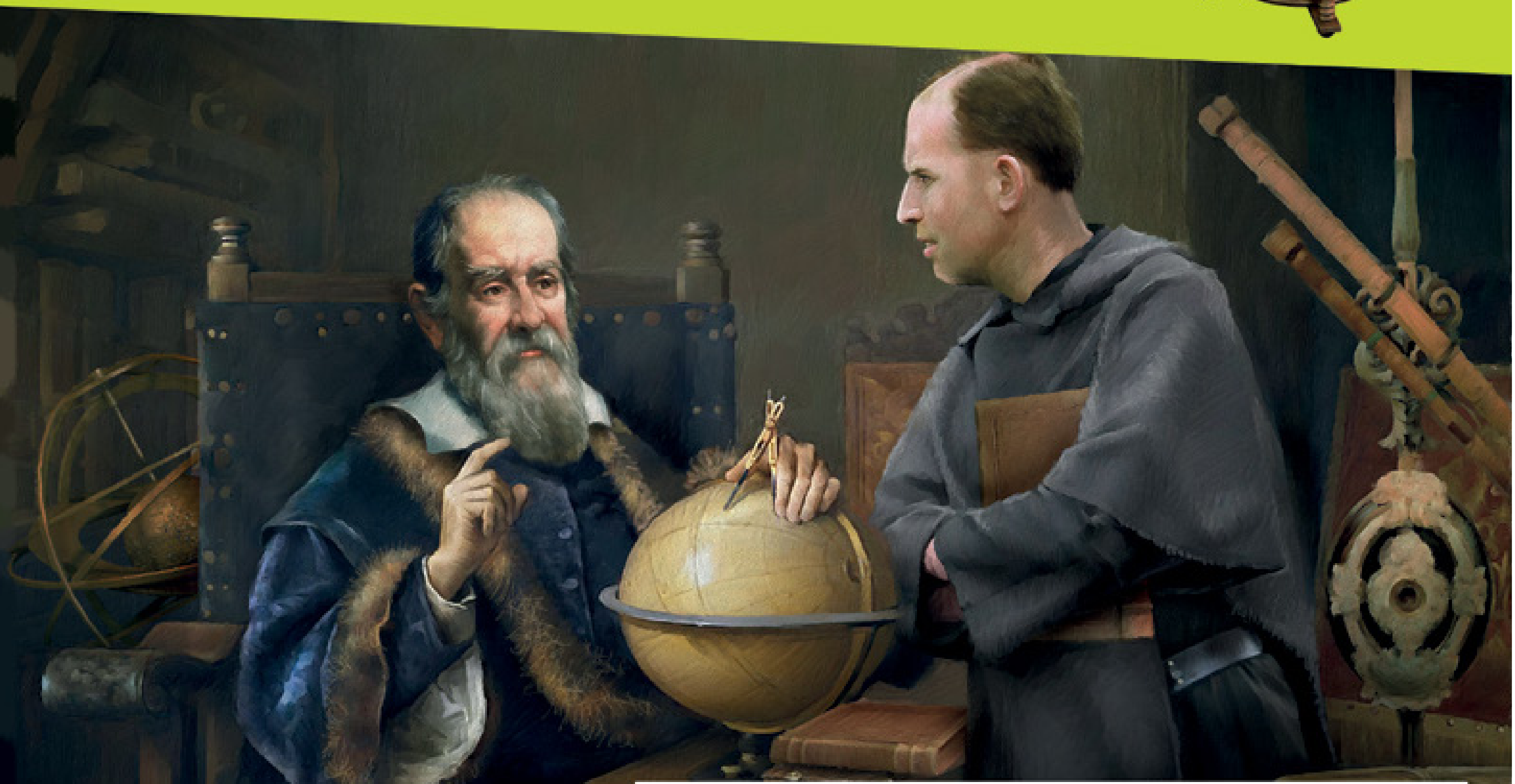
13 Funciones

Las funciones nacen de la necesidad de describir cuantitativamente algunos fenómenos físicos con el fin de darles explicación.

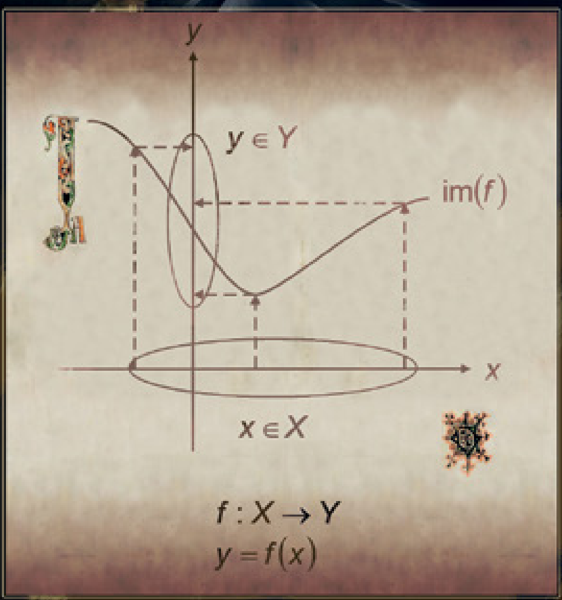


Las leyes de la naturaleza relacionan variables. Por ejemplo:

— La distancia recorrida por un vehículo en una hora depende de la velocidad a la que se desplaza.

— La cantidad de masa forestal de un bosque depende del tiempo que haya transcurrido desde que empezó a formarse.

Aunque esa relación había sido advertida desde mucho tiempo atrás, fue **Galileo,** a mediados del siglo XVII, el primero que, experimentando, intentó relacionar numéricamente las variables que intervienen en el fenómeno. Estas relaciones numéricas permitieron dar forma algebraica a las funciones.

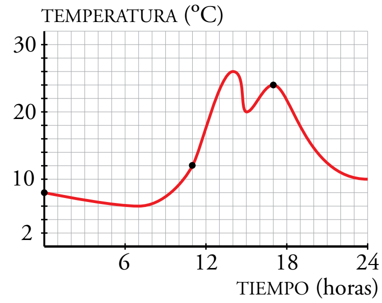


Descartes, filósofo y matemático francés del siglo XVII, concibió la manera de plasmar gráficamente las funciones sobre unos ejes cartesianos. (Recuerda: "cartesiano" viene de *Cartesius*, la expresión latina de Descartes).

La palabra "función" para designar estas relaciones, así como su definición precisa, llegaron en siglos posteriores.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

1 Concepto de función



La gráfica del margen describe la temperatura ambiente, en un cierto lugar, en cada instante de un día.

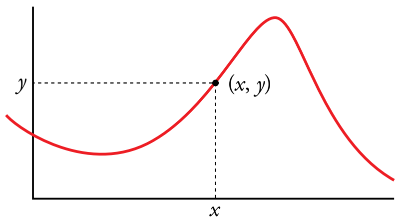
Cada punto de la gráfica relaciona un valor del eje horizontal (tiempo: hora del día) con otro del eje vertical (temperatura: °C):

— A las 0 h (12 de la noche), la temperatura era de 8 °C.

— A las 11 h, la temperatura era de 12 °C.

— A las 17 h (5 de la tarde), la temperatura era de 24 °C.

Es una función que hace corresponder a cada instante una temperatura.



Una **función** relaciona **dos variables.** En general se designan por x e y:

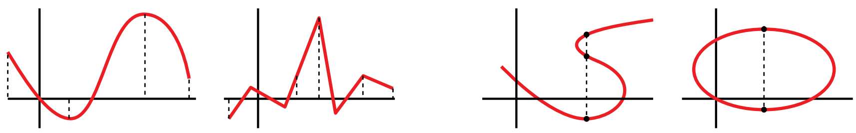
- x es la **variable independiente.**
- y es la **variable dependiente** (su valor depende del valor de x).

La función asocia a cada valor de x **un único** valor de y.

Para apreciar con claridad el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente sobre unos ejes cartesianos.

Ejercicio resuelto

Representar dos gráficas que sean funciones y otras dos que no lo sean. Explicar por qué cada una es o no función.



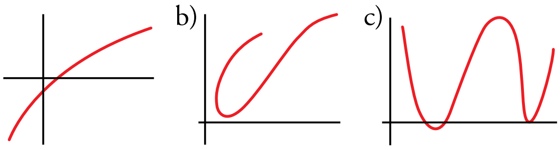
SON FUNCIONES — NO SON FUNCIONES

- Las dos primeras gráficas son funciones porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.
- Las dos siguientes no son funciones, ya que a algunos valores de x les corresponden varios valores de y.

Piensa y practica

1. Di cuáles de las gráficas corresponden a funciones y cuáles no son funciones, justificando las respuestas:

a) b) c)



2. Dibuja en tu cuaderno dos gráficas que correspondan a funciones y otras dos que no correspondan.

3. En la gráfica de arriba (temperatura a lo largo del día):

a) ¿Podemos decir que la mínima temperatura se dio a las 7 de la mañana? ¿Cuál fue?

b) ¿Cuándo se dio la máxima temperatura? ¿Cuál fue?

c) ¿En qué momentos la temperatura fue de 18 °C?

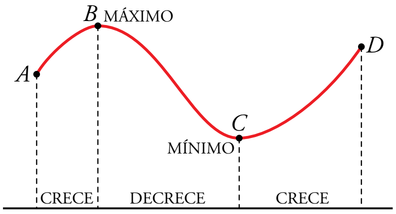
d) Durante 1 h, aproximadamente, el sol estuvo oculto por las nubes. ¿A qué hora crees que fue?

e) Indica una temperatura que se haya repetido en cuatro momentos distintos.

En la web Practica el concepto de función, así como su interpretación.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

2 Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos



Las funciones se analizan y se describen de izquierda a derecha. La función del margen es *creciente* desde A hasta B, porque los valores de la ordenada son cada vez mayores. Es *decreciente* de B a C, porque, recorriendo ese tramo de izquierda a derecha, los valores de la y son cada vez menores. Finalmente, vuelve a ser creciente en el tramo de C a D.

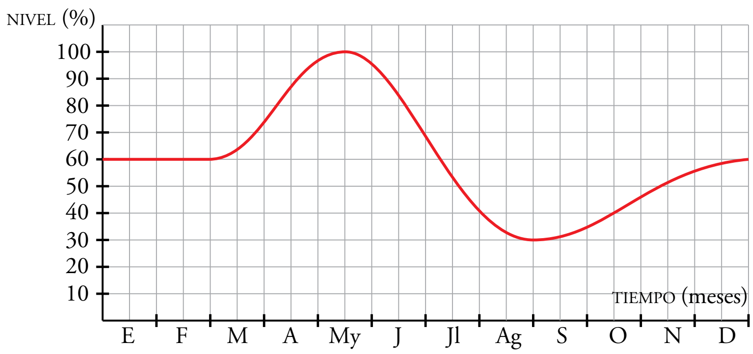
El valor *máximo* lo toma en el punto B, y el *mínimo*, en el C.

> Una función es **creciente** en un tramo cuando al aumentar la x (es decir, al recorrerla de izquierda a derecha), aumenta la y.
>
> Es **decreciente** si, al aumentar la x, disminuye la y.
>
> Si mantiene el mismo valor en todo el tramo, se dice que es **constante** en ese tramo.
>
> El punto en el que la ordenada toma mayor valor se llama **máximo** de la función, y aquel en el que la ordenada toma el menor valor, **mínimo.**

Veamos esto con un ejemplo de la evolución del nivel de agua (en porcentaje) en un determinado embalse a lo largo de un año:

Evolución del nivel del embalse

- Enero y febrero: constante, 60 %.
- Principios de marzo hasta mediados de mayo: crece de 60 % a 100 %.
- Mediados de mayo hasta final de agosto: decrece de 100 % a 30 %.
- Principios de septiembre hasta final de año: crece desde 30 % hasta 60 %.



- En los dos primeros meses se mantiene estable (constante).
- Tiene un tramo creciente desde principios de marzo hasta mediados de mayo, que es cuando alcanza su máximo.
- Decrece hasta final de agosto, cuando llega a su mínimo.
- A partir de entonces, vuelve a crecer hasta final de año.

En la web

Practica los conceptos de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de una función.

Piensa y practica

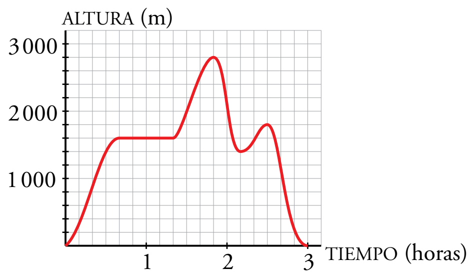
1. En la gráfica de la derecha puedes ver la altura de una avioneta durante sus tres horas de vuelo.

a) ¿Cuánto tiempo permanece estable? ¿A qué altura?

b) ¿Cuánto tarda en estabilizar la altura?

c) ¿Cuándo llega al máximo? ¿Qué altura alcanza?

d) Haz un breve resumen de la evolución de la altura de la avioneta desde que despega hasta su aterrizaje.

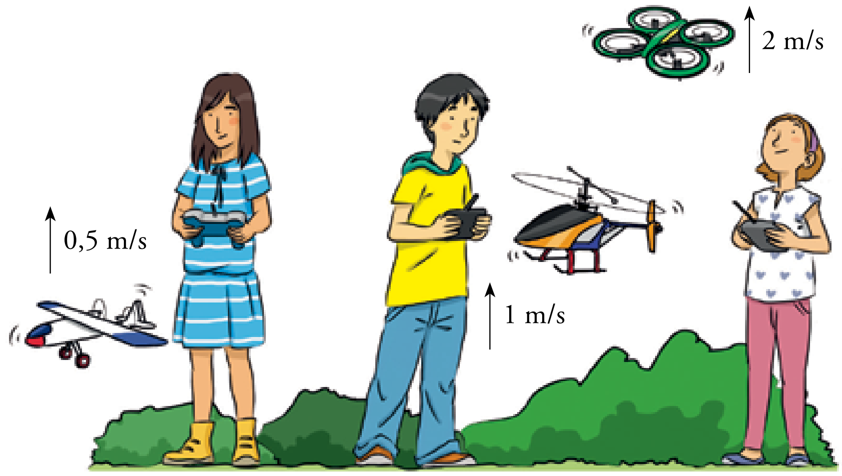


Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

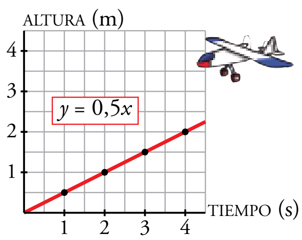
3 Funciones de proporcionalidad: $y = mx$

Andrea tiene un avión teledirigido; Helio, un helicóptero teledirigido, y Diana, un dron para grabar imágenes desde las alturas. El avión asciende medio metro por segundo; el helicóptero, un metro cada segundo, y el dron, dos metros por segundo.

Hoy, los tres amigos, han salido al campo a volar sus aparatos.



Veamos cuáles son las alturas de estos en función del tiempo que ascienden.

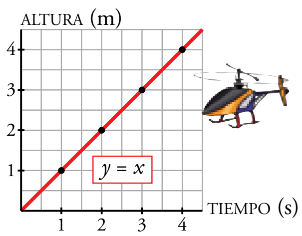


- AVIÓN: 0,5 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	…	x
ALTURA (m)	0	0,5	1	1,5	2	…	$0,5x$

La altura a la que sube el avión se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = 0,5x$$

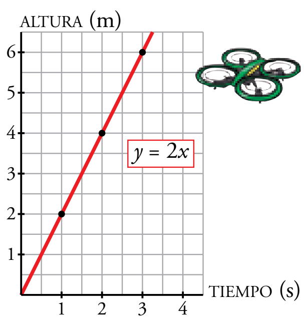


- HELICÓPTERO: 1 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	…	x
ALTURA (m)	0	1	2	3	4	…	x

La altura que alcanza el helicóptero se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

$$y = x$$



- DRON: 2 m/s

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	…	x
ALTURA (m)	0	2	4	6	8	…	$2x$

La altura a la que sube el dron se obtiene, en función del tiempo, mediante la ecuación:

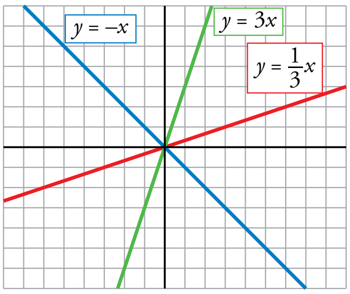
$$y = 2x$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

La altura que alcanza el helicóptero de Helio es **proporcional** al tiempo que está ascendiendo. Lo mismo ocurre con la altura del avión y la del dron. Por eso, estas funciones que relacionan las alturas con el tiempo:

$$y = 0{,}5x \qquad y = x \qquad y = 2x$$

se llaman *funciones de proporcionalidad*.



Se llama **función de proporcionalidad** a la que relaciona dos valores directamente proporcionales.

Tiene la ecuación $\boldsymbol{y = mx}$.

Se representa mediante **una recta** que pasa por el punto (0, 0).

La constante de proporcionalidad, m, puede ser positiva o negativa. Se llama **pendiente** de la recta y tiene que ver con su inclinación.

Ejercicio resuelto

Representar las funciones de proporcionalidad cuyas ecuaciones son:

a) $\boldsymbol{y = -2x}$

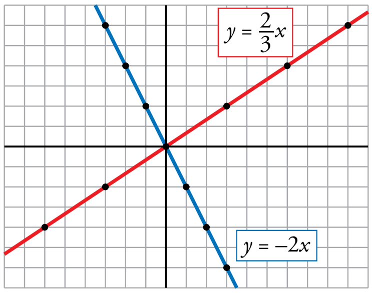
b) $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x}$

a)

x	0	1	2	3	–1	–2
y	0	–2	–4	–6	2	4

b) Para obtener ordenadas (y) enteras, daremos a las abscisas (x) valores múltiplos de 3:

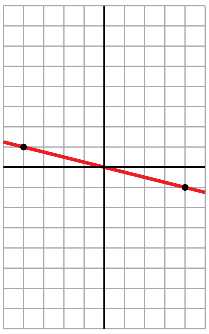
x	0	3	6	9	–3	–6
y	0	2	4	6	–2	–4

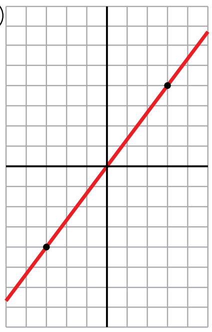


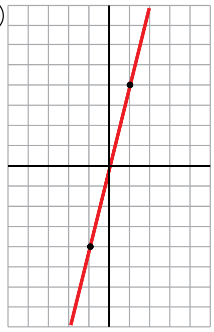
Piensa y practica

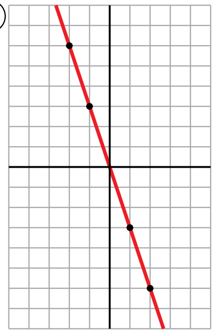
1. Asocia a cada una de las gráficas la ecuación que le corresponda:

a) $y = 4x$ b) $y = \frac{4}{3}x$ c) $y = \frac{-1}{4}x$ d) $y = -3x$

A


B


C


D


2. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad dadas por su ecuación. Completa en cada caso la tabla correspondiente en tu cuaderno.

a) $y = -\frac{1}{2}x$

x	0	2	4	6	–2	–4
y						

b) $y = \frac{2}{5}x$

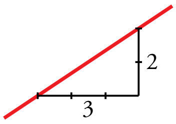
x	0	5	10	15	–5	–10
y						

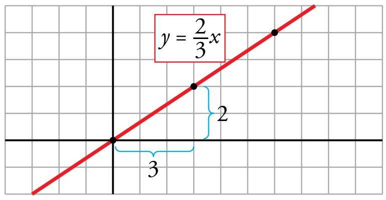
En la web Practica el concepto de función de proporcionalidad.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

4 Pendiente de una recta

- La ecuación de esta recta es $y = \frac{2}{3}x$:

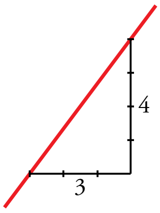


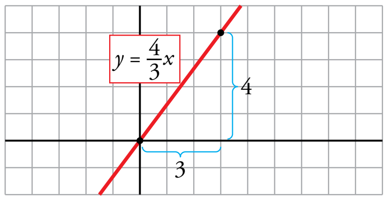


Su pendiente es $\frac{2}{3}$.

Por cada 3 unidades que avanza la x, la y sube 2 unidades.

- La ecuación de esta recta es $y = \frac{4}{3}x$:

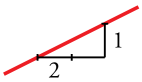


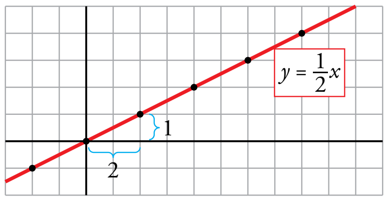


Su pendiente es $\frac{4}{3}$.

Cada vez que la x avanza 3 unidades, la y sube 4 unidades.

- La ecuación de esta recta es $y = \frac{1}{2}x$:

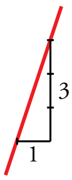


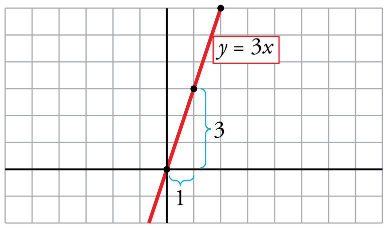


Su pendiente es $\frac{1}{2}$.

Cuando la x avanza 2 unidades, la y sube 1 unidad.

- La ecuación de esta recta es $y = 3x$:

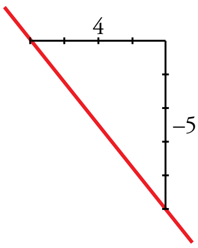


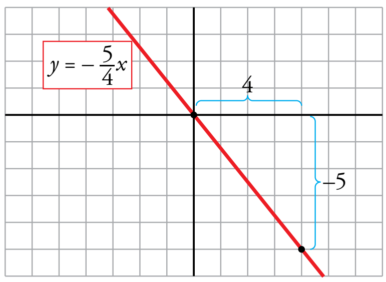


Su pendiente es $3 = \frac{3}{1}$.

Cuando la x avanza 1 unidad, la y sube 3 unidades.

- La ecuación de esta recta es $y = -\frac{5}{4}x$:





Su pendiente es $-\frac{5}{4} = \frac{-5}{4}$.

Cuando la x avanza 4 unidades, la y baja 5 unidades.

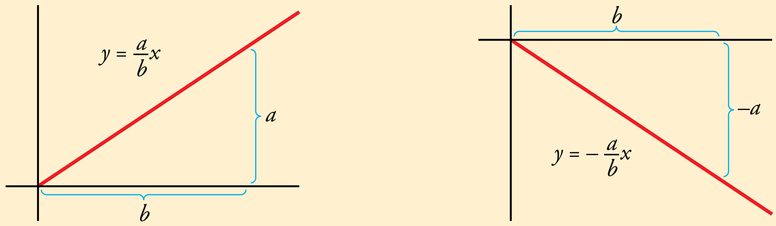
Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

En la web Practica el concepto de pendiente de una recta.

La **pendiente** m de una recta $y = mx$ es la medida de su crecimiento:

- Si m es positiva, la recta es creciente.
- Si m es negativa, la recta es decreciente.

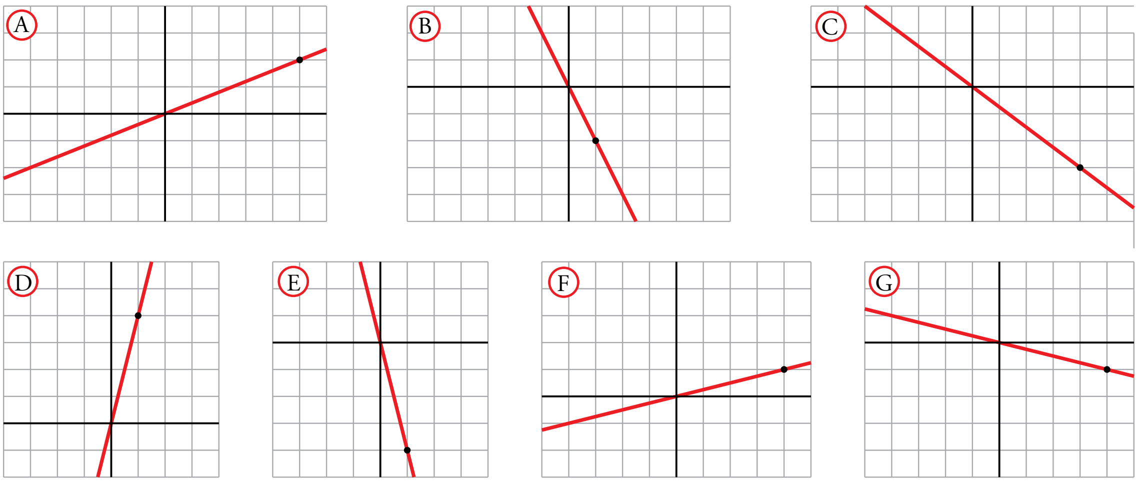
Las rectas $y = \frac{a}{b}x$, $y = -\frac{a}{b}x$, siendo a y b números naturales, se representan del siguiente modo:



En la web Concepto de pendiente de una recta.

Piensa y practica

1. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:



2. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad basándote en sus pendientes:

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = -5x$

e) $y = -2x$ f) $y = \frac{2}{5}x$ g) $y = -\frac{1}{3}x$ h) $y = -\frac{5}{2}x$

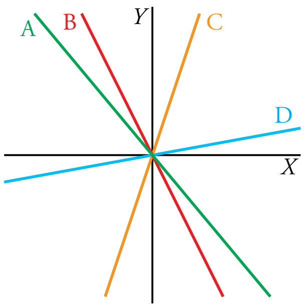
3. Indica cuál de estas puede ser la pendiente de cada una de las rectas representadas a la derecha.

a) $m = 3$

b) $m = 1/4$

c) $m = -1$

d) $m = -7/3$



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

5 Funciones lineales: $y = mx + n$

Nota

En matemáticas superiores se llaman **funciones lineales** a las del tipo $y = mx$.

A estas otras, $y = mx + n$, se las llama **funciones afines.**

Sin embargo, en matemáticas aplicadas como, por ejemplo, en economía, se llaman lineales a las funciones que se representan mediante rectas.

Así lo hacemos aquí:

lineales → $y = mx + n$

de proporcionalidad → $y = mx$

En la web

Practica el concepto de función lineal.

Diana quiere hacer volar su dron desde su terraza, que está a 3 metros de altura. El dron sube a una velocidad de 2 metros cada segundo. Por tanto, la altura del dron en función del tiempo que esté subiendo es:

0 segundos → 3 m

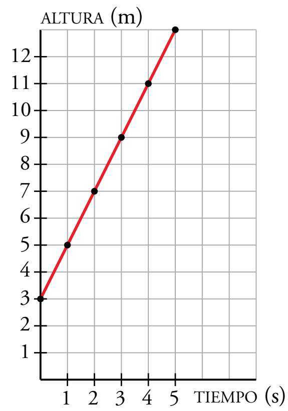
1 segundo → $3 + 1 \cdot 2 = 5$ m

2 segundos → $3 + 2 \cdot 2 = 7$ m

3 segundos → $3 + 3 \cdot 2 = 9$ m

4 segundos → $3 + 4 \cdot 2 = 11$ m

5 segundos → $3 + 5 \cdot 2 = 13$ m



En la web

Practica el concepto de función lineal.

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5	…	x
ALTURA (m)	3	5	7	9	11	13	…	$3 + 2x$

La altura se obtiene en función del tiempo mediante la ecuación:

$$y = 3 + 2x$$

En la web

Practica con funciones $y = mx + n$.

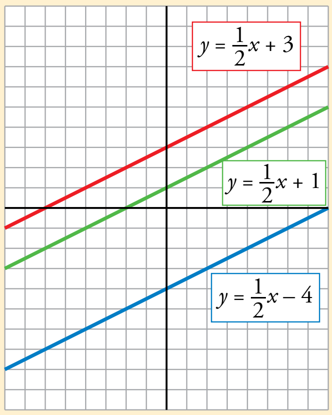
La ecuación $\boldsymbol{y = mx + n}$ se representa mediante una recta de **pendiente** m que corta al eje Y en el punto $(0, n)$.

n se llama **ordenada en el origen.**

Dos ecuaciones con la misma pendiente se representan mediante rectas paralelas.

Las funciones $y = mx + n$ se llaman **funciones lineales.**

Cuando $n = 0$ se trata de una función de proporcionalidad, $y = mx$.



Ten en cuenta

Las funciones representadas mediante rectas tienen por ecuación:

$$y = mx + n$$

Si $n = 0$, estamos en el caso de una función de proporcionalidad:

$$y = mx$$

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios resueltos

1. ***Representar estas funciones:***

a) $y = 2x - 5$

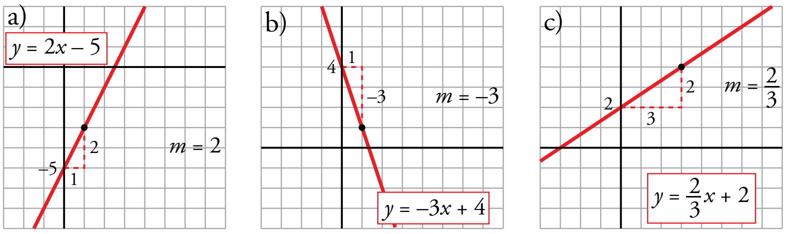
b) $y = -3x + 4$

c) $y = \frac{2}{3}x + 2$

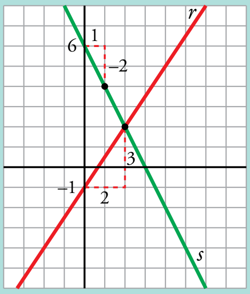
a) Para representar $y = 2x - 5$, nos fijamos en que $m = 2$ y $n = -5$. Por tanto, dibujaremos una recta que pase por $(0, -5)$ y cuya pendiente sea 2 (avanza 1, sube 2).

b) Procediendo de forma análoga al caso anterior, dibujaremos una recta que pase por $(0, 4)$ y cuya pendiente sea -3 (avanza 1, baja 3).

c) La recta pasará por $(0, 2)$ y su pendiente será $\frac{2}{3}$ (avanza 3, sube 2).



2. ***Deducir las ecuaciones de las dos rectas representadas.***



Al ser rectas, la ecuación de ambas es $y = mx + n$.

- Ecuación de r:

  Pasa por $(0, -1)$. Por tanto, $n = -1$.

  Cuando avanza 2, sube 3. Su pendiente es $m = \frac{3}{2}$.

  Su ecuación es: $y = \frac{3}{2}x - 1$.

- Ecuación de s:

  Pasa por $(0, 6)$. Por tanto, $n = 6$.

  Cuando avanza 1, baja 2. Su pendiente es $m = \frac{-2}{1} = -2$.

  Su ecuación es: $y = -2x + 6$.

3. ***Escribir la ecuación de la recta, r, que tiene ordenada en el origen 3 y pendiente –0,4.***

Podemos escribir la ecuación con esa pendiente:

$$y = 3 - 0{,}4x$$

O expresar la pendiente mediante una fracción para poder representarla más fácilmente:

$$y = 3 - \frac{2}{5}x$$

Piensa y practica

1. Representa las siguientes funciones:

a) $y = -2x + 5$

b) $y = x - 3$

c) $y = \frac{2}{3}x - 4$

d) $y = \frac{3}{2}x + 4$

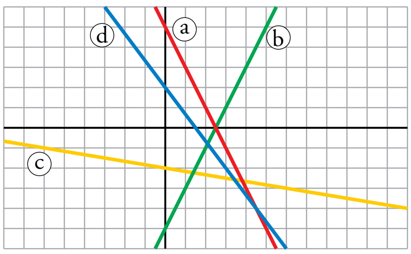
e) $y = -x - 1$

f) $y = 0{,}8x - 6$

g) $y = \frac{3}{5}x + 1$

h) $y = -0{,}625x + 1$

2. Escribe las ecuaciones de estas funciones:

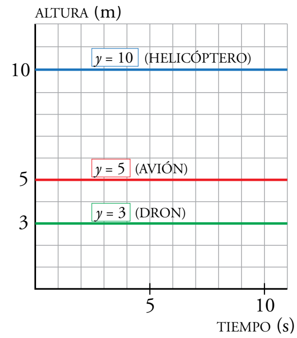


En la web Practica la asociación entre funciones lineales y sus correspondientes representaciones gráficas.

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

6 Funciones constantes: $y = k$

Andrea, Helio y Diana han vuelto a hacer volar sus artefactos, pero esta vez cada uno lo mueve solo en horizontal, siempre a la misma altura. Helio pasea su helicóptero desde su terraza, a 10 m de altura; Andrea ha lanzado su avión por la ventana a 5 m del suelo, y Diana se ha subido a una escalera para que su dron se mantenga a 3 m de altura.



Avión de Andrea:

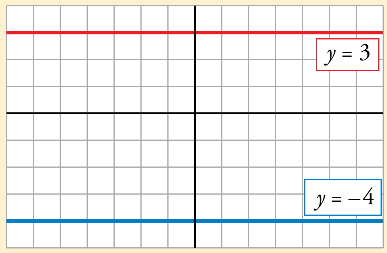
TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	…
ALTURA (m)	5	5	5	5	5	…

La altura, en función del tiempo, es $y = 5$ para el avión de Andrea.

La función $\boldsymbol{y = k}$, en la que el valor de y no depende de x, se llama **función constante.**

Se representa por una recta paralela al eje X, a una distancia k de este.

La pendiente de una función constante es 0.



Ten en cuenta

La función constante $y = k$ es una función lineal, $y = mx + n$, en la que $m = 0$.

Ejercicio resuelto

El London Eye es una noria mirador de 136 m de altura que está en el centro de Londres.

Escribir la ecuación de la función que relaciona el tiempo que gira la noria y la distancia a la que se encuentra del centro una determinada cabina.

Como la altura es de 136 m, la distancia de una cabina al centro es:

$$136 : 2 = 68 \text{ m}$$

Por tanto, la función que relaciona el tiempo transcurrido con la distancia de una cabina al centro de la noria es una función constante de ecuación:

$$y = 68$$

Piensa y practica

1. Represente las siguientes funciones:

a) $y = 7$ b) $y = –3$ c) $y = 0$

2. a) Representa la recta que pasa por estos puntos:

$A(–2, 3)$ $B(5, 3)$

b) Sin hacer ningún cálculo, ¿podrías dar la ecuación de la recta anterior?

3. ¿Cuál es la ecuación del eje X?

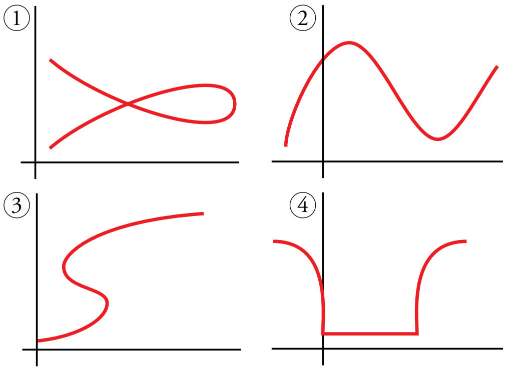
4. Escribe la ecuación de las siguientes funciones:

Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Ejercicios y problemas

Concepto de función

1. ¿Cuáles de estas gráficas corresponden a una función y cuáles no? Explica por qué.



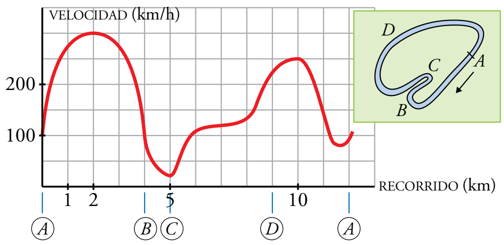
2. a) ¿Puede una recta vertical, paralela al eje *Y*, ser la representación gráfica de una función?

b) ¿Y una recta horizontal?

c) ¿Y una circunferencia?

Interpretación de gráficas

3. Esta gráfica describe la velocidad de un coche de carreras en cada lugar de ese circuito:

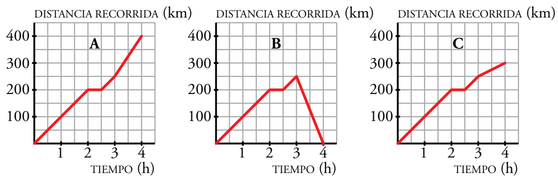


a) Di en qué tramos la velocidad es creciente y en cuáles es decreciente.

b) ¿A qué crees que se deben los aumentos y las disminuciones de velocidad?

c) Señala el máximo y el mínimo de esta función.

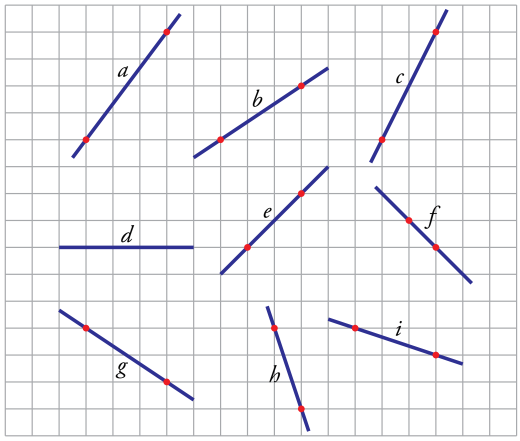
4. Indica cuál de estas gráficas representa la distancia recorrida por un vehículo a lo largo de 4 h de viaje, sabiendo que a las 2 h para a descansar durante media hora y a las 3 h sube un puerto:



¿Cuánto ha durado el viaje? ¿Cuánto ha recorrido?

Funciones lineales

5. Calcula la pendiente de cada una de las siguientes rectas:



6. Representa las siguientes funciones sin la ayuda de una tabla de valores:

a) $y = 2x$ b) $y = \frac{1}{2}x$

c) $y = -3x$ d) $y = \frac{4}{3}x$

e) $y = -\frac{2}{5}x$ f) $y = \frac{3}{4}x$

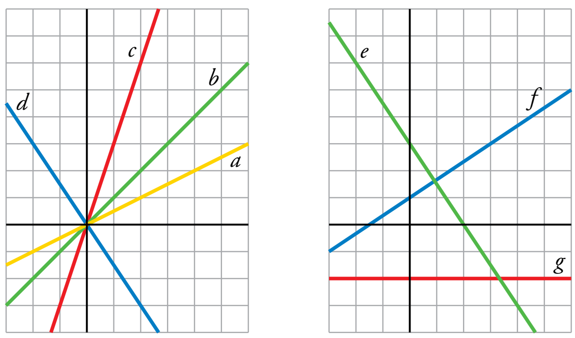
g) $y = -\frac{1}{2}x - 2$ h) $y = -3x + 5$

i) $y = -\frac{4}{3}x + 1$ j) $y = -\frac{2}{5}x + 4$

k) $y = -1$ l) $y = 4$

m) $y = 3$ n) $y = x$

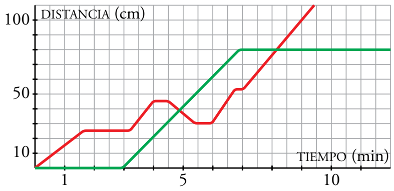
7. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes funciones, fijándote en la pendiente y la ordenada en el origen de cada una:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....

Resuelve problemas

8. Sara y Daniel ponen a competir, en una carrera, a sus caracoles; uno de ellos lleva una pegatina roja, y otro, una pegatina verde.



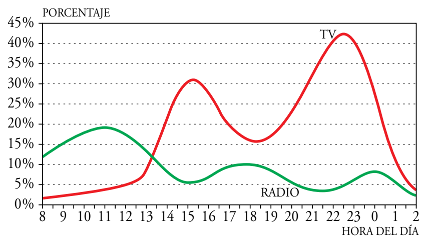
El verde tarda en salir y se para antes de llegar.

a) ¿Cuánto tiempo está parado en cada caso? ¿A qué distancia de la meta se para definitivamente?

b) ¿Cuántos centímetros y durante cuánto tiempo marcha el rojo en dirección contraria?

c) Describe la carrera.

9. Estas gráficas corresponden a los porcentajes de personas que ven la televisión o escuchan la radio a ciertas horas del día.

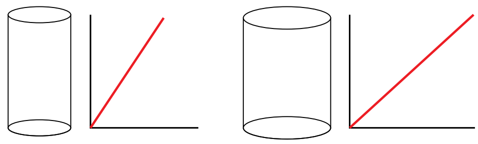


a) Describe la curva correspondiente a la televisión: dónde es creciente, dónde es decreciente, máximos, mínimos… Relaciónala con las actividades cotidianas: levantarse, acostarse, comida, cena…

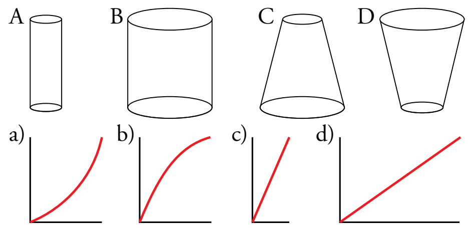
b) Haz lo mismo con la curva de la radio.

c) Compara las dos curvas y relaciónalas.

10. Un grifo tiene un caudal constante. Estas son las gráficas de la función nivel de agua-tiempo y los vasos correspondientes.



Ahora asocia tú cada gráfica a su vaso:



11. En un parque hay una tienda donde se alquilan patines, a 0,50 € la hora; monopatines, a 1 €/h, y bicicletas, a 2 €/h.

El coste del monopatín, y, en función del tiempo que se utilice, x, viene dado por la ecuación $y = x$.

a) Calcula la ecuación que relaciona el coste de los patines en función del tiempo que se utilice.

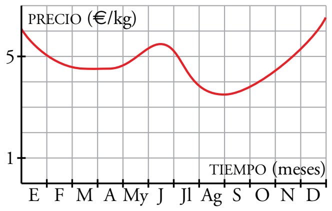
b) Halla la ecuación que relaciona el coste de la bicicleta en función del tiempo.

c) Representa en los mismos ejes coordenados las tres funciones de proporcionalidad.

d) ¿Cuáles son las pendientes de las tres rectas? ¿Qué representan en este contexto?

Autoevaluación

1. a) Describe la evolución del precio de la miel a lo largo de un año.



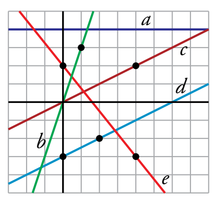
b) ¿En qué tramos la función es creciente y en cuáles es decreciente?

c) ¿Cuándo es mínimo el precio y cuál es?

2. Representa estas funciones:

a) $y = -\frac{5}{3}x$ b) $y = 2x - 5$ c) $y = 4$

3. Escribe la ecuación de cada una de estas funciones:



Nombre y apellidos: .... Fecha: ....