Magnitud, Razón y Proporción

Una *magnitud* es una cantidad medible de un sistema físico, es decir, a la que se le pueden asignar distintos valores como resultado de una medición o una relación de medidas. *Son magnitudes, el tiempo, la distancia, la edad, la temperatura, la masa y un largo etc.*

Definimos la *razón* entre dos cantidades comparables como el cociente de éstas, expresado como fracción (o como decimal o entero si es más conveniente). Así, la razón entre una magnitud *a* y una magnitud *b* la expresamos como: $\frac{a}{b}$ Al numerador de la fracción se le conoce como *antecedente* y al denominador como *consecuente*.

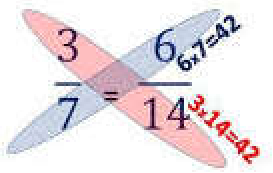
La razón entre las edades de Julia de 5 años y Diego de 3 años es: $\frac{5}{3}$

Una *proporción* es una igualdad entre dos razones. Así, dadas dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, tendríamos una proporción si: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Una proporción se lee: *a es a b, como c es a d.*

Además, a las magnitudes a y d se les conoce como *extremos,* mientras que a las magnitudes b y c se les conoce como *medios.*

En cualquier proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios: *Si* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$



Tres es a 7 como 6 es a 14.

Si en una proporción se efectúa la división de a entre b y de c entre d, se obtiene un mismo número r, denominado razón de proporcionalidad.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=r=\text{razón de proporcionalidad} \qquad \frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{12}{16}=r=0{,}75$$

Calcula el término desconocido en cada proporción.

a) $\frac{1}{3}=\frac{5}{x} \xrightarrow{\text{Producto de extremos igual a producto de medios}} 1 \cdot x = 5 \cdot 3 \rightarrow x=15$

b) $\frac{14}{y}=\frac{21}{33} \rightarrow 14 \cdot 33 = y \cdot 21 \rightarrow y=\frac{14 \cdot 33}{21}=22$

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son *directamente proporcionales* si al multiplicar o dividir cualquier valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda también multiplicado o dividido por ese mismo número. En general, dos magnitudes a y b son directamente proporcionales cuando al aumentar una, la otra lo hace de la misma forma, o cuando al disminuir una la otra también disminuye de la misma forma.

$$\text{Si } a\uparrow \rightarrow b\uparrow \quad \text{ó} \quad \text{Si } a\downarrow \rightarrow b\downarrow$$

Una vendimiadora ha recolectado 14 kilos de uva en las 4 primeras cepas de la viña. ¿Cuántos kilos podría esperar de las próximas 10 cepas?

Kilos	Cepas
14	4
x	10

$$\frac{14}{x}=\frac{4}{10} \qquad x=\frac{14 \cdot 10}{4}=\frac{140}{4}=35$$

Por tanto, recolectará 35 kilos.

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son *inversamente proporcionales* si al multiplicar (o dividir) cualquier valor de una de ellas por un número, el valor de la otra queda dividido (o multiplicado) por ese mismo número. En general, dos magnitudes *a* y *b* son inversamente proporcionales cuando al aumentar una, la otra lo hace de la misma forma, o cuando al disminuir una la otra también lo hace de la misma forma.

$$\text{Si } a\uparrow \rightarrow b\downarrow \quad \text{ó} \quad \text{Si } a\downarrow \rightarrow b\uparrow$$

En la proporcionalidad inversa, ocurre siempre que al multiplicar el valor de las dos magnitudes, se obtiene un valor constante.

$$a \cdot b = cte = ab$$

Diez obreros terminan una obra en 6 días, ¿Cuánto tardarán, trabajando al mismo ritmo, 12 obreros?

Obreros		Tiempo(días)
10	→	6
12	→	x

$$\rightarrow \quad x=\frac{10 \cdot 12}{6}=5 \text{ días}$$

Solución: 12 Obreros tardarán 5 días.

Regla de 3

Cuando en una proporción conocemos el valor de tres de las magnitudes *a, b y c, pero desconocemos* el valor de una cuarta magnitud, podemos calcularlo utilizando la *regla de 3 directa* (Si las magnitudes son directamente proporcionales) o *regla de 3 inversa* (Si las magnitudes son inversamente proporcionales):

Regla de 3 Directa		Regla de 3 Inversa	
A = B (DIVIDIR, MULTIPLICAR) C = X	$x=\frac{c \cdot b}{a}$	A = B (MULTIPLICAR, DIVIDIR) C = X	$x=\frac{a \cdot b}{c}$

Repartos Directamente Proporcionales (RDP)

Para repartir una cantidad, N, en *partes directamente proporcionales* a tres números, a, b y c, las partes se obtienen multiplicando cada número, a, b y c, por la constante de proporcionalidad, k, obtenida dividiendo la cantidad total entre la suma de los números a, b y c.

$$k=\frac{N}{a+b+c}$$

En este reparto, le corresponderá más a quien tiene más partes.

Un padre reparte 700 € en partes directamente proporcionales a las edades de sus hijos; Miguel tiene 8 años, Fátima 12 y Lucía 15. ¿Cuánto reciben?

Calculamos la constante de proporcionalidad:

$$k=\frac{N}{a+b+c}=\frac{700}{8+12+15}=\frac{700}{35}=20$$

Y ahora multiplicamos la edad de cada uno por dicha constante:

$$\text{Miguel}: 8 \cdot 20 = 160\ € \qquad \text{Fátima}: 12 \cdot 20 = 240\ € \qquad \text{Lucía}: 15 \cdot 20 = 300\ €$$

Por tanto, a Miguel le corresponden 160, a Fátima 240 y a Lucía 300 €.

Repartos Inversamente Proporcionales (RIP)

Para repartir una cantidad, N, en *partes inversamente proporcionales* a tres números, *a, b y c,* las partes se obtienen dividiendo cada número, *a, b y c*, por la constante de proporcionalidad, *k,* obtenida dividiendo la cantidad total entre la suma de las inversas de los números.

$$k=\frac{N}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

En este tipo de reparto recibe más quien menos partes tiene.

Se quiere repartir un premio de 1.860 € a los tres mejores corredores de una carrera, de manera inversamente proporcional a los tiempos que han invertido en completar el recorrido. El primer corredor tardó 24 segundos, el segundo 28 y el tercero 30.

Calculamos la constante de proporcionalidad:

$$k=\frac{N}{a+b+c}=\frac{1.860}{\frac{1}{24}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}}=\frac{1.860}{\frac{31}{280}}=16.800$$

Y ahora dividimos el tiempo de cada uno por dicha constante:

$$\text{Primero: } \frac{16.800}{24}=700\ € \quad \text{Segundo: } \frac{16.800}{28}=600\ € \quad \text{Tercero: } \frac{16.800}{30}=560\ €$$

Por tanto, al 1º le corresponden 700 €, al 2º 600 y al 3º 560 €.

Porcentajes (%)

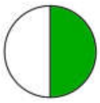
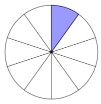
El *porcentaje o tanto por ciento* es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana. El tanto por ciento es una razón con denominador 100, aunque también se puede considerar una fracción de denominador 100 o como un número decimal si realizamos la división.

$$30\% = \frac{30}{100} = 0,3$$

Un porcentaje se representa con el símbolo: %

Para calcular un determinado tanto por ciento de una cantidad, se multiplica la cantidad por el tanto y se divide entre 100 (o por el % expresado en decimal)

$$a\% \text{ de } C = \frac{C \cdot a}{100} \quad \rightarrow \quad 20\% \text{ de } 50 = \frac{20 \cdot 50}{100} = \frac{1000}{100} = 10 = 0,2 \cdot 50$$

%	50%	25%	20%	10%
Fracción	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
Dibujo				

Problemas con Porcentajes

Un porcentaje maneja tres elementos: un *total*, un *tanto por ciento* y *una parte* del total. Veámoslo con algunos ejemplos:

$$\% = \frac{parte}{total} \cdot 100$$

Conocidos el total y el porcentaje, la parte la calcularemos multiplicando el porcentaje por el total:

Una empresa de limpieza tiene 180 empleados, de los cuales el 35% trabaja en el turno de noche. ¿Cuántos empleados hay en el turno de noche?

$$Parte = \% \cdot Total \quad \rightarrow \quad 35\% \cdot 180 = \frac{35}{100} \cdot 180 = \frac{180 \cdot 35}{100} = 180 \cdot 0,35 = 63$$

Por tanto en el turno de noche hay 63 empleados.

Conocidos la parte y el porcentaje, el total lo calcularemos haciendo una proporción:

Una empresa de limpieza tiene 63 empleados en el turno de noche, lo que supone el 35 % de la plantilla. ¿Cuántos empleados componen el total de la plantilla?

Empleados	*Porcentaje*
63	35%
x	100%

$$\rightarrow \quad \frac{63}{x} = \frac{35}{100} \quad \rightarrow \quad x = \frac{63 \cdot 100}{35} = 180$$

Por tanto, la plantilla la componen 180 empleados

Conocidos la parte y el total, el porcentaje lo calcularemos dividiendo la parte entre el total y multiplicándolo por 100:

Una empresa de limpieza tiene 180 empleados, de los cuales 63 trabaja en el turno de noche. ¿Qué porcentaje de los empleados trabaja en el turno de noche?

Empleados	*Porcentaje*
180	100%
63	x

$$\frac{180}{63} = \frac{100}{x} \qquad x = \frac{63 \cdot 100}{180} = \frac{63}{180} \cdot 100 = 35\%$$

Por tanto, el 35% de los empleados está en el turno de noche.

Aumentos y disminuciones porcentuales

A veces será importante conocer a cuánto asciende una cantidad después de aumentarla o de disminuirla en un porcentaje determinado. (Rebajas, descuentos, pago de impuestos….)

Para ello nos ayudaremos del índice de variación porcentual, *Iv*, que lo calcularemos:

$$I_v = 1 \pm \frac{\%}{100} \quad \begin{cases} \bullet \text{ Aumentos}: I_v = 1 + \frac{\%}{100} \\ \bullet \text{ Disminuciones}: I_v = 1 - \frac{\%}{100} \end{cases}$$

La cantidad final, Cf, que se obtiene al aumentar o disminuir una cierta cantidad inicial, Ci, en un porcentaje p % se calcula mediante la expresión:

$$C_f = C_i \cdot I_v = C_i \cdot \left(1 \pm \frac{\%}{100}\right)$$

Una población costera tiene 35.000 habitantes en invierno, pero en verano, con el turismo, aumenta en un 40 %. ¿Cuántos residentes tiene en verano?

Calculamos el Iv de un aumento del 40%:

$$I_v = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{40}{100} = 1 + 0,4 = 1,4$$

Y multiplicamos por la población en invierno:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 + \frac{\%}{100}\right) = C_i \cdot I_v = 35.000 \cdot 1,4 = 49.000$$

Por tanto, la población de la aldea en verano es de 49.000 habitantes

Un teatro ha vendido 4.600 entradas en la semana del estreno de una nueva obra. El gerente estima que en la segunda semana la venta descenderá en un 20%. ¿Cuántas entradas espera vender en la segunda semana?

Calculamos el Iv de la disminución del 20%:

$$I_v = 1 - \frac{\%}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$$

Y multiplicamos por las entradas:

$$C_f = C_i \cdot \left(1 - \frac{\%}{100}\right) = C_i \cdot I_v = 4.600 \cdot 0,8 = 3.680$$

Por tanto, las entradas vendidas esta semana son 3.680

Otra forma de hacerlo sería, si la venta descenderá un 20 %, quiere esto decir que se venderán el 80% de las entradas vendidas la semana pasada, por tanto: 4.600·0,8=3.680 entradas.

Porcentajes encadenados

La cantidad final, Cf, que se obtiene al realizar varios aumentos o disminuciones porcentuales de una cantidad inicial, Ci, se calcula mediante la expresión:

$$C_f = C_i \cdot I_{vt} = C_i \cdot \left(i_{v_1} \cdot i_{v_2} \cdot i_{v_3} \cdot i_{v_4} \cdot i_{v_5} \cdot i_{v_6} \cdot i_{v_7} \cdot i_{v_8} \cdot i_{v_9} \ldots\ldots\right)$$

En la que se multiplican todos los índices de variación asociados a cada uno de los aumentos o disminuciones porcentuales.

En la escuela de idiomas se matriculan 125 estudiantes para estudiar francés, en segunda matrícula aumenta un 15% y a lo largo del curso se quitan un 20% de ellos, ¿Cuántos estudiantes quedan a final de curso?

Calculamos el Iv del aumento del 15%:

$$I_{v_1} = 1 + \frac{\%}{100} = 1 + \frac{15}{100} = 1 + 0,15 = 1,15$$

Calculamos también el Iv de los alumnos que se quitan:

$$I_{v_2} = 1 - \frac{\%}{100} = 1 - \frac{20}{100} = 1 - 0,2 = 0,8$$

Calculamos el índice de variación total, multiplicando ambos:

$$I_v = I_{v_1} \cdot I_{v_2} = 1,15 \cdot 0,8 = 0,92$$

Y por último calculamos los alumnos al final de curso multiplicando la cantidad inicial por el *Iv* total:

$$C_f = C_i \cdot I_{v_{Total}} = 125 \cdot 0,92 = 115$$

Por tanto, quedan 115 estudiantes de francés.

Un empleado ha tenido dos aumentos de sueldo en un año, la primera de un 5% y la segunda de un 4%, si el sueldo después de las dos subidas es de 2.184. ¿Cuál era el sueldo a principios de año?

Calculamos los Iv de ambos aumentos y el total:

$$I_{v_1} = 1,05 \qquad I_{v_2} = 1,04 \quad \rightarrow \quad I_{v_{Total}} = I_{v_1} \cdot I_{v_2} = 1,05 \cdot 1,04 = 1,092$$

Como la cantidad final se calcula mediante la expresión $C_f = C_i \cdot I_{v_{Total}}$,

despejamos y calculamos la cantidad inicial: $C_i = \frac{C_f}{I_{v_{Total}}} = \frac{2.184}{1,092} = 2.000$ €

Por tanto, su sueldo era de 2.000 €.