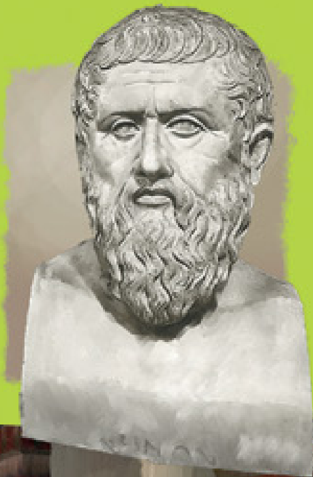
11 Cuerpos geométricos



Los cuerpos geométricos más sencillos eran conocidos y manejados por las antiguas civilizaciones.

Para el cálculo de áreas y volúmenes, los egipcios poseían procedimientos a los que, probablemente, llegaron de forma experimental. Unos producían resultados exactos, y otros, aproximados, aunque ellos no distinguían entre unos y otros, y les daban a todos la misma validez.

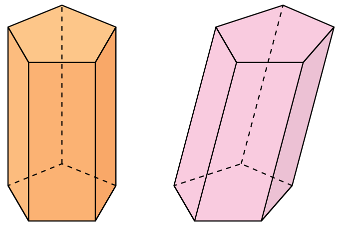
El mundo griego recogió estos conocimientos y los enriqueció teóricamente.

Platón, filósofo griego, fundador de *La Academia de Atenas* en el siglo IV a. C., prestó gran atención a los poliedros regulares (*sólidos platónicos*), les atribuyó propiedades místicas y los relacionó con la composición del universo.

Posteriormente, **Euclides** y **Arquímedes** dieron un enfoque matemáticamente más serio a estas figuras.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

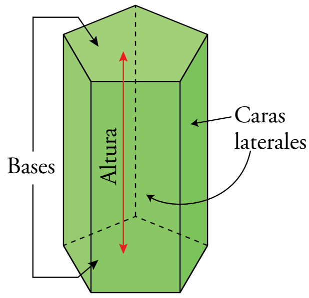
1 Prismas



PRISMA RECTO PRISMA OBLICUO

Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos iguales y paralelos llamados **bases** y varios paralelogramos llamados **caras laterales.**

- La **altura** de un prisma es la distancia entre las bases.



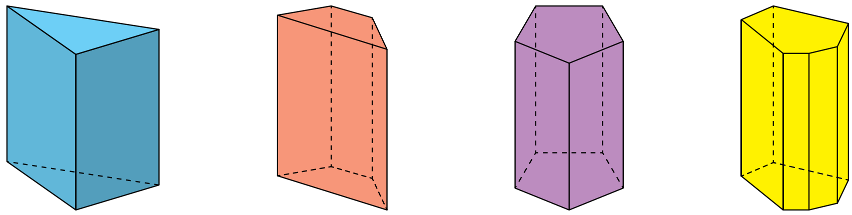
Etimología

Prisma. Viene del griego. Significa "lo que ha sido serrado", porque las caras laterales del prisma están como serradas.

En la web

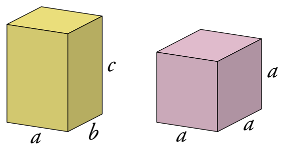
Prisma: definiciones y desarrollo.

- Los prismas se clasifican según los polígonos de sus bases:



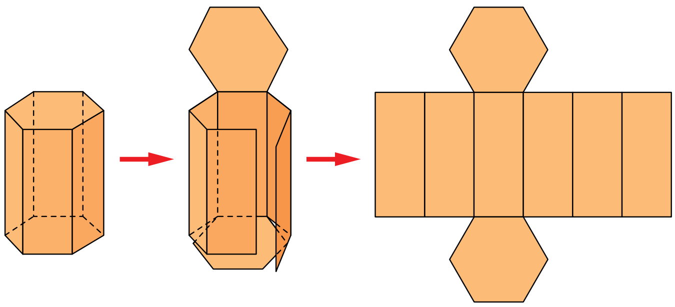
TRIANGULAR CUADRANGULAR PENTAGONAL HEXAGONAL

- Un prisma recto cuya base es un rectángulo se llama **ortoedro.** El ortoedro de dimensiones iguales es el **cubo.**



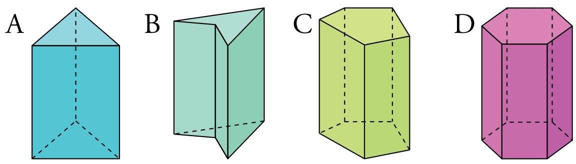
ORTOEDRO CUBO

- Los prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares se denominan **prismas regulares.**
- Si cortamos un prisma recto a lo largo de algunas de sus aristas, lo abrimos y ponemos las caras sobre un plano, se obtiene su **desarrollo plano.**



Piensa y practica

1. Observa los siguientes prismas:



a) ¿Qué tipo de prisma es cada uno?

b) Indica cuáles son regulares.

c) Dibuja el desarrollo plano del prisma A.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Superficie de un prisma

El desarrollo lateral de un prisma recto es un rectángulo. La longitud de su base es el perímetro de la base del prisma, y su altura, la altura del prisma.

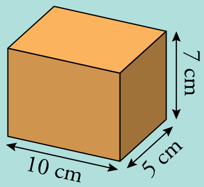
En la web
Practica el cálculo de la superficie de un prisma.

ÁREA LATERAL = perímetro de la base · altura

ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + 2 · ÁREA DE LA BASE

Ejercicios resueltos

1. ***Calcular el área total del siguiente ortoedro:***



Las áreas de las tres caras del ortoedro son, respectivamente:

$10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$ $\quad 10 \cdot 7 = 70 \text{ cm}^2$ $\quad 5 \cdot 7 = 35 \text{ cm}^2$

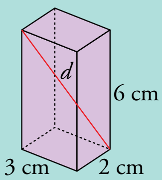
Como son tres parejas de caras iguales:

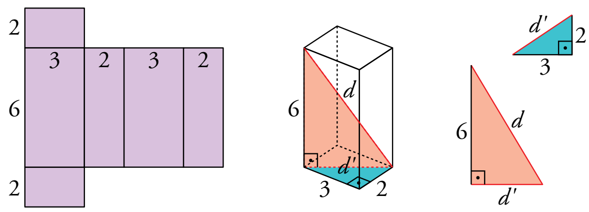
$A_{\text{TOTAL}} = 2 \cdot (50 + 70 + 35) = 2 \cdot 155 = 310 \text{ cm}^2$

En general, el área de un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ es:

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

2. ***Hallar el área total y la longitud de la diagonal (d) de este ortoedro:***





$(d')^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

$d^2 = 6^2 + (d')^2 =$

$= 36 + 13 = 49$

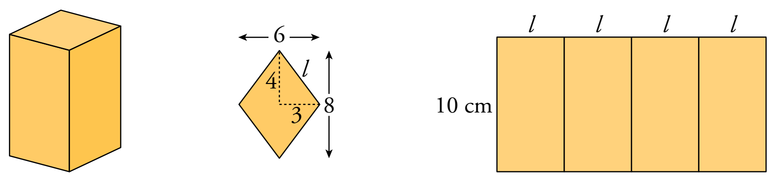
$d = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$

$A_{\text{TOTAL}} = 2(6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 72 \text{ cm}^2$

En general, la longitud de la diagonal de un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ es:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

3. ***Las bases de un prisma recto son rombos cuyas diagonales miden 8 cm y 6 cm. La altura del prisma es 10 cm. Hallar su área total.***



Lado de la base: $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{BASE}} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2 \\ A_{\text{LAT}} = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200 \text{ cm}^2 \end{array}\right\} A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LAT}} + 2A_{\text{BASE}} = 200 + 2 \cdot 24 = 248 \text{ cm}^2$$

Piensa y practica

2. La altura de un prisma recto es de 20 cm. Sus bases son trapecios rectángulos tales que las bases del trapecio miden 11 cm y 16 cm, y la altura, 12 cm. Halla el área total del prisma.

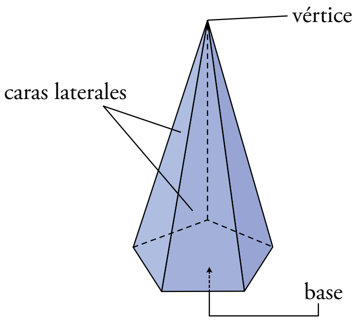
3. Halla el área total de un cubo de 10 cm de arista.

4. Las dimensiones de un ortoedro son 4 cm, 3 cm y 12 cm. Halla el área total y la longitud de la diagonal.

5. La base de un ortoedro es un rectángulo de lados 9 cm y 12 cm. La diagonal del ortoedro mide 17 cm. Calcula la altura del ortoedro y su área total.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

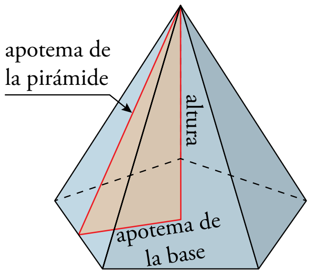
2 Pirámides



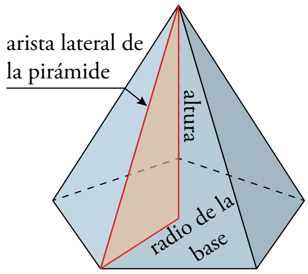
Una **pirámide** es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera y por caras laterales, triángulos con un vértice común, que se llama **vértice** de la pirámide.

- La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.
- Una **pirámide** es **regular** cuando la base es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de ese polígono.
- En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales y las caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de cada uno de ellos se llama **apotema** de la pirámide.

La apotema de una pirámide regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y la apotema del polígono de la base.



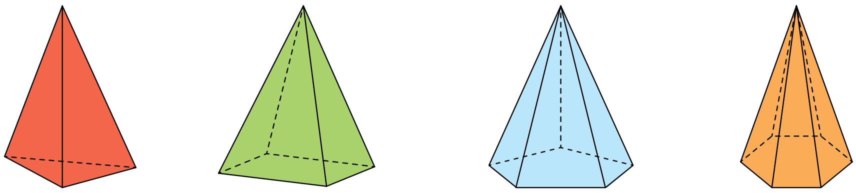
La arista lateral de una pirámide regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y el radio de la base.



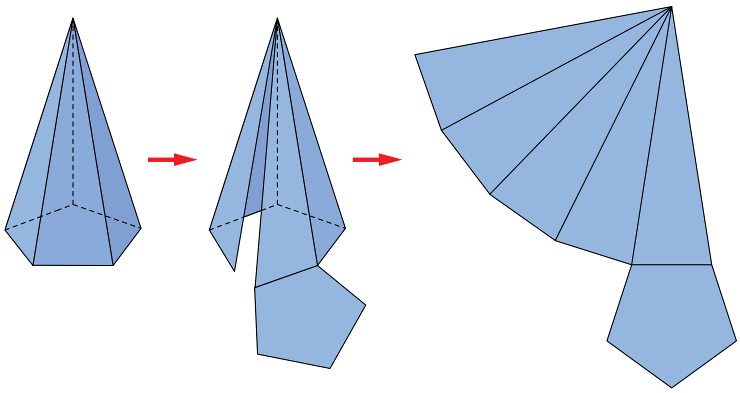
Etimología

Pirámide. Viene del griego *pyros*, “fuego”, por ser piramidal la forma de la llama. Y también por tener esta forma las piras (cosas apiladas para ser quemadas).

- Las pirámides se clasifican según los polígonos de sus bases:



- Si cortamos a lo largo de algunas aristas de una pirámide regular, la abrimos y extendemos sus caras sobre el plano, obtenemos su desarrollo plano:



Nota histórica

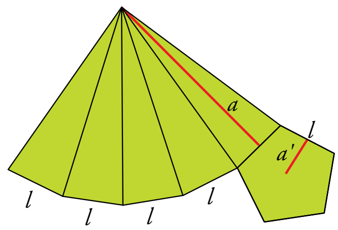
Las pirámides de Egipto fueron construidas como sepulcros de los faraones hace varios miles de años.

Son regulares y cuadrangulares. La mayor de ellas, la de Keops, tiene 146 m de altura y el lado de su base mide 230 m.

En la web

Pirámide: definiciones y desarrollo.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....



En la web

Practica el cálculo de la superficie de una pirámide regular.

Superficie de una pirámide

El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de los n triángulos iguales (n es el número de lados de la base):

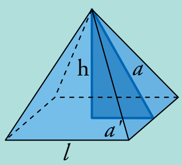
$$A_{\text{LAT}} = n \cdot \frac{1}{2} l\, a = \frac{1}{2}(nl) \cdot a = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2}$$

Puesto que la base es un polígono regular, su área es $\dfrac{\text{perímetro} \cdot a'}{2}$. Por tanto:

$$A_{\text{TOTAL}} = A_{\text{LAT}} + A_{\text{BASE}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} + \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a'}{2}$$

Ejercicios resueltos

1. *Hallar la superficie lateral de la pirámide de Keops descrita en la página anterior.*



h = 146 m

l = 230 m

a' = 230 : 2 = = 115 m

Empecemos por calcular la apotema, a:

$$a = \sqrt{h^2 + (a')^2} = \sqrt{146^2 + 115^2} = \sqrt{34\,541} \approx 186 \text{ m}$$

$$A_{\text{LAT}} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot a}{2} = \frac{(4 \cdot 230) \cdot 186}{2} \approx 85\,560 \text{ m}^2$$

Solución: La superficie lateral de la pirámide de Keops es de 85 560 m², aproximadamente.

2. *Calcular las superficies lateral y total de una pirámide hexagonal regular de 13 cm de altura sabiendo que el radio de su base mide 6 cm.*

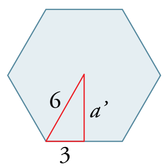
Necesitamos calcular la apotema de la pirámide, a; para ello, tenemos que hallar la apotema de la base, a'. Recuerda que en un hexágono regular el radio es igual al lado. Por tanto:

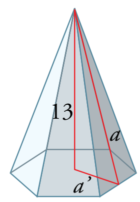
$$a' = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} \text{ cm}$$

$$a = \sqrt{\left(\sqrt{27}\right)^2 + 13^2} = \sqrt{27 + 169} = \sqrt{196} = 14 \text{ cm}$$

$$A_{\text{LAT}} = \frac{(6 \cdot 6) \cdot 14}{2} = 252 \text{ cm}^2$$

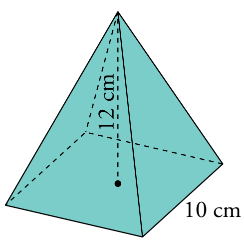
$$A_{\text{TOTAL}} = 252 + \frac{(6 \cdot 6) \cdot \sqrt{27}}{2} \approx 346 \text{ cm}^2$$



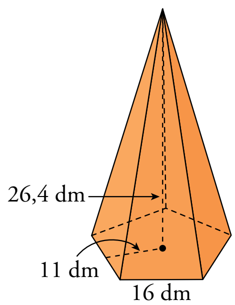


Piensa y practica

1. Halla el área total de una pirámide regular cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y cuya altura es de 12 cm.



2. La base de una pirámide regular es un pentágono de 16 dm de lado y 11 dm de apotema. La altura de la pirámide es de 26,4 dm. Halla su área total.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

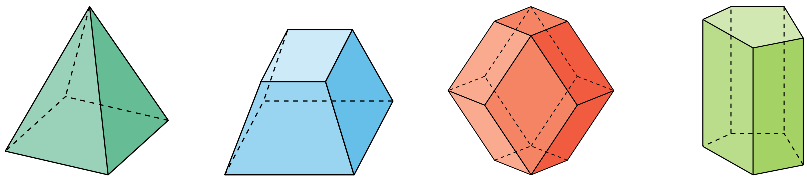
3 Poliedros regulares

Etimología

Poliedro. En griego, *poli*, "muchos" y *edro*, "cara".

Icosaedro. En griego, *eikós*, "veinte".

Los prismas y las pirámides, así como otros cuerpos geométricos limitados por caras poligonales se llaman, como ya sabes, **poliedros.**



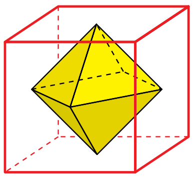
El área total de un poliedro es la suma de las áreas de los polígonos que lo forman.

Algunos poliedros con ciertas características se llaman **regulares.**

Un **poliedro** se llama **regular** cuando cumple estas dos condiciones:

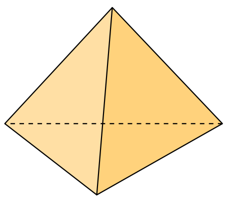
- Sus caras son polígonos regulares idénticos.
- En cada vértice del poliedro concurre el mismo número de caras.

¡Qué curioso!

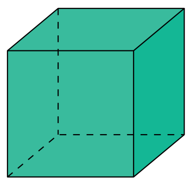


Si unimos los puntos medios de las caras de un cubo se obtiene un octaedro y si hacemos lo mismo con el icosaedro se obtiene un dodecaedro.

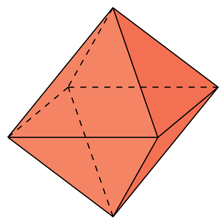
Solo hay cinco poliedros regulares:



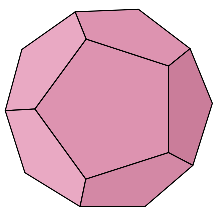
TETRAEDRO
(Cuatro caras triángulos)



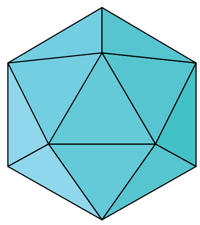
CUBO
(Seis caras cuadrados)



OCTAEDRO
(Ocho caras triángulos)



DODECAEDRO
(Doce caras pentágonos)



ICOSAEDRO
(Veinte caras triángulos)

Piensa y practica

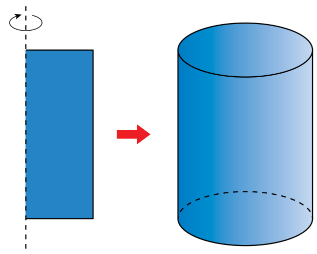
1. Cuenta el número de caras (C), de vértices (V) y de aristas (A) de cada uno de estos cinco poliedros. Comprueba que en todos ellos se cumple:

$$C + V - A = 2$$

Comprueba que también se cumple esta relación en los demás poliedros que has manejado.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Cilindros

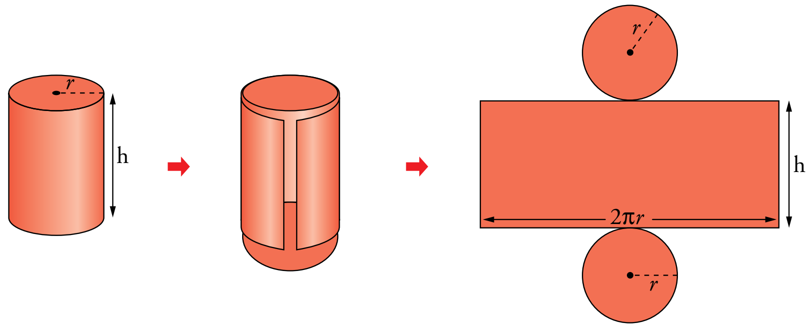


Haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, se genera un **cilindro recto.** Es, pues, un cuerpo de revolución.

Las **bases** de un cilindro recto son círculos. La distancia entre las bases se llama **altura.**

Superficie de un cilindro recto

Al cortar un cilindro como ves, se obtiene su desarrollo plano:



Etimología

Cilindro. Del griego *kulindo*, que significa "enrollado", pues el cilindro tiene forma de rollo o cosa enrollada.

Se aprecia que la pared lateral del cilindro es un rectángulo cuya base es igual al perímetro del círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la del cilindro. Por tanto:

ÁREA LATERAL = $2\pi r \cdot h$

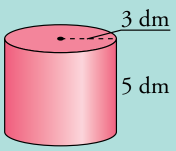
ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + ÁREA DE LAS DOS BASES = $2\pi r h + 2\pi r^2$

En la web

Cilindro: definiciones y desarrollo.

Ejercicio resuelto

Hallar el área lateral y el área total de este cilindro:



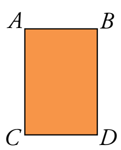
$A_{LAT} = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi = 94{,}2\ dm^2$

$A_{TOTAL} = 94{,}2 + 2\pi \cdot 3^2 = 94{,}2 + 56{,}52 = 150{,}72\ dm^2$

Piensa y practica

1. Dibuja en tu cuaderno los cilindros que se generan al hacer girar este rectángulo alrededor de:

a) *CD* b) *BD*

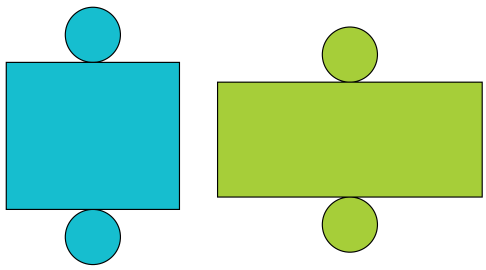


2. ¿Qué cantidad de chapa se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 0,6 m de radio de la base y 1,8 m de altura?

3. Se han de impermeabilizar el suelo y las paredes interiores de un aljibe cilíndrico abierto por arriba. El radio de su base mide 4 m, y la altura, 5 m. Si cuesta 18 € impermeabilizar 1 m^2, ¿cuál es el coste de toda la obra?

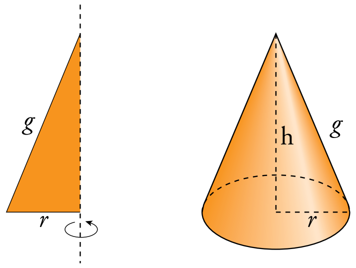
4. Dibuja el desarrollo de un cilindro recto cuya base tiene 2 cm de radio y cuya altura es de 8 cm.

5. Toma algunas medidas y decide cuál de los siguientes desarrollos corresponde a un cilindro.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Conos

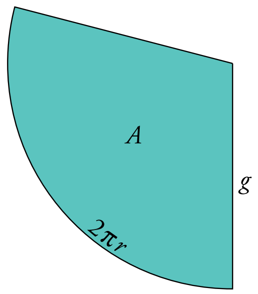


h, r y g cumplen la relación:

$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

Etimología

Cono. Viene del latín, y significa piña. Te extraña, ¿verdad? Sin embargo, te resultará menos raro si recuerdas que los pinos son *coníferas* (que producen *conos*).



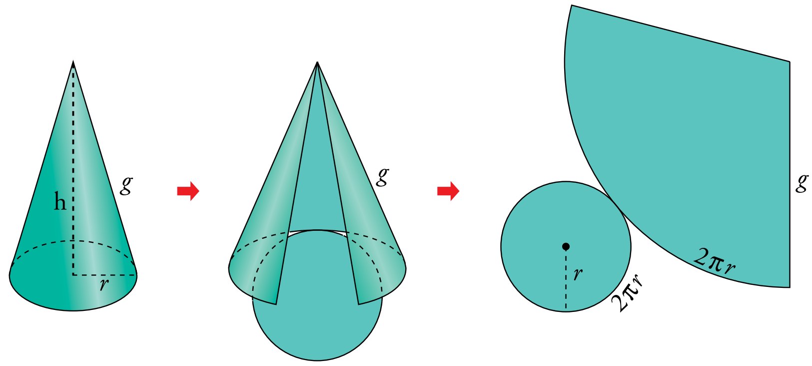
En la web

Cono: definiciones y desarrollo.

Haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos, se obtiene un **cono recto.** Es, pues, un cuerpo de revolución.

La **altura** es la distancia del vértice a la base. El segmento g (hipotenusa del triángulo rectángulo) recibe el nombre de **generatriz.**

Superficie de un cono recto



El desarrollo de la superficie lateral de un cono recto es un sector circular de radio g. ¿Qué porción de círculo tiene ese sector? Vamos a averiguarlo:

- La circunferencia completa tiene una longitud de $2\pi g$.
- El sector tiene una longitud de $2\pi r$.

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{superficie del círculo}} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{superficie del sector}}$$

$$\frac{2\pi g}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{A} \rightarrow A = \frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} = \pi r g$$

Por tanto:

ÁREA LATERAL = $\pi r g$

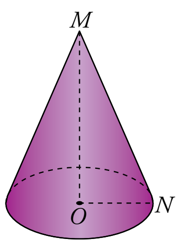
ÁREA TOTAL = ÁREA LATERAL + ÁREA DE LA BASE = $\pi r g + \pi r^2$

Piensa y practica

1. Calcula el área lateral y el área total de este cono, sabiendo que:

$\overline{MO} = 84$ cm

$\overline{MN} = 85$ cm

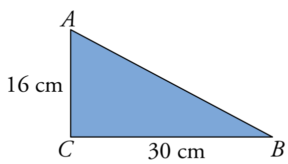


2. Dibuja los conos que se obtienen al hacer girar este triángulo rectángulo:

a) Alrededor de AC.

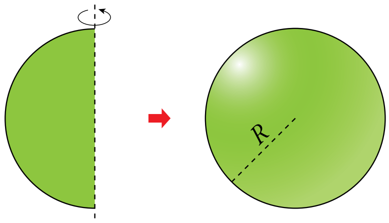
b) Alrededor de BC.

Calcula el área total de ambos.



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Esferas



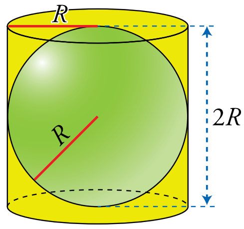
La **esfera** se genera haciendo girar un semicírculo alrededor de su diámetro. Es, pues, un cuerpo de revolución.

La esfera queda determinada por su radio, R.

Superficie de la esfera

La superficie de la esfera se llama superficie esférica. Solo se puede desarrollar sobre el plano aproximadamente. Sin embargo, sí podemos medir su área mediante una sencilla fórmula.

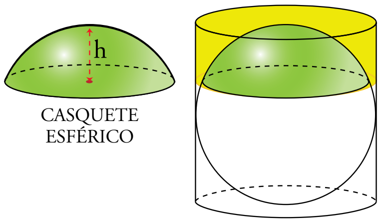
Imaginemos la esfera envuelta por un cilindro que se ajusta por completo a ella. Pues bien, el área de la esfera es igual que el área lateral de ese cilindro.

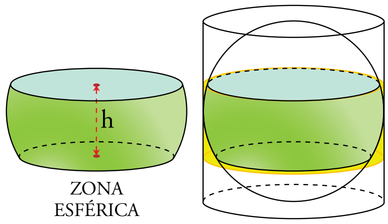


$$A_{\text{LATERAL DEL CILINDRO}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$$

El área de la superficie esférica de radio R es $A = 4\pi R^2$.

Esta relación entre la esfera y el cilindro que la envuelve es muy interesante, porque vale también para proporciones de esfera limitadas por planos paralelos.





Área del casquete esférico = Área lateral de la porción de cilindro correspondiente = $2\pi R$ h

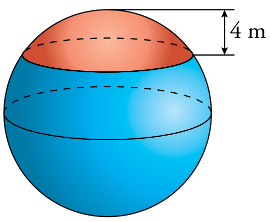
Área de la zona esférica = Área lateral de la porción de cilindro correspondiente = $2\pi R$ h

Etimología

En griego, *sfaira* significa "pelota".

Observa

¿Qué superficie tiene la parte coloreada de rojo?



Radio de la esfera = 9 m

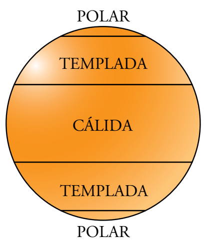
$A = 2\pi \cdot 9 \cdot 4 \approx 226 \text{ m}^2$

En la web

Practica el cálculo de superficies de figuras esféricas.

Piensa y practica

1. En una esfera terrestre escolar de 20 cm de radio están señaladas las zonas climáticas. Sabemos que cada casquete polar tiene 2 cm de altura, y cada zona templada, 10 cm de altura.



Halla la superficie de cada zona climática.

2. Se ha caído un balón de fútbol en un barreño lleno de pintura verde. Sabemos que la superficie del balón es de 6 079 cm². Si se ha hundido unos 15 cm en la pintura, ¿qué proporción de balón se ha manchado de verde?

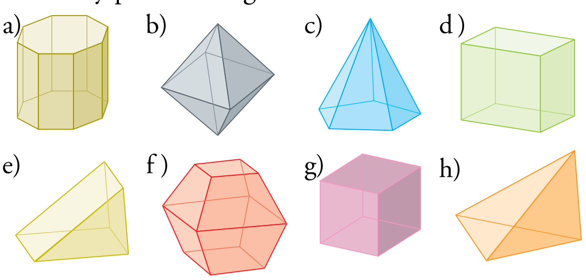
Toma el valor de π *como 3,14.*

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Tipos de cuerpos geométricos

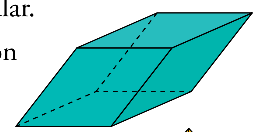
1. Indica cuáles de estos poliedros son prismas, pirámides y poliedros regulares.



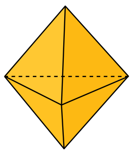
2. Explica por qué estos poliedros no son regulares.

a) Pirámide cuadrangular regular.

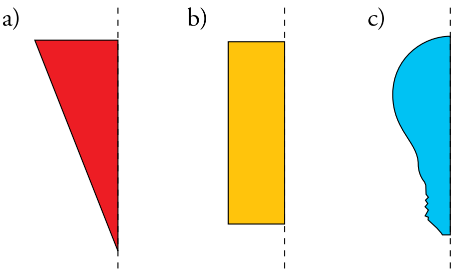
b) Este poliedro cuyas caras son rombos iguales:



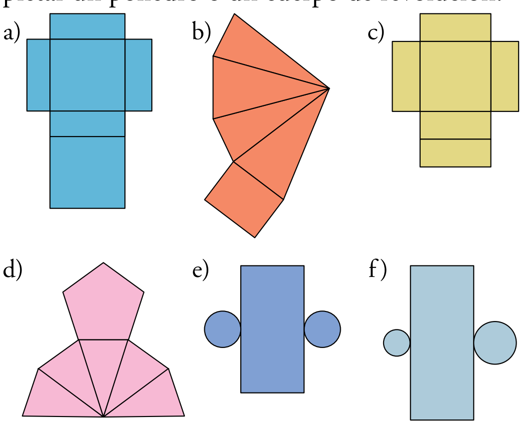
c) Este poliedro formado por seis triángulos equiláteros:



3. Dibuja los cuerpos de revolución generados al girar cada una de estas figuras alrededor del eje.

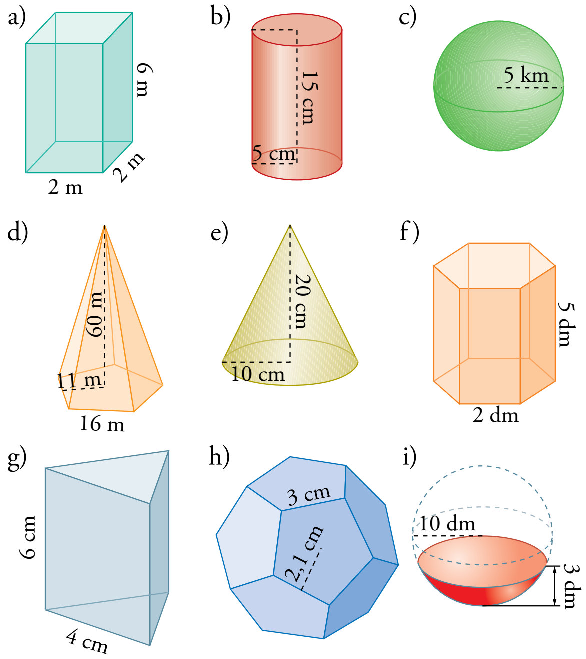


4. ¿Con cuáles de estos desarrollos se pueden completar un poliedro o un cuerpo de revolución?



Áreas de cuerpos geométricos

5. Calcula el área de cada cuerpo geométrico:



6. Halla el área total de una pirámide hexagonal regular con aristas laterales de 13 cm y aristas de la base de 10 cm.

7. Calcula el área total de un prisma recto de 15 cm de altura cuyas bases son rombos cuyas diagonales miden 16 cm y 12 cm.

8. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6 dm de lado. Su altura es de 4 dm. Calcula su área total.

9. Halla el área total de un prisma hexagonal regular cuya arista lateral mide 4 cm, y las aristas de la base, 2 cm.

10. Una pirámide regular tiene por base un pentágono regular de 2,5 m de lado. La apotema de la pirámide mide 4,2 m. ¿Cuál es su superficie lateral?

11. Calcula las superficies del casquete esférico de 2 dm de altura y de una zona esférica de 4 dm de altura contenidos en una esfera de 10 dm de diámetro.

Resuelve problemas

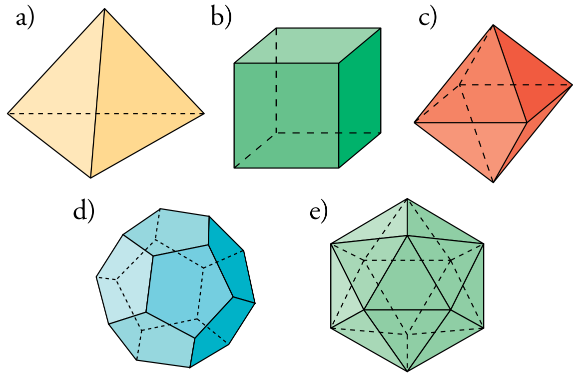
12. Queremos forrar un cajón de embalaje de dimensiones 0,6 m × 0,5 m × 0,4 m con una chapa metálica.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

a) ¿Cuánto costará hacerlo si la chapa está a 18 €/m^2?

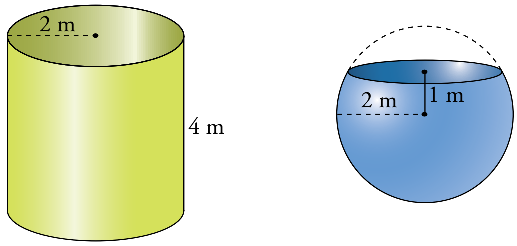
b) Si queremos cubrir las aristas con un embellecedor de madera de 23 €/m, ¿cuánto dinero hemos de pagar?

13. Deseamos construir con alambres el esqueleto de todos los poliedros regulares, de modo que cada una de las aristas mida 1 dm. ¿Qué cantidad de alambre utilizaremos en cada uno de ellos?



14. Las paredes de un pozo de 12 m de profundidad y 1,6 m de diámetro han sido enfoscadas con cemento. El precio del trabajo es de 40 € el metro cuadrado. ¿Cuál ha sido el coste?

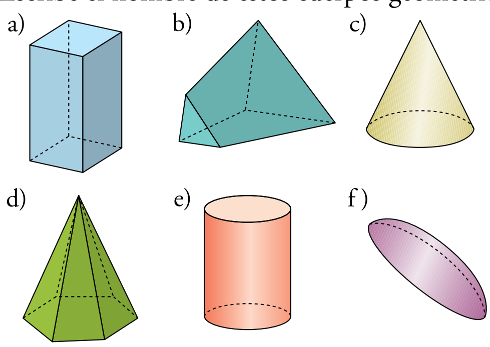
15. Un pintor ha cobrado 1 000 € por impermeabilizar el interior del depósito sin tapa de la izquierda. ¿Cuánto deberá cobrar por impermeabilizar el de la derecha, también sin tapa?



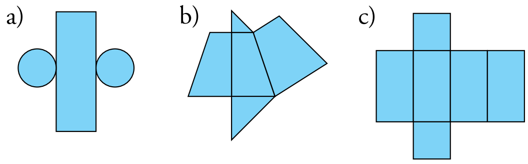
16. Una verja se compone de 20 barrotes de hierro de 2,5 m de altura y 1,5 cm de diámetro. Hay que darles una mano de minio a razón de 24 €/m^2. ¿Cuál es el coste?

Autoevaluación

1. Escribe el nombre de estos cuerpos geométricos:



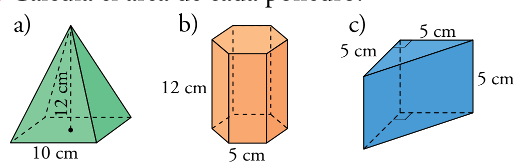
2. Indica a cuáles de los cuerpos geométricos del ejercicio anterior corresponde cada uno de los siguientes desarrollos:



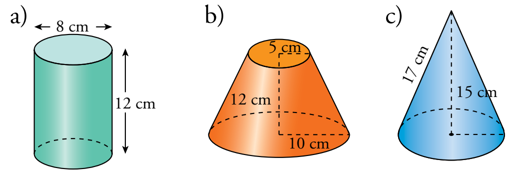
Dibuja en tu cuaderno el desarrollo del poliedro del apartado d) del ejercicio 1.

3. Dibuja en tu cuaderno la figura plana, y el eje sobre el cual gira, que genera cada uno de los cuerpos de revolución del ejercicio 1.

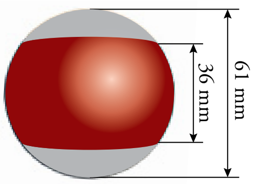
4. Calcula el área de cada poliedro:



5. Halla el área de estos cuerpos de revolución:



6. Esther quiere pintar 15 bolas blancas de 61 mm de diámetro para hacerlas de billar. Hay 7 bolas lisas (totalmente pintadas), una negra y 7 bolas rayadas que las pintará como muestra la figura.



Si la pintura vale 100 €/m^2, ¿cuánto le costará pintar todas las bolas?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....