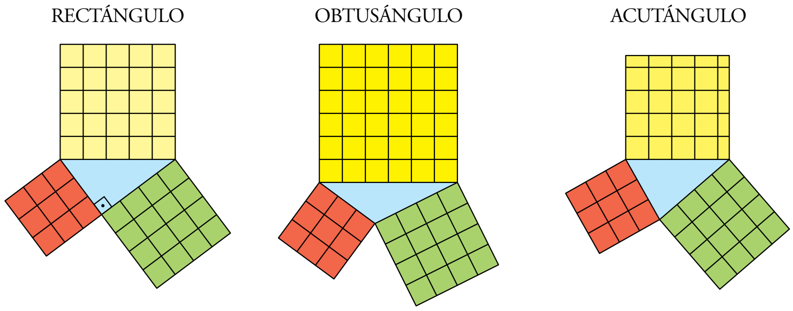
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Los lados determinan el tipo de triángulo

Si conocemos los lados de un triángulo, podemos averiguar si es o no rectángulo, comparando el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos.

¿a^2 es igual que $b^2 + c^2$?

- Si $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo es **rectángulo.**
- Si $a^2 > b^2 + c^2$, el triángulo es **obtusángulo.**
- Si $a^2 < b^2 + c^2$, el triángulo es **acutángulo.**



5^2 es igual a $3^2 + 4^2$ 6^2 es mayor que $3^2 + 4^2$ $4{,}5^2$ es menor que $3^2 + 4^2$

Justificación

Si en un triángulo rectángulo abrimos el ángulo que forman los dos catetos, el lado opuesto aumenta y, por tanto, su cuadrado también aumenta.

Si cerramos dicho ángulo (lo hacemos agudo), el lado opuesto es menor de lo que era la hipotenusa.

Ejercicio resuelto

Indicar si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

a) 70 cm, 240 cm, 245 cm

b) 15 dm, 36 dm, 39 dm

c) 18 m, 80 m, 83 m

a) $70^2 + 240^2 = 4\,900 + 57\,600 = 62\,500$; $245^2 = 60\,025$

245^2 es menor que $70^2 + 240^2$, por tanto, el triángulo es ACUTÁNGULO.

b) $15^2 + 36^2 = 1\,521$; $39^2 = 1\,521$

Como son iguales, el triángulo es RECTÁNGULO.

c) $18^2 + 80^2 = 6\,724$; $83^2 = 6\,889$

83^2 es mayor que $18^2 + 80^2$, por tanto, el triángulo es OBTUSÁNGULO.

Ternas pitagóricas

Si tres números naturales, c, b, a, cumplen $c^2 + b^2 = a^2$, es decir, si pueden ser las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, entonces decimos que forman una **terna pitagórica.** Aquí tienes algunas:

3, 4, 5	8, 15, 17	12, 35, 37
5, 12, 13	9, 40, 41	13, 84, 85
7, 24, 25	11, 60, 61	16, 63, 65

Fíjate que si c, b, a es una terna pitagórica, también lo es kc, kb y ka.

Por ejemplo, 6, 8, 10 (obtenidas al multiplicar por 2 cada uno de los componentes de la terna 3, 4, 5) es una terna pitagórica.

Piensa y practica

2. Comprueba que las nueve ternas de arriba son, efectivamente, pitagóricas.

Por ejemplo, 3, 4 y 5 es pitagórica, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

3. Clasifica según sus ángulos estos triángulos:

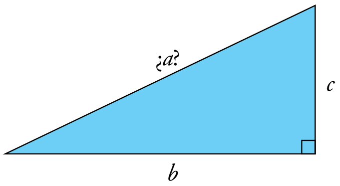
a) 17 m, 6 m, 14 m b) 64 cm, 84 cm, 57 cm

c) 45 dm, 28 dm, 53 dm d) 5 mm, 5 mm, 8 mm

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Cálculo de un lado conociendo los otros dos

Si sabemos que un triángulo es rectángulo, y conocemos la longitud de dos de sus lados, el teorema de Pitágoras nos permite calcular la longitud del tercero.



Cálculo de la hipotenusa conociendo los dos catetos

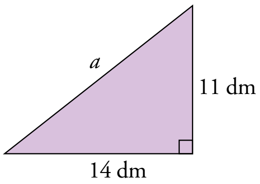
$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

Ejemplos

- En un triángulo rectángulo, sus catetos miden 88 m y 105 m. Calcula la longitud de la hipotenusa.

$$a = \sqrt{88^2 + 105^2} = \sqrt{7\,744 + 11\,025} = \sqrt{18\,769} = 137$$

La hipotenusa mide 137 m.



- Halla la hipotenusa del triángulo del margen.

$$a = \sqrt{14^2 + 11^2} = \sqrt{196 + 121} = \sqrt{317} = 17{,}8$$

La hipotenusa mide 17,8 dm aproximadamente.

Cálculo de un cateto conociendo el otro y la hipotenusa

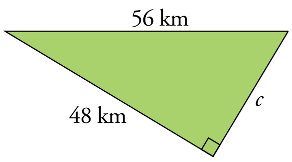
$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Ejemplos

- En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 130 cm, y uno de los catetos, 32 cm. Halla la longitud del otro cateto.

$$b = \sqrt{130^2 - 32^2} = \sqrt{16\,900 - 1\,024} = \sqrt{15\,876} = 126$$

El otro cateto mide 126 cm.



- Halla la longitud del lado desconocido en el triángulo del margen.

$$c = \sqrt{56^2 - 48^2} = \sqrt{3\,136 - 2\,304} = \sqrt{832} = 28{,}84$$

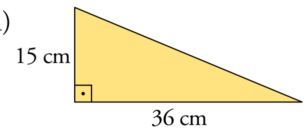
El lado desconocido mide 28,84 km aproximadamente.

Piensa y practica

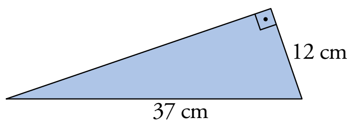
1. Halla la longitud del lado desconocido en estos triángulos rectángulos, donde a es la hipotenusa, aproximando cuando haga falta hasta dos cifras decimales:

a) c = 70 mm	a = 74 mm
b) b = 15 cm	a = 25 cm
c) b = 14 m	c = 48 m
d) b = 13 pulgadas	c = 84 pulgadas
e) b = 5,5 cm	a = 30,5 cm
f) c = 24 km	a = 26 km
g) b = 65 m	a = 425 m

h)



i)



j) Los catetos del triángulo rectángulo miden 3 dam y 5 dam respectivamente.

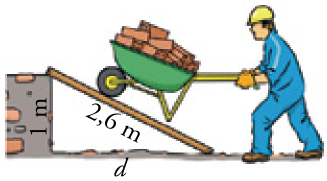
k) La hipotenusa del triángulo rectángulo mide 10,7 m, y uno de los catetos, 7,6 m.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios resueltos

1. ***Queremos salvar un escalón de 1 m de altura para pasar con la carretilla. Disponemos de un tablón de 2,6 m. ¿A qué distancia del escalón empieza la rampa?***

En este triángulo rectángulo, conocemos la hipotenusa y un cateto. Hemos de calcular el otro cateto.



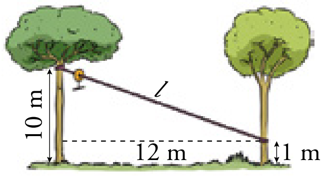
$d^2 = 2{,}6^2 - 1^2 = 6{,}76 - 1 = 5{,}76$

$d = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ m

El pie del tablón estará situado a 2,4 m del escalón, o algo menos para que pueda apoyarse arriba.

2. ***Hay que hacer una tirolina entre dos árboles separados 12 m. El cable estará atado a 10 m de altura de un árbol y a 1 m de altura en el otro. ¿Cuál es la longitud del cable en tensión?***

Conociendo los catetos, hallamos la hipotenusa.



$l^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

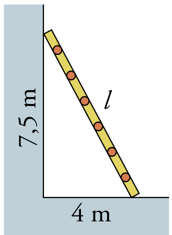
$l = \sqrt{225} = 15$ m

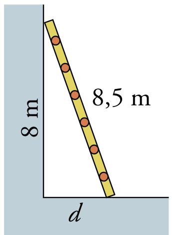
La longitud del cable tenso es de 15 m. Además, habrá que tener en cuenta la longitud necesaria para atarlo a cada árbol.

3. ***Una escalera cuyo pie está a 4 m de la pared se apoya en esta, alcanzando una altura de 7,5 m. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el pie para que llegue a una altura de 8 m?***

Calculamos primero la longitud de la escalera.

$$l^2 = 4^2 + 7{,}5^2 = 72{,}25 \rightarrow l = \sqrt{72{,}25} = 8{,}5 \text{ m}$$





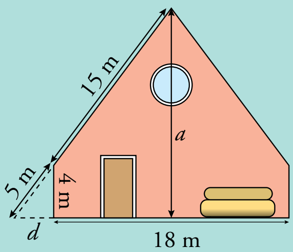
Ahora calculamos la distancia a la que debe estar para alcanzar 8 m de altura:

$$d^2 = 8{,}5^2 - 8^2 = 72{,}25 - 64 = 8{,}25$$

$$d = \sqrt{8{,}25} = 2{,}87 \text{ m}$$

El pie de la escalera debe situarse a 2,87 m de la pared.

4. ***Álvaro ha tomado estas medidas para hallar la altura, a, de la pared de su buhardilla. Calcular d y, luego, a.***



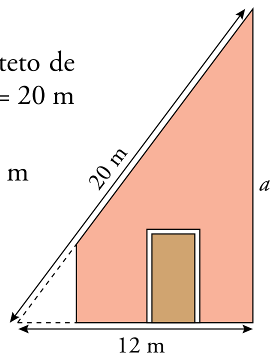
Calculamos la distancia d.

$d^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow d = \sqrt{9} = 3$ m

Ahora calculamos la altura, a, sabiendo que es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 15 + 5 = 20 m y el otro cateto 3 + 9 = 12 m:

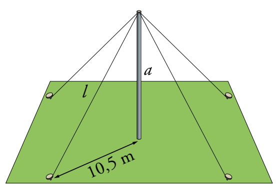
$a^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \rightarrow a = \sqrt{256} = 16$ m

La altura de la buhardilla es de 16 m.



Piensa y practica

2. Para colocar un mástil, se han utilizado 64 m de cable. Se sujeta con cuatro cables y se necesita 1 m de longitud por cada amarre. Si todos los cables están atados al extremo de arriba y a un tornillo anclado en el suelo a 10,5 m de su pie, ¿qué altura alcanza el mástil?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

3 Aplicaciones del teorema de Pitágoras

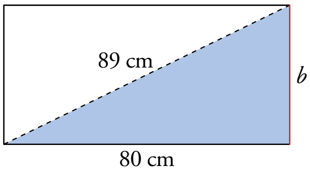
Hay multitud de polígonos en los que algunos de sus elementos son lados de un triángulo rectángulo. Eso permite relacionarlos mediante el teorema de Pitágoras y calcular la longitud de uno de ellos conociendo los otros dos.

Ejercicios resueltos

1. ***La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados, 80 cm. Calcula su área.***

El área de un rectángulo de lados a y b es: $A = a \cdot b$

Empezamos por calcular el otro lado:



$$b = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39$$

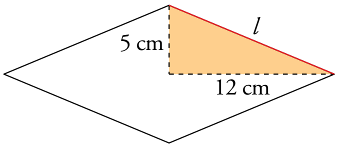
El lado corto mide 39 cm.

El área es:

$$A = 80 \cdot 39 = 3\,120 \text{ cm}^2$$

2. ***Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Hallar su perímetro.***

Comenzamos por calcular la longitud de un lado:



$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

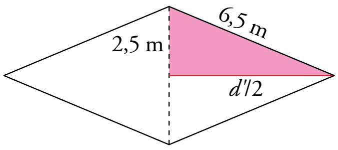
Cada lado mide 13 cm.

El perímetro es:

$$P = 4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$$

3. ***El lado de un rombo mide 6,5 m y una de sus diagonales, 5 m. Hallar su área.***

El área de un rombo cuyas diagonales son d y d' es: $A = \dfrac{d \cdot d'}{2}$



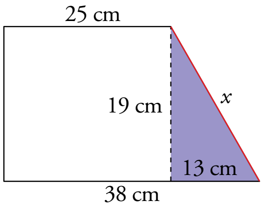
Conocemos una diagonal. El teorema de Pitágoras nos permite calcular la otra:

$$\frac{d'}{2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ m}$$

La segunda diagonal mide, pues, $6 \cdot 2 = 12$ m. Por tanto, $A = \dfrac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ m}^2$.

4. ***Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Hallar su perímetro.***

Empezamos calculando la longitud del lado oblicuo:



$$x = \sqrt{13^2 + 19^2} = \sqrt{530} \approx 23,02$$

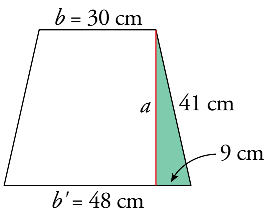
El lado oblicuo mide 23 cm aproximadamente.

El perímetro es:

$$P = 38 + 19 + 25 + 23 = 105 \text{ cm}$$

5. ***Hallar el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.***

Recordemos que el área de un trapecio es: $A = \dfrac{(b + b') \cdot a}{2}$



Hemos de empezar calculando su altura, a. En el triángulo verde, el lado pequeño mide $(48 - 30) : 2 = 9$ cm.

$$a = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$$

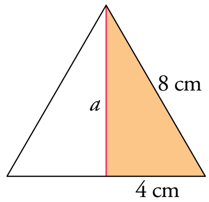
La altura del trapecio mide 40 cm.

$$A = \frac{(30 + 48) \cdot 40}{2} = 1\,560 \text{ cm}^2$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6. ***Calcular el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.***

Empezamos calculando la altura:



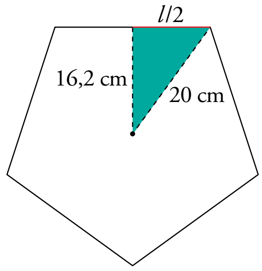
$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6,9$$

La altura mide 6,9 cm aproximadamente.

El área es:

$$A = \frac{8 \cdot 6,9}{2} = 27,6 \text{ cm}^2$$

7. ***Calcular el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.***



Primero calculamos el lado:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16,2^2} = \sqrt{137,56} \approx 11,7$$

El lado del pentágono mide:

$$l = 11,7 \cdot 2 = 23,4 \text{ cm}$$

Por tanto, su perímetro es:

$$P = 23,4 \cdot 5 = 117 \text{ cm}$$

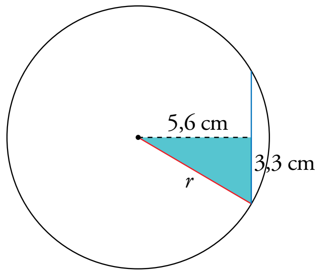
Finalmente, calculamos el área.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{117 \cdot 16,2}{2} = 947,7 \text{ cm}^2$$

8. ***Hallar el perímetro de una circunferencia en la que se ha trazado una cuerda de 6,6 cm a una distancia de 5,6 cm del centro.***

Calcular el área del círculo correspondiente.

Comenzamos calculando el radio. En el triángulo rectángulo coloreado, el lado pequeño mide 6,6 : 2 = 3,3 cm.



$$r = \sqrt{3,3^2 + 5,6^2} = \sqrt{42,25} = 6,5$$

El radio mide 6,5 cm.

$$P = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 6,5 \approx 40,8 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6,5^2 \approx 132,7 \text{ cm}^2$$

Piensa y practica

1. El lado de un rombo mide 8,5 m, y una de sus diagonales, 15,4 m. Calcula su área.
2. Halla el área de un triángulo equilátero de 54 cm de perímetro.
3. Calcula el área de un trapecio rectángulo cuyas bases miden 70 dm y 134 dm, y el lado oblicuo, 85 dm.
4. Halla el área y el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 3,2 m y 6,4 m, y su altura, 6,3 m.
5. Calcula el área de un hexágono regular de 18 cm de lado. (Recuerda que en un hexágono regular, el lado mide igual que el radio).
6. En una circunferencia de radio 9,7 m, se traza una cuerda de 13 m. ¿A qué distancia de la cuerda se encuentra el centro de la circunferencia?
7. Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 1 m. Su perímetro es 5,85 m. Calcula su área.

En la web Practica la aplicación del teorema de Pitágoras para resolver problemas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

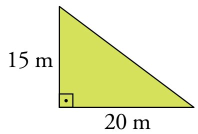
Ejercicios y problemas

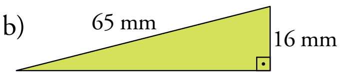
Teorema de Pitágoras

1. Di si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

a) 15 cm, 10 cm, 11 cm
b) 35 m, 12 m, 37 m
c) 23 dm, 30 dm, 21 dm
d) 15 km, 20 km, 25 km
e) 17 millas, 10 millas, 5 millas
f) 21 mm, 42 mm, 21 mm
g) 18 cm, 80 cm 82 cm

2. Calcula el lado desconocido en cada triángulo rectángulo:

a)


b)


3. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.

4. Halla la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro mide 28 dam.

5. Los lados paralelos de un trapecio rectángulo miden 13 dm y 19 dm, y el lado oblicuo mide 10 dm. Calcula la altura.

6. Calcula los lados iguales de un triángulo isósceles sabiendo que el lado desigual mide 5 m y la altura correspondiente, 6 m.

7. Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 1 dm y 2,4 dm.

8. Halla la altura de un triángulo equilátero de 40 cm de lado. Aproxima hasta los milímetros.

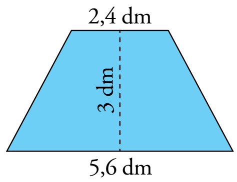
9. Halla la apotema de un hexágono regular de 20 cm de lado. (Recuerda que en el hexágono regular el lado mide lo mismo que el radio).

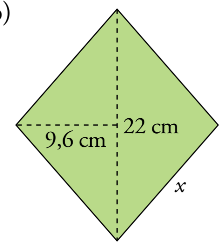
10. Un pentágono regular de 11,7 cm de lado está inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. Calcula su apotema.

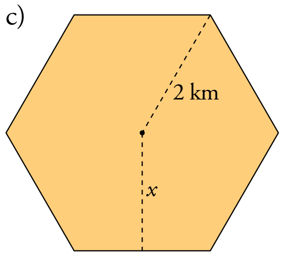
11. Una recta pasa a 10 cm del centro de una circunferencia de 15 cm de radio. Halla, aproximando hasta las décimas, la longitud de la cuerda que se genera.

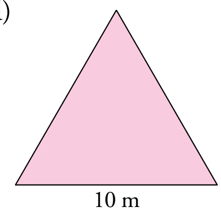
Áreas y perímetros utilizando el teorema de Pitágoras

12. Halla el área y el perímetro en cada una de las siguientes figuras:

a)


b)


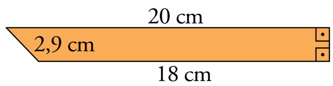
c)


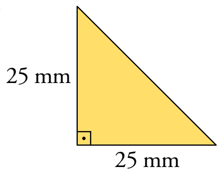
d)


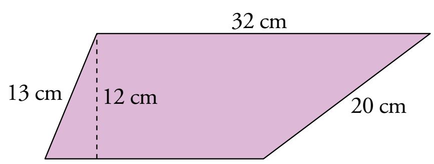
13. Halla el área y el perímetro de las figuras descritas en …

a) … el ejercicio 5.
b) … el ejercicio 6.
c) … el ejercicio 7.
d) … el ejercicio 8.
e) … el ejercicio 9.
f) … el ejercicio 10.

En cada una de estas figuras coloreadas, halla su área y su perímetro. Para ello, tendrás que calcular la medida de algún elemento (lado, diagonal, apotema, ángulo…). Si no es exacta, hállala con una cifra decimal.

14. a)


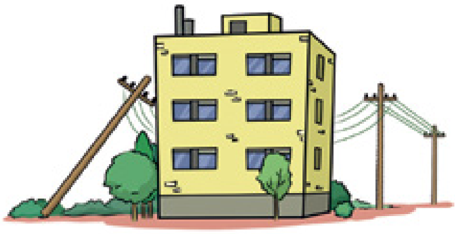
b)


15.


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

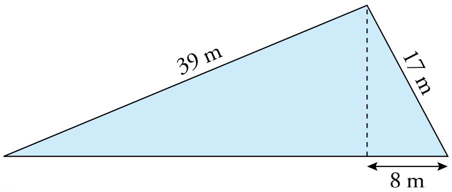
Resuelve problemas

16. Un poste de 14,5 m de alto se quiebra por su base y cae sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que golpea?

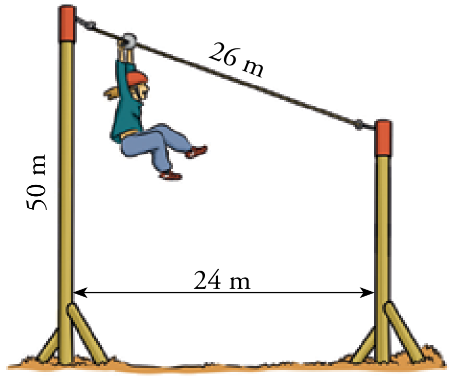


17. Un operario de la compañía eléctrica apoya su escalera de 6,5 m de largo en una pared a una altura de 6 m. Después de arreglar la avería, sin mover la base de la escalera, apoya esta en la pared de enfrente a una altura de 5,2 m. ¿A qué distancia se encuentran las paredes?

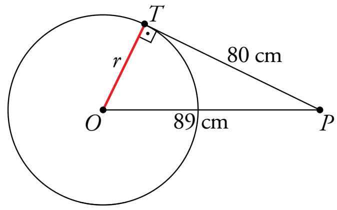
18. Clasifica el siguiente triángulo en rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Para ello, calcula la medida de alguno de sus elementos:



19. Una tirolina de 26 m de longitud está atada a dos postes que distan 24 m. Si Manuela sale desde el primer poste a una altura de 50 m, ¿a qué altura llegará en el segundo poste?



20. La distancia de un punto P al centro O de una circunferencia es de 89 cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT tiene una longitud de 80 cm. Halla el perímetro de la circunferencia y el área del círculo.



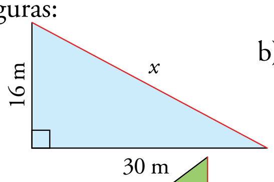
Autoevaluación

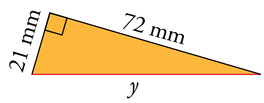
1. Clasifica los siguientes triángulos en rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

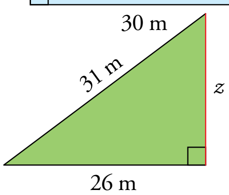
a) 20 cm, 24 cm, 30 cm b) 5 m, 6 m, 10 m

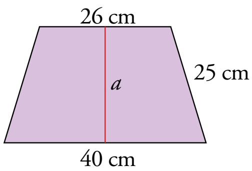
c) 10 mm, 24 mm, 26 mm d) 7 dm, 7 dm, 7 dm

2. Calcula el segmento desconocido en cada una de estas figuras:

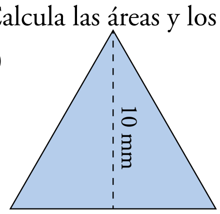
a)


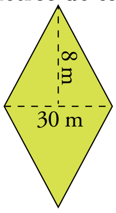
b)


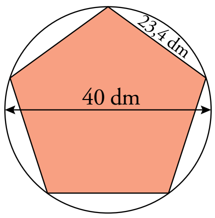
c)


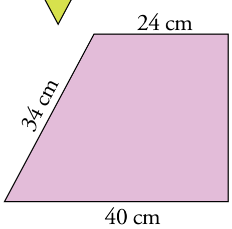
d)


3. Calcula las áreas y los perímetros de estas figuras:

a)


b)


c)


d)


4. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 8 cm de radio debe pasar una recta para que la cuerda mida 8 cm?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....