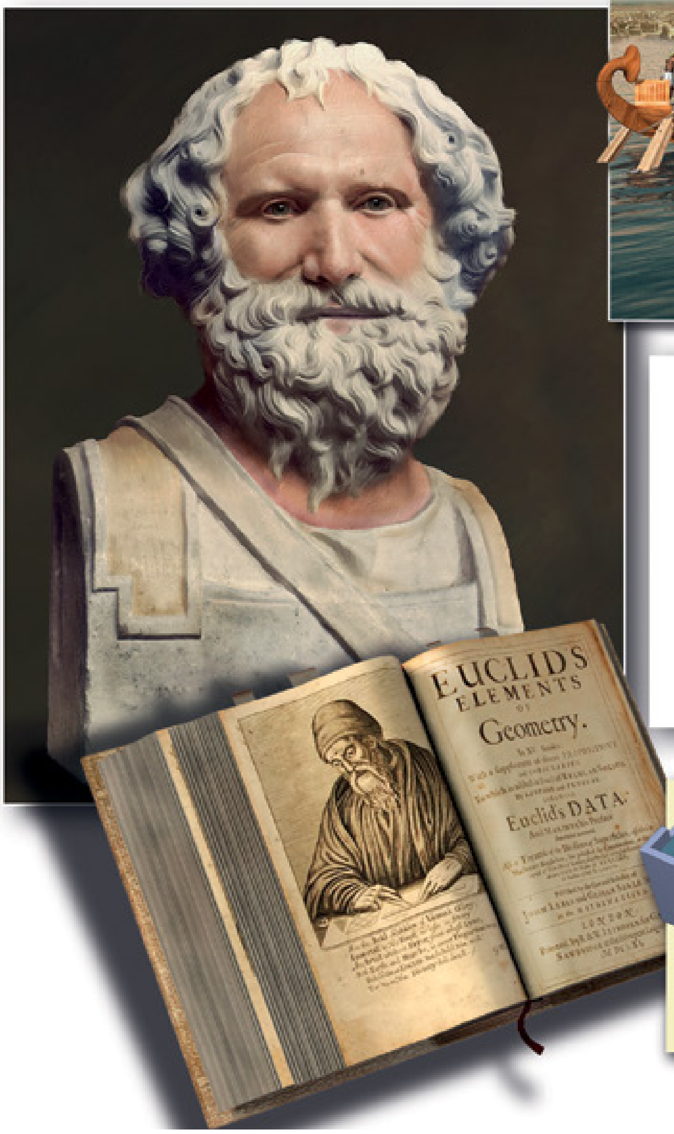
12 Medida del volumen

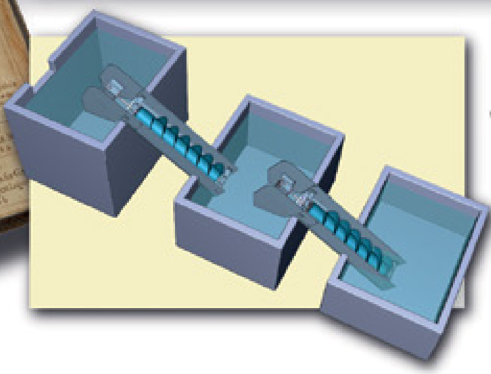
Euclides y Arquímedes fueron los máximos exponentes de la geometría en la antigua Grecia. La relevancia de su obra se mantuvo vigente durante más de 20 siglos.

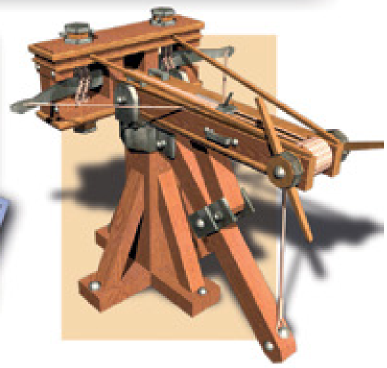
Euclides vivió en Alejandría hacia el año 300 a. C. Se sabe poco de su vida (ni siquiera dónde y cuándo nació y murió), pero su obra se conserva y se conoce perfectamente. Sistematizó y dotó de estructura lógica el saber matemático de su época en los 13 tomos de que constan sus *Elementos*. En varios de ellos se trabajan los cuerpos geométricos.



Arquímedes (siglo III a. C.), además de matemático, fue físico y un gran inventor. A diferencia de la línea tradicional del pensamiento griego, especulativo, él se valió de la experimentación para obtener resultados matemáticos que, después, demostraba rigurosamente.

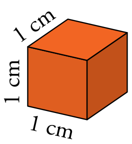
Para hallar áreas y volúmenes de cuerpos complicados, Arquímedes imaginaba la figura descompuesta en infinidad de trozos pequeñísimos que, después, reagrupaba convenientemente. Este procedimiento supuso un gran avance a las matemáticas de su época.



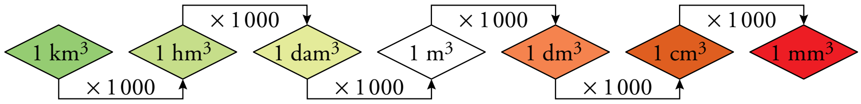


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Unidades de volumen

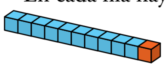


En el margen aparece un centímetro cúbico (1 cm^3). Es un cubo de 1 cm de lado. De forma análoga, se definen el decímetro cúbico (dm^3), el metro cúbico (m^3) y las demás unidades de volumen. Son las siguientes:



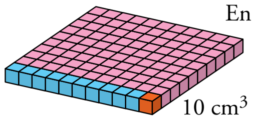
Veamos por qué cada unidad cúbica contiene 1 000 unidades inferiores:

En cada fila hay 10 cubitos.



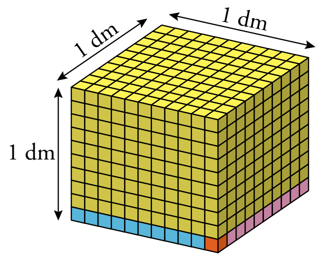
$1\ cm^3 \times 10 = 10\ cm^3$

En cada nivel hay 10 filas.



$10\ cm^3 \times 10 = 100\ cm^3$

En el cubo (1 dm^3) hay 10 niveles.



$100\ cm^3 \times 10 = 1\,000\ cm^3 = 1\ dm^3$

Por tanto, en 1 dm^3 hay 1 000 cm^3.

Y por lo mismo:

- $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$
- $1\ dam^3 = 1\,000\ m^3$
- …

Cada unidad de volumen es 1 000 veces la unidad de orden inferior y la milésima parte (0,001) de la unidad de orden superior.

Formas compleja e incompleja

La cantidad 438 m^3 12 dm^3 está expresada en forma **compleja.**

Esa misma cantidad la podemos expresar usando una sola unidad, en forma **incompleja:** 438 012 000 cm^3.

Veamos unos ejemplos de transformación de unidades:

a) $14\ dam^3\ 38\ m^3 = 14 \cdot 10^6\ dm^3 + 38 \cdot 10^3\ dm^3 = 14\,038\,000\ dm^3$

b) $481{,}03\ hm^3 = 481{,}03 \cdot 10^3\ dam^3 = 481\,030\ dam^3$

c) $0{,}001831\ dam^3 = 0{,}001831 \cdot 10^9\ cm^3 = 1\,831\,000\ cm^3$

La siguiente disposición facilita el paso de una unidad a otra:

	hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			
a)					1	4	0	3	8	0	0	0				→ 14 038 000 dm^3
b)	4	8	1	0	3	0										→ 481 030 dam^3
c)						0	0	0	1	8	3	1	0	0	0	→ 1 831 000 cm^3

Piensa y practica

1. Expresa en metros cúbicos:

a) 2 dam^3 123 m^3 52 dm^3

b) 29 320 000 cm^3

c) (435 cm^3 425 mm^3) · 500 000

d) 37 hm^3 12 dam^3 325 m^3 402 dm^3

2. Pasa a forma compleja.

a) 35 297 853 cm^3

b) (4 253 hm^3) · 2 000

c) 0,00030124 dm^3

d) 34,5832 hm^3

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web

Practica la equivalencia entre las distintas unidades de volumen.

Cómo se mide la lluvia

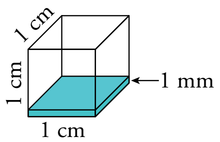
La cantidad de lluvia que cae en un cierto lugar durante un periodo de tiempo se suele medir en *litros por m^2*.

Si llueve mucho, como el agua no se queda donde cae, se forman grandes riadas e inundaciones en las zonas bajas. ¿Qué pasaría si el agua se quedara donde cae?

Si un litro de agua cae en una superficie de un metro cuadrado, ¿qué altura alcanzaría?

- 1 m^2 tiene 10 000 cm^2
- 1 *l* tiene 1 000 cm^3

A cada cm^2 le corresponde 0,1 cm^3. Es decir, alcanzará una altura de 0,1 cm = 1 mm.



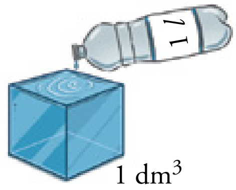
Por eso, la cantidad de lluvia caída se expresa, también, en *mm de altura*:

$$\frac{1\,l}{m^2} = 1 \text{ mm}$$

El litro, sus múltiplos y sus submúltiplos

Un **litro** (1 *l*) equivale a 1 dm^3.

Si se llena de agua una botella de 1 *l* y esta se vierte, después, en un cubo de 1 dm^3, observamos que lo llena por completo y no sobra nada.



El litro tiene múltiplos y submúltiplos:

kilolitro (*kl*) ⟶ 1 000 *l* | decilitro (*dl*) ⟶ 0,1 *l*
hectolitro (*hl*) ⟶ 100 *l* | centilitro (*cl*) ⟶ 0,01 *l*
decalitro (*dal*) ⟶ 10 *l* | mililitro (*ml*) ⟶ 0,001 *l*

Vamos a incluirlos en la tabla junto con las unidades cúbicas:

m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		kl	*hl*	*dal*	*l*	*dl*	*cl*	*ml*			

Capacidad y volumen

La palabra **volumen** se suele utilizar para designar lo que ocupa un cuerpo en el espacio, y **capacidad,** para designar lo que cabe dentro de un recipiente. Pero son magnitudes idénticas y, por tanto, para medirlas se utilizan las mismas unidades.

Tanto las unidades cúbicas como los múltiplos y los divisores del litro se utilizan para medir volúmenes y capacidades. Sin embargo, se deben escoger las unidades según el tamaño de lo que se mide.

Ejemplos

- El volumen de un vaso o una botella, en *l*, en *cl* o en cm^3.
- El volumen de pequeños recipientes, en cm^3.
- El gasto mensual de agua en una casa, en m^3.
- La capacidad de un pantano, en hm^3 o, acaso, en km^3.

Piensa y practica

3. Copia en tu cuaderno y añade la unidad en la que se expresa cada uno de los siguientes volúmenes:

a) Capacidad de un vaso: 1/4 ☐, o bien 250 ☐.

b) Una cucharadita: 6 ☐.

c) Consumo bimensual de agua en una casa: 63,834 ☐.

d) Agua en un pantano: 680 ☐.

4. Si ayer cayeron 120 *l* por m^2, ¿a cuántos mm de altura corresponden? ¿Cuántos *l* por m^2 habrán caído si se alcanzan 48 mm de altura?

5. Expresa en litros.

a) 45 dam^3 125 m^3 705 dm^3 500 cm^3

b) 590 000 mm^3

c) 0,000317 dam^3

d) 2 753 *ml*

6. Expresa en unidades de volumen (forma compleja).

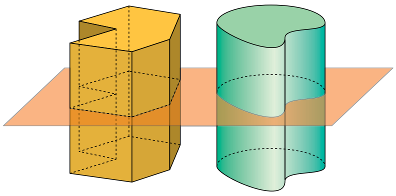
a) (457 210 *dal*) · 30

b) (12 845 235 *cl*) · 0,03

c) (42 753 *ml*) · 75

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Volumen del prisma y del cilindro

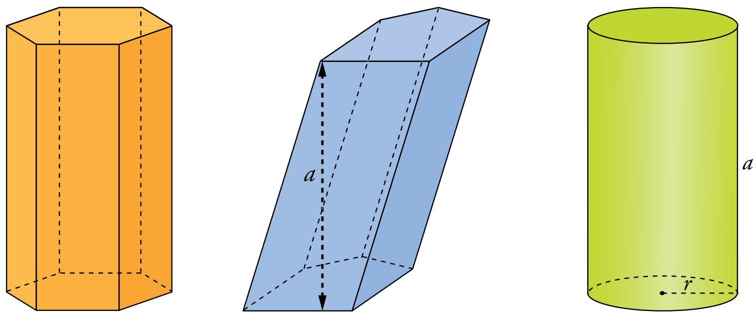


Los dos cuerpos geométricos del margen son **figuras prismáticas** porque tienen dos bases iguales y paralelas. Además, cortando cada una por planos paralelos a las bases, se obtienen secciones idénticas a ellas.

Las dos *figuras prismáticas* tienen la misma altura y, al cortarlas por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con la misma área. Por tanto, sus volúmenes coinciden (principio de Cavalieri).

Volumen de la figura prismática = Área de su base · Altura

Los prismas y los cilindros son figuras prismáticas. Sus volúmenes son:



PRISMA RECTO — PRISMA OBLICUO: $V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$

CILINDRO: $V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a$

En la web

- Practica el cálculo de áreas y volúmenes de prismas y cilindros.
- Resuelve los problemas "Recipientes 1" y "Recipientes 3".

No lo olvides

VOLUMEN DE UNA FIGURA PRISMÁTICA

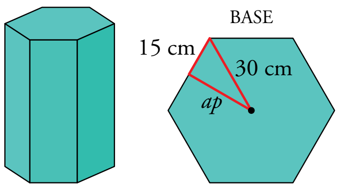
$V = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura}$

Ejercicio resuelto

Hallar el volumen de:

a) Un prisma hexagonal regular de lado de la base 30 cm y 1 m de altura.

b) Un cilindro de 30 cm de radio y 1 m de alura.

a) 

En un hexágono regular, el radio y el lado son iguales. Por tanto, el cateto menor del triángulo rectángulo señalado es 15 cm.

$\text{apotema} = \sqrt{30^2 - 15^2} \approx 26 \text{ cm}$

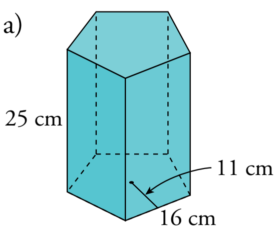
$$A_{\text{BASE}} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{30 \cdot 6 \cdot 26}{2} = 2\,340 \text{ cm}^2$$

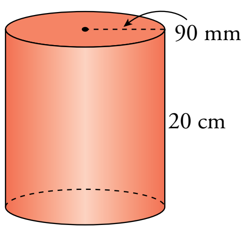
$$V_{\text{PRISMA}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = 2\,340 \cdot 100 = 234\,000 \text{ cm}^3 = 234 \text{ litros}$$

b) $V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi r^2 \cdot a = \pi \cdot 30^2 \cdot 100 \approx 282\,600 \text{ cm}^3 = 282{,}6\ l$

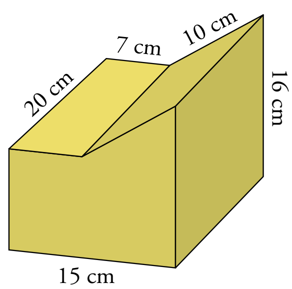
Piensa y practica

1. Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

a) 

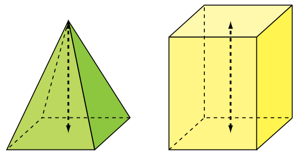
b) 

2. Calcula el volumen de un trozo de madera con la siguiente forma:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

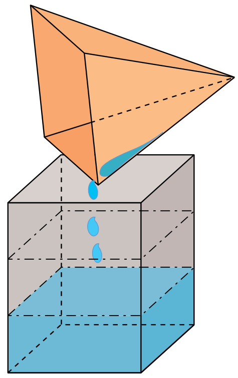
3 Volumen de la pirámide y del cono



Tenemos un prisma y una pirámide con la misma base y la misma altura. Vamos a comparar sus volúmenes.

Si llenamos de agua la pirámide y la vertemos dentro del prisma, ocupará una tercera parte de este.

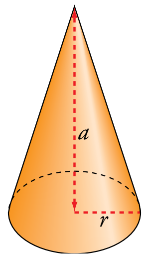
Es decir, se necesitan tres pirámides para completar el volumen del prisma.



El **volumen** de una **pirámide** es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{Altura}$$

Al igual que en la pirámide, el volumen de un cono es la tercera parte del área de la base por la altura. Es decir:

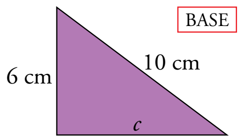


El **volumen** de un **cono** es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área de la base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot a$$

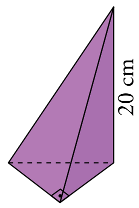
Ejercicios resueltos

1. ***La altura de una pirámide es de 20 cm. Su base es un triángulo rectángulo con una hipotenusa de 10 cm y un cateto de 6 cm. Hallar su volumen.***



$c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

El otro cateto de la base mide 8 cm.



$A_{\text{BASE}} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$ $\quad V_{\text{PIRÁMIDE}} = \dfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot 20 = 160 \text{ cm}^3$

2. ***Hallar el volumen de un cono de 4 dm de altura y el radio de cuya base es 20 cm.***

Radio de la base = 20 cm = 2 dm

Área de la base = $\pi \cdot 2^2 = 12,5664$

Volumen = $\dfrac{1}{3} 12,5664 \cdot 4 \simeq 8,4 \text{ dm}^3 = 8,4$ litros

Piensa y practica

1. La gran pirámide de Keops es cuadrangular regular. El lado de la base mide 230 m, y la altura, 146 m.

Calcula cuántos hectómetros cúbicos tiene de volumen.

2. Halla el volumen de un cono cuya base tiene un radio de 8 cm y cuya altura es 2 dm.

3. ¿Cuánto acero hará falta para fabricar la cama de un faquir compuesta por 1 800 puntas en forma de cono cuyo diámetro de la base mide 2 cm, y la altura, 7 cm?

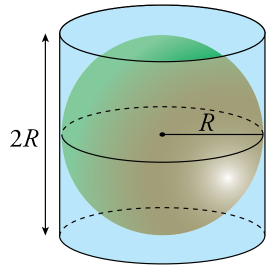
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Volumen de la esfera

El volumen de la esfera es igual a los $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro en el cual está inscrita.

Como el radio de la base del cilindro es el mismo que el de la esfera, R, y la altura del cilindro es $2R$, entonces el volumen del cilindro es:

$$V_{\text{CILINDRO}} = A_{\text{BASE}} \cdot \text{Altura} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$$



El **volumen** de una **esfera** de radio R es:

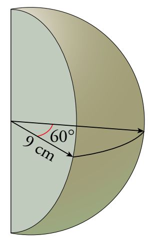
$$V = \frac{2}{3} \cdot V_{\text{CILINDRO}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Ejercicios resueltos

1. ***Hallar el volumen de una cuña esférica de 60° correspondiente a una esfera de 9 cm de radio.***

$\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$. El volumen del sector será, pues, la sexta parte del volumen de la esfera.

$$V_{\text{SECTOR ESFÉRICO}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 9^3 = 162\pi \approx 509 \text{ cm}^3$$



2. ***El radio de un balón es 25 cm, y sabemos que el grosor de la goma es de 3 mm.***

¿Cuántos litros de goma son necesarios para fabricar un balón como el descrito?

$$V_{\text{BALÓN}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 25^3 \approx 65\,417 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ESFERA INTERIOR}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 24{,}7^3 \approx 63\,090 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{GOMA}} = 65\,417 - 63\,090 = 2\,327 \text{ cm}^3 \approx 2{,}327 \text{ litros}$$

Solución: Se necesitan 2,33 litros de goma, aproximadamente.

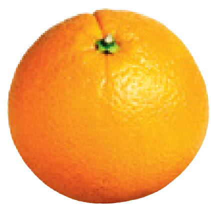
Piensa y practica

1. Metemos en una caja ortoédrica de base 25 cm por 20 cm y una altura de 16 cm sesenta bolas de radio 2,5 cm. ¿Cuántos litros de aceite caben todavía en la caja?

2. Sabiendo que la densidad del acero es 7 850 kg/m^3, calcula el peso de una esfera hueca de 20 cm de radio exterior y 1 cm de grosor.

3. ¿Cuántas bolas de 5 mm de diámetro podremos hacer fundiendo un cable cilíndrico de 3 m de largo y 5 mm de diámetro?

4. Calcula el volumen de cada uno de los 10 gajos de una naranja cuyo diámetro es de 12 cm, sabiendo que su cáscara tiene 0,8 cm de grosor.



5. Tenemos un cajón cúbico de 40 cm de arista lleno en sus tres cuartas partes de serrín. Queremos ocultar en su interior un balón de 32 cm de diámetro. ¿Qué volumen de serrín sobra?

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Unidades de volumen. Operaciones

1. Transforma en metros cúbicos las siguientes cantidades:

a) $0,025\ hm^3$ b) $459\ hm^3$
c) $45\,214\ dm^3$ d) $0,015\ km^3$
e) $23\ dam^3$ f) $58\,000$ *l*

2. Transforma en litros.

a) $400\,000\ hm^3$ b) $0,000047\ hm^3$
c) $6\ dam^3\ 318\ m^3$ d) $8\,562\ m^3\ 1\,749\ cm^3$
e) $14\,350$ *dl* f) $0,32$ *hl*

3. Copia y completa en tu cuaderno las igualdades siguientes:

a) $0,0037\ km^3 = \dots\ m^3$
b) $0,36\ hm^3 = \dots\ dm^3$
c) $1,8342\ dam^3 = \dots\ m^3 = \dots\ dm^3$
d) $0,0007\ m^3 = \dots\ dm^3 = \dots\ cm^3$
e) $15\ hm^3\ 13\ dam^3\ 432\ m^3 = \dots\ m^3$
f) $15\ hm^3\ 13\ dam^3\ 432\ m^3 = \dots\ l$

4. Expresa estas cantidades en forma compleja:

a) $45\,125\,145\ dm^3$ b) $0,45124568\ km^3$
c) $451,14521\ dm^3$ d) $183\,000\ dam^3$
e) $527\,002\,045\ m^3$ f) $183\,070\,693\,002\ cm^3$

5. Copia y completa en tu cuaderno las siguientes igualdades:

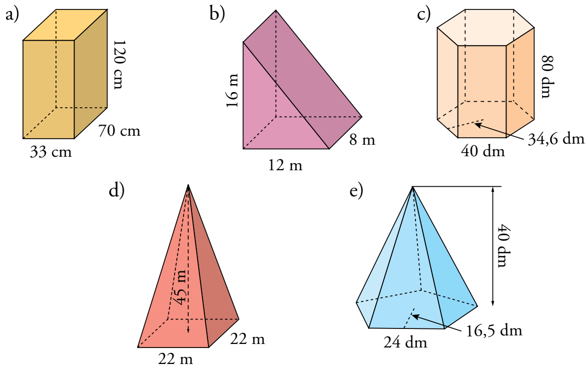
a) $1\ hm^3 = \dots$ *hl* b) $1\ dam^3 = \dots$ *dal*
c) $1\ m^3 = \dots$ *l* d) $1\ dm^3 = \dots$ *dl*
e) $1\ cm^3 = \dots$ *cl* f) $1\ mm^3 = \dots$ *ml*

6. Efectúa las operaciones siguientes y expresa el resultado en hectolitros. Para ello, pasa a forma incompleja, expresa todas las cantidades en las mismas unidades y realiza los cálculos.

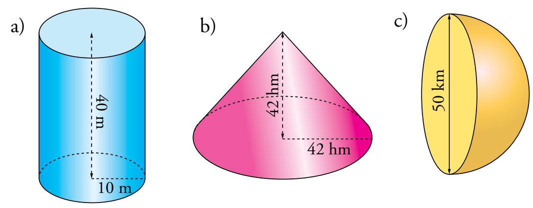
a) $0,34\ dam^3 + 84\ m^3 + 1\,284\ m^3$
b) $0,00035\ km^3 + 0,45\ hm^3 + 65\ dam^3$
c) $0,541\ dam^3 - 421\ m^3\ 300\ dm^3$
d) $4\,500\ m^3 : 25$
e) $24\ hm^3\ 123\ dam^3\ 128\ m^3 : 40$
f) 568 *kl* $- 0,508\ dam^3$

Cálculo de volúmenes

7. Calcula el volumen de cada uno de estos poliedros. Expresa todos los volúmenes en litros.



8. Calcula, y expresa en litros, el volumen de los siguientes cuerpos de revolución:



9. Calcula el volumen de un ortoedro cuyas dimensiones son 9 dm × 15 dm × 8 dm.

10. ¿Cuál es el volumen de un cubo de 15 cm de arista?

11. La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 15 cm. La altura del prisma es de 2 dm. Halla su volumen.

12. Un prisma tiene sus bases en forma de rombo cuyas diagonales miden 40 dm y 28 dm. Su altura es 1,2 m. Halla su volumen.

13. Halla el volumen de un cilindro de 10 cm de radio y 20 cm de altura.

14. Halla el volumen de una esfera de 12 cm de diámetro.

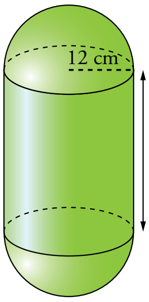
15. Halla el volumen de un cono de 6 dm de radio de la base y 15 cm de altura.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

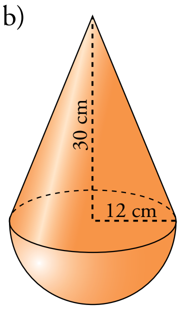
Aplica lo aprendido

16. Calcula el volumen, en litros, de los siguientes cuerpos geométricos:

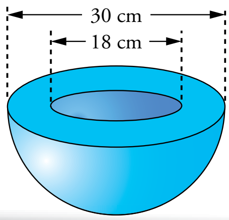
a)



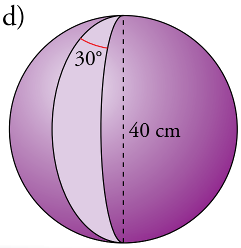
b)



c)

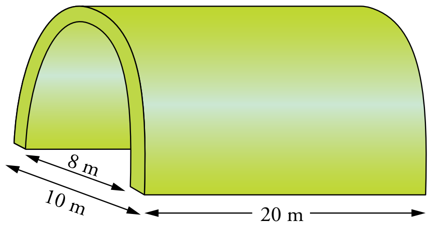


d)



Resuelve problemas

17. Calcula el volumen de hormigón que se ha necesitado para hacer este túnel:



18. Halla el volumen de una habitación con forma de ortoedro de dimensiones 6 m × 3,8 m × 2,6 m. ¿Cuántas duchas podrías darte con el agua que cabe en la habitación suponiendo que gastas 80 *l* de agua en cada ducha?

19. Con una barra cilíndrica de oro de 15 cm de larga y 5 mm de diámetro se fabrica un hilo de 1/4 mm de diámetro. ¿Cuál es la longitud del hilo?

Autoevaluación

1. Transforma en metros cúbicos estas cantidades:

a) 450 dam^3 b) 1,2 dam^3 1 253 dm^3

c) 0,11 km^3 d) 35 840 dm^3

e) 500 *hl* f) 30 000 *l*

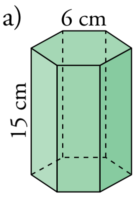
2. Expresa en forma compleja.

a) 75 427 038 m^3 b) 32,14962 dm^3

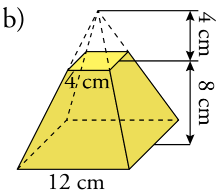
c) 0,0000084 km^3 d) 832 000 dam^3

3. Halla el volumen de estos cuerpos geométricos:

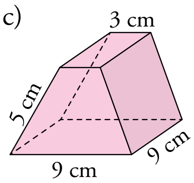
a)



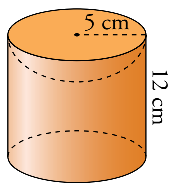
b)



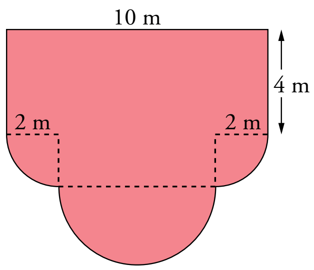
c)



d)



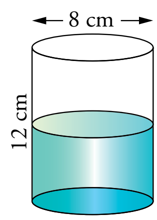
4. Halla el volumen de una habitación de 2,8 m de altura, cuya planta tiene esta forma y dimensiones:



5. El interior de este vaso mide 8 cm de diámetro y 12 cm de altura. Está medio lleno de agua. Se echan dentro 20 canicas de 3 cm de diámetro.

a) ¿Se derramará el agua? Si no, ¿a qué altura llegará?

b) ¿Y si echamos 22 canicas?



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....