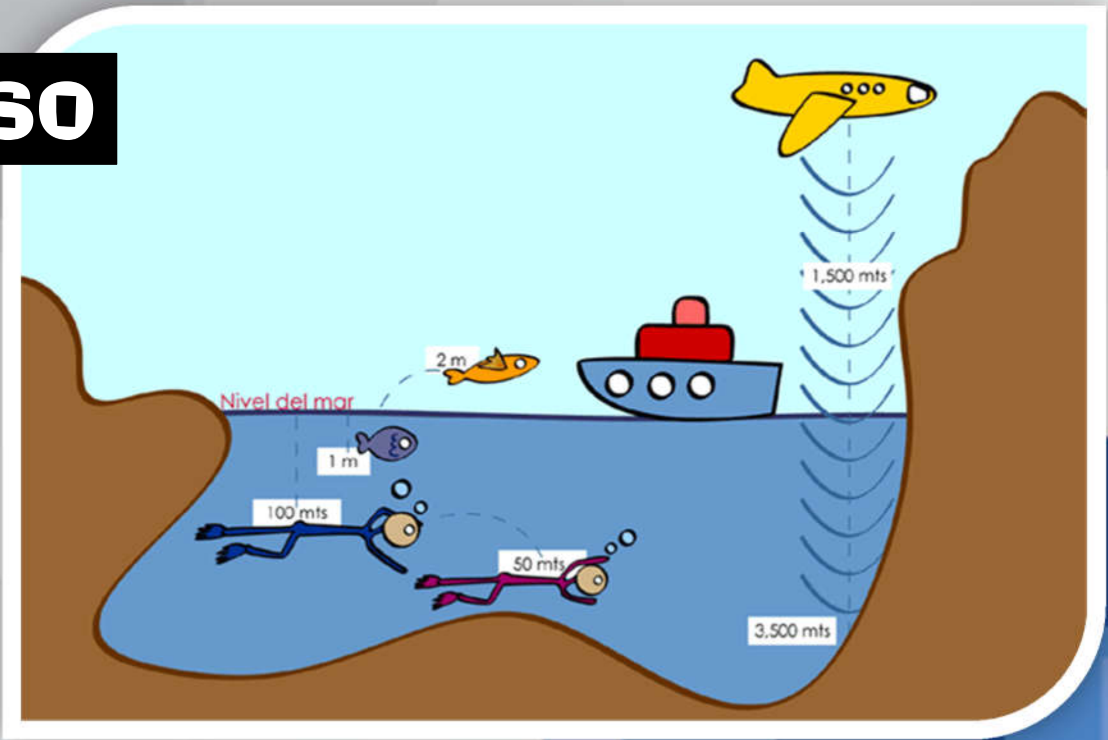
Unidad Didáctica 1

# NÚMEROS ENTEROS

**2º ESO**




## En esta unidad vas a:

**1.- Comprender el significado de los números positivos y negativos y saber representarlos en la recta.**

**2.- Comprender los conceptos de opuesto y valor absoluto.**

**3.- Realizar operaciones combinadas con números enteros.**

**4.- Identificar múltiplos y divisores de un número.**

**5.- Identificar números primos y compuestos.**

**6.- Descomponer en factores primos.**

**7.- Calcular el m.c.d. y el m.c.m.**

**8.- Resolver problemas de números enteros.**

## Sumario

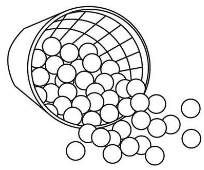
## 1.0.- Lectura comprensiva

# Uno bajo par

*"Birdie"*, o *"pajarito"* en español, es uno de los términos básicos de puntuación utilizados por los golfistas, y significa una puntuación de 1 bajo par en cualquier hoyo de golf individual. Si no lo sabes, Par, es el número esperado de golpes que debe llevar un buen jugador de golf para completar un hoyo. A todos los hoyos en un campo de golf se les asigna una calificación nominal, esas calificaciones generalmente son par 3, par 4 o par 5. Eso significa que un golfista experto debería necesitar tres golpes, cuatro golpes y cinco golpes, respectivamente, para jugar esos hoyos.

El número de golpes, de más o de menos, que un jugador emplea en realidad en su juego se expresa con números, positivos o negativos, respectivamente.

Mario es un apasionado del golf y suele entrenar con cierta frecuencia. En los últimos seis hoyos, Mario ha conseguido tres resultados distintos, -1 (uno bajo par) -2 (dos bajo par) y +2 (dos sobre par). Uno de ellos lo ha obtenido tres veces, otro dos veces y el otro una sola vez.



Su entrenador le dice: -"No está mal, el balance final de los seis hoyos. Este es un campo muy difícil y en total has hecho un "pajarito".

***El quid de la cuestión:*** ¿Cuántas veces ha obtenido Mario en los seis recorridos la puntuación -1, cuántas -2 y cuántas +2? ¿Hay más de una solución?

***Uno modo de resolverlo:*** Estudiaremos todos los casos posibles para ver si hay más de una solución.

**<u>Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:</u>**

**1.-** ¿Cuántos hoyos ha hecho Mario en total y cuál ha sido su puntuación final?

**2.-** ¿Ha obtenido la misma puntuación en todos los hoyos que ha hecho?

**3.-** ¿Qué puntuaciones ha obtenido?

**4.-** Si el recorrido que ha hecho Mario está penado para hacerlo en 65 golpes, ¿qué significa que ha obtenido una puntuación de -2?, ¿y de +2?

**5.-** Si, por ejemplo, Mario hubiera hecho tres recorridos de +2, dos recorridos de -1 y un recorrido de -2, ¿Cuál de estas expresiones permite calcular su puntuación total?

$6\cdot(2-1-2)$ $\qquad$ $3\cdot 2+2\cdot(-1)+(-2)$ $\qquad$ $3\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 2$

## 1.01.- Introducción

La facultad de contar está implícita en la aparición del número. Se mencionó que el hombre hacía marcas, aunque a veces las seguimos haciendo, para representar ciertas cantidades, pues esta actividad, que perdura desde tiempos inmemoriales, se formalizó en cada cultura con el número, los símbolos que representan a los números no han sido siempre los mismos.

Desde épocas remotas 400 a. c., los chinos realizaban sus cálculos aritméticos utilizando pequeñas varillas, colocaban estos numerales concretos *(números barras)* sobre una superficie plana *(tablero de cálculo)* llegando así a la creación de numerales posicionales decimales que mostraron desde un principio su gran potencialidad.

Por consiguiente, el concepto de número expresado en palabras se transcribió a una notación posicional sobre un tablero de cálculo. Este hecho jugó un papel muy importante en el paso de un nivel de pensamiento verbal a un nivel generalizado y abstracto, pavimentando así, el camino para el uso de símbolos. Las primeras manifestaciones de su uso se remontan al siglo V, en oriente, y no llega hasta occidente hasta el siglo XVI. En oriente se manipulaban números positivos y negativos, estrictamente se utilizaban los ábacos, usando tablillas o bolas de diferentes colores.

Corresponde a los Indios la diferenciación entre números positivos y negativos, que interpretaban como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente.

Hasta fines del siglo XVIII los números negativos no eran aceptados universalmente. *Gerolamo Cardano,* en el siglo XVI, llamaba a los números negativos “falsos”, pero en su *Ars Magna (1545)* los estudió exhaustivamente. *John Wallis* (1616-1703), en su *Aritmética Infinito (1655*), “demuestra” la imposibilidad de su existencia diciendo que “esos entes tendrían que ser a la vez mayores que el infinito y menores que cero”.

Por ende, *Leonardo Euler* es el primero en darles estatuto legal, en su *Anteitung Zur Algebra (1770)* trata de “demostrar” que (-1).(-1) = +1; argumentaba que el producto tiene que ser +1 ó -1 y que, sabiendo que se cumple (1).(-1)=-1, tendrá que ser: (-1).(-1) = +1.

Hoy en día los Números enteros representan una generalización del conjunto de números naturales que incluyen números negativos (resultados de restar a un número natural otro mayor además del cero). Así los números enteros están formados por un conjunto de enteros positivos que podemos interpretar como los números naturales convencionales, el cero, y un conjunto de números negativos que son los opuestos de los naturales.

Los Números negativos pueden aplicarse en distintos contextos como la representación de deudas, profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, entre otros. Inicialmente el primer campo de aplicación fue la contabilidad donde los números negativos significaban deudas y los positivos haberes o activos poseídos, el hecho de que un número sea entero, significa de que no tiene parte decimal.

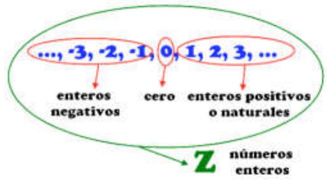
En fin, son los más próximos a la realidad humana inmediata, los que se usan en operaciones sencillas de sumas, restas y multiplicación. En esencia los números naturales se emplean para contar los objetos de un conjunto, mientras que los enteros resultan intuitivamente de las operaciones de sustracción realizadas con los naturales.

## 1.02.- Los números enteros. Definición.

Los números negativos surgen, en contraste con los positivos, ante la necesidad de cuantificar magnitudes capaces de tomar valores opuestos: tener-deber, subir-bajar, ganar-perder, aumentar-disminuir, etc.

Si tomamos el conjunto N de los números naturales y, por cada elemento distinto de cero, +a, añadimos otro con el signo negativo, –a, habremos obtenido un nuevo conjunto que se conoce en matemáticas como el conjunto de los números enteros y se designa por la letra Z

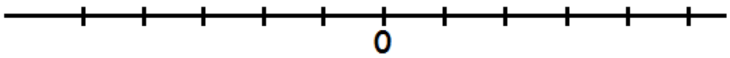
$\mathbb{Z}$
- Números Naturales o enteros positivos: 1, 2, 3, 4.......
- El cero 0
- Números Enteros negativos: -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7,........



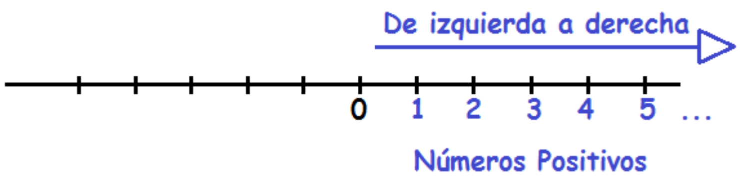

## 1.2.1.- Representación en la recta numérica

Los números enteros se representan ordenados en la recta numérica y para ello:

**1.-** Dibujamos una recta, dividida en partes iguales y ponemos el 0 en el centro:

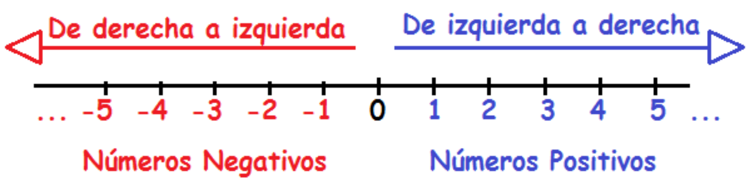



**2.-** Colocamos ***los números positivos a la derecha del cero***, aumentando su valor en una unidad, ***de izquierda a derecha***:




**3.-** Colocamos ***los números negativos a la izquierda del cero***, con las siguientes particularidades:

- Su ***valor absoluto*** (concepto que explicamos un poco más abajo) ***va aumentando de derecha a izquierda*** (simétricamente a los números positivos).
- Todos tienen el ***signo menos delante***.




## 1.2.2.- Valor Absoluto

El ***valor absoluto*** de un número es el número que resulta de ***quitarle su signo***, positivo o negativo, al número. Se representa encerrando al número y al signo entre dos barras verticales.

El valor absoluto de un ***número negativo*** es el número que queda cuando le quitamos el signo menos:

$$|-1| = 1 \qquad |-5| = 5 \qquad |-8| = 8 \qquad |-13| = 13$$

***En los números positivos o números naturales, el valor absoluto coincide con el valor del número***. Recuerda que habitualmente el signo + en los números positivos no se escribe:

$$|1| = 1 \qquad |5| = 5 \qquad |7| = 7 \qquad |+13| = 13 \qquad |+3| = 3 \qquad |+6| = 6$$

## 1.2.3.- Opuesto de un número entero

El ***opuesto de un número entero*** es otro número entero con el mismo valor absoluto pero con el signo contrario. El opuesto de un número *a* se representa como *Op(a)*.

$$Op(-7)=7 \qquad Op(5)=-5 \qquad Op(-5)=5 \qquad Op(a)=-a$$

De forma sencilla "dejamos el número y la cambiamos el signo"

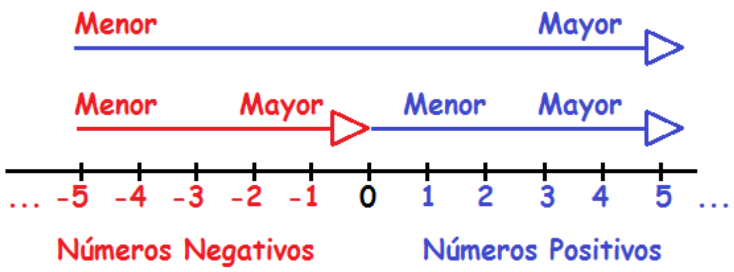
De forma reiterativa, el opuesto del opuesto es el mismo número:

$$Op(Op(a))=Op(-a)=a \qquad Op(Op(-7))=Op(7)=-7 \qquad Op(Op(4))=Op(-4)=4$$

## 1.2.4.- Comparación de números enteros

Un número entero es mayor que otro cuando está situado más a la derecha que él en la recta numérica.

- En un grupo de enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
- En un grupo de enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.
- Un número entero positivo es mayor que cualquier entero negativo.
- El cero es mayor que cualquier entero negativo y menor que cualquier entero positivo.




*Cualquier número positivo es mayor que el cero, y este, mayor que cualquier número negativo.*

*Los números negativos se ordenan al revés que los positivos. Es mayor el que tenga menor valor absoluto.*

**Ejemplo**

**1.-** Calcula:

a) $Op(Op(|-3|))=Op(Op(3))=Op(-3)=3$ b) $|Op(|-4|)|=|Op(4)|=|-4|=4$

**2.-** ¿Qué es mayor: el valor absoluto del opuesto de un número o el opuesto de su valor absoluto?

*El valor absoluto de algo siempre es positivo, mientras que el opuesto de un valor absoluto es siempre negativo, por tanto es mayor el valor absoluto del opuesto de un número.*

| Piensa y practica |
| --- |
| ***1.- Escribe el opuesto de cada uno de los números: -6, +5, -8, +9, -11, +12, -4*** |
| ***2.- Ordena de mayor a menor los números: -7, -2, +5, 0, +3, -8, +4, -10*** |
| ***3.- Escribe el valor absoluto de los números: -9, +6, -8, -4, +12, +25*** |
| ***4.- Representa en la recta numérica: -4, +6, -7, +2, -5, +3, -8*** |
| ***5.- ¿Cuántos números enteros están comprendidos entre -20 y +20?*** |

## 1.03.- Operaciones con números enteros.

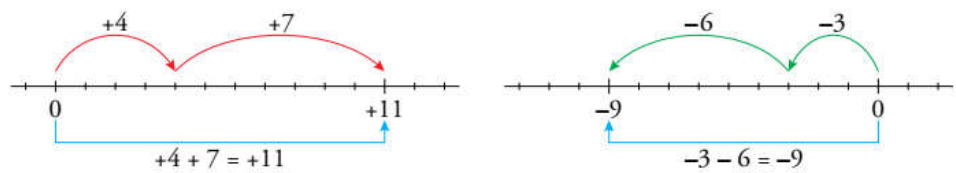
Estamos acostumbrados a operar con números naturales, o lo que es lo mismo, sólo con números positivos. Pero con los números enteros, tendremos que operar con números positivos y negativos a la vez, y eso *al principio nos va a costar un poco*. *Es seguro que vamos a cometer numerosos errores* por lo que es muy importante que nos quede todo muy claro y comprendamos bien los conceptos.

### 1.3.1.- Suma y resta de números enteros

<u>Para sumar dos números enteros:</u>

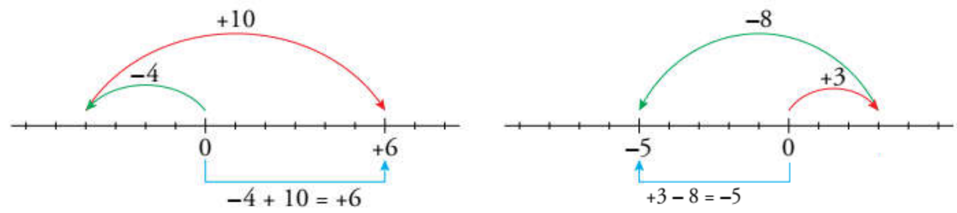
- Si tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se pone el signo que tenían los sumandos.

Ejemplo




- Si tienen distinto signo, se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplo




*Para restar dos números enteros, se suma al primero el opuesto del segundo.*

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo más, los signos interiores no varían.

$$+(-3+8-2) = -3+8-2$$

- Al suprimir un paréntesis precedido del signo menos, se cambian los signos interiores: más por menos y menos por más.

$$-(-3+8-2) = +3-8+2$$

Para operar más de dos números enteros positivos y negativos podemos seguir dos caminos:

| Ir operando, paso a paso, en el orden en que aparecen. | Agrupar los positivos por un lado y los negativos por otro. Después, operar. |
|---|---|
| $\overbrace{2-3}+4-8=$ | $7-5+4-8-3=$ |
| $=-\overbrace{1+4}-8=$ | $=\overbrace{7+4}-\overbrace{5-3-8}=$ |
| $=\overbrace{3-8}=-5$ | $=\overbrace{11-16}=-5$ |

***¿Cuál de las dos es mejor?*** Pues ninguna, dependiendo del tipo de ejercicio unas veces será mejor la primera y otras la segunda.

| Piensa y practica | | | |
|---|---|---|---|
| **1.- Calcula:** a) $10-3+5=$ | b) $9-8-7=$ | c) $7-15+2=$ | d) $-2-13-5=$ |
| **2.- Opera:** a) $15-(12-8)=$ | b) $8-(15-12)=$ | c) $15-(6-9+5)=$ | |
| **3.- Calcula:** a) $4-(8+2)-(3-13)=$ | b) $(5-16)-(7-3-6)-(9-13-5)=$ | | |
| **4.- Resuelve paso a paso:** a) $-9+\left[8-(13-4)\right]=$ | b) $2+\left[6-(4-2+9)\right]=$ | | |

## 1.3.2.- Multiplicación de números enteros

$+ \times + = +$
$- \times - = +$
$+ \times - = -$
$- \times + = -$

*Criterio de signos*

Para ***multiplicar*** dos números enteros primero se multiplican sus valores absolutos (los números sin su signo) y después, el resultado tendrá el signo + si los dos factores tienen el mismo signo, y signo – si tienen signos distintos. *(Véase tabla adjunta)*

Ejemplo

| | |
|---|---|
| $(+6)\cdot(+6)=+36$ | $(+6)\cdot(-6)=-36$ |
| $(-6)\cdot(+6)=-36$ | $(-6)\cdot(-6)=+36$ |

## 1.3.3.- División de números enteros

$+ \div + = +$
$- \div - = +$
$+ \div - = -$
$- \div + = -$

*Criterio de signos*

Para ***dividir*** dos números enteros primero se dividen sus valores absolutos (los números sin su signo) y después, el resultado tendrá el signo + si los dos factores tienen el mismo signo, y signo – si tienen signos distintos. *(Véase tabla adjunta)*

Ejemplo

| | |
|---|---|
| $(+18):(+6)=+3$ | $(+18):(-6)=-3$ |
| $(-12):(+6)=-2$ | $(-36):(-6)=+6$ |

| Piensa y practica | | | |
|---|---|---|---|
| **5.- Calcula:** a) $(+10)\cdot(-2)=$ | b) $(-4)\cdot(-9)=$ | c) $(-7)\cdot(+5)=$ | d) $(+11)\cdot(+7)=$ |
| **6.- Opera:** a) $(-24):(+3)=$ | b) $(-15):(-5)=$ | c) $(+22):(+11)=$ | d) $(+30):(-10)=$ |

## 1.3.4.- Operaciones combinadas con números enteros

Las operaciones combinadas con números enteros son uno de los contenidos más importantes de 1º y 2º de ESO. En concreto, los números enteros negativos, en general, y el orden correcto en que debemos resolver las operaciones son fuente de muchos problemas para los estudiantes.

Por ello, para no cometer errores es conveniente seguir paso a paso el siguiente orden de prioridad de las operaciones:

***Orden de prioridad en las operaciones:***

1. Efectuar las operaciones entre **paréntesis, corchetes y llaves**.
2. Efectuar los **productos** y **cocientes**.
3. Realizar las **sumas** y **restas**.

Cuando tengamos operaciones de igual prioridad se ejecutan de manera natural, es decir, de izquierda a derecha.

**Ejemplo**

$a)\ (241-100+44):5+20\cdot 7=(141+44):5+140=(185):5+140=37+140=177$

$b)\ (4-1)\cdot 3+4-16\div 2=(3)\cdot 3+4-8=9+4-8=13-8=5$

$c)\ 1-(-2)-(-2)-1\cdot(-1\cdot 3-1)=1+2+2-1\cdot(-3-1)=5-1\cdot(-4)=5+4=9$

$d)\ [9-(5-17)]-[11-(6-13)]=[9-(-12)]-[11-(-7)]=(9+12)-(11+7)=21-18=3$

$e)\ (10-3\cdot 6)-2\cdot[5+3\cdot(4-7)]=(10-18)-2\cdot[5+3\cdot(-3)]=(-8)-2\cdot[5-9]=-8-2\cdot(-4)=-8+8=0$

$f)\ 1-(-2)-(-2)-1\cdot(-1\cdot 3-1)=1+2+2-1\cdot(-3-1)=5-1\cdot(-4)=5+4=9$

$g)\ 8+(4-9+7)\cdot 2+4\cdot(3-8+4)=8+(+2)\cdot 2+4\cdot(-1)=8+4-4=8$

$h)\ (3+7)\div 2-35\div(10-3)=(10)\div 2-35\div(7)=5-5=0$

$i)\ 18-5\cdot[6-2\cdot(4-7)]+3\cdot(5-3)=18-5\cdot[6-2\cdot(-3)]+3\cdot(2)=18-5\cdot[6+6]+6=$
$=18-5\cdot 12+6=18-60+6=-36$

**Piensa y practica**

***7.- Calcula:***

$a)\ 48:[5\cdot 3-2\cdot(6-10)-17]=$

$b)\ 4-2\cdot(5-8)+2\cdot[5\cdot(2-7+3)-7]=$

$c)\ (42-25)-3\cdot[5\cdot(16-3\cdot 4)]+7=$

## 1.04.- Múltiplos y divisores de números enteros

Dos números están emparentados por la *relación de divisibilidad* cuando su cociente es exacto.

$$\text{Si la division } a:b \text{ es exacta, se cumple que}: \begin{cases} a \text{ es múltiplo de } b \\ b \text{ es divisor de } a \\ a \text{ es divisible por } b \end{cases}$$

Los ***múltiplos*** de un número lo contienen una cantidad exacta de veces y se obtienen multiplicándolo por cualquier otro número natural.

**Ejemplo**

*Los primeros múltiplos de 12:* $1\cdot 12=12$ $\quad 2\cdot 12=24$ $\quad 3\cdot 12=36$ $\quad 4\cdot 12=48$ $\quad 5\cdot 12=60$
$6\cdot 12=72$ $\quad 7\cdot 12=84$ $\quad 8\cdot 12=96$ $\quad 9\cdot 12=108$.......

- Un número tiene infinitos múltiplos.

- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad. → $a \cdot 1 = a \begin{cases} a \text{ es múltiplo de } 1. \\ a \text{ es múltiplo de } a. \end{cases}$
- Cualquier múltiplo de un número contiene, al menos, todos los factores primos de ese número.

Los ***divisores*** de un número están contenidos en él una cantidad exacta de veces y, por tanto, lo dividen con cociente exacto.

**Ejemplo**

*Los divisores de 12:*

| Dividendo | Divisor | Resto | Cociente |
|---|---|---|---|
| 12 | 12 | 00 | 1 |
| 12 | 6 | 00 | 2 |
| 12 | 4 | 00 | 3 |
| 12 | 3 | 00 | 4 |
| 12 | 2 | 00 | 6 |
| 12 | 1 | 00 | 12 |

*Los divisores de 12 son* 1, 2, 3, 4, 6, 12

*Observa que van emparejados y que su producto siempre es* 12 : $12 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 3 \cdot 4 = 12$

- Un número tiene una cantidad finita de divisores.
- Un número tiene al menos dos divisores: él mismo y la unidad.
- De cada división exacta, obtenemos dos divisores de ese número: el divisor y el cociente.
- Los divisores de un número están formados por algunos de los factores primos de ese número.

Propiedades:

✓ La suma de dos múltiplos de un número a es otro múltiplo de a. $m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$

✓ Si a un múltiplo de a se le suma otro número que no lo sea, el resultado no es múltiplo de a.

## 1.4.1.- Los números Primos

En matemáticas, un número primo es un número natural mayor que 1 que tiene únicamente dos divisores distintos: él mismo y el 1. Por el contrario, los números compuestos son los números naturales que tienen algún divisor natural aparte de sí mismos y del 1, y, por lo tanto, pueden factorizarse.
El número 1, por convenio, no se considera ni primo ni compuesto.

Un ***número es primo*** cuando es positivo y sus únicos divisores son él mismo y la unidad. En caso contrario, es ***compuesto.***

### Números Primos

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 17 | 19 | 23 | 29 | 31 | 37 |
| 41 | 43 | 47 | 53 | 59 | 61 | 67 | 71 | 73 | 79 | 83 | 89 |
| 97 | 101 | 103 | 107 | 109 | 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 |
| 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 |
| 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 | 281 |
| 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 | 349 | 353 | 359 |
| 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 |
| 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 |
| 509 | 521 | 523 | 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 |
| 599 | 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 |
| 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 | 733 | 739 | 743 |
| 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 | 809 | 811 | 821 | 823 | 827 |
| 829 | 839 | 853 | 857 | 859 | 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 |
| 919 | 929 | 937 | 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 997 | |

## 1.05.- Factorización de un número entero

Para descomponer un número en factores primos (factorizar), lo dividimos entre 2 tantas veces como sea posible; después, entre 3; después, entre 5, … y así sucesivamente entre los siguientes primos hasta obtener 1 en el cociente.

### 1.5.1.- Criterios de divisibilidad

Los *criterios de divisibilidad* son reglas que nos permiten averiguar, sin dividir, si un número es divisible por otro.

Los criterios más útiles son los asociados con los números primos, veamos los más importantes:

| Divisible por | Criterio | Ejemplo |
|---|---|---|
| **2** | Para saber si un número es divisible entre dos hay que comprobar que sea par. Si es par, entonces será divisible por 2. Recuerda que los números pares son los que terminan en 0, 2, 4, 6 y 8. | 12 es divisible por 2 porque es par. |
| **3** | Para saber si un número es divisible entre 3, tenemos que comprobar que la suma de todos sus dígitos sea 3 o múltiplo de 3. | 12 es divisible por 3 porque 1+2 =3. |
| **5** | Para saber si un número es divisible entre 5, dicho número tiene que acabar en 0 o 5. | 15 es divisible por 5 porque acaba en 5. |
| **7** | Para saber si un número es divisible entre 7 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades. Si el resultado es 0 o múltiplo de 7 entonces el número es divisible entre 7. Si el resultado es diferente, el número no es divisible entre 7. | 182: Separamos la cifra de las unidades 18 / 2<br>Restamos el número 18 menos el doble de la cifra de las unidades 2×2=4<br>18 – 4 = 14<br>14 es un múltiplo de 7. Por lo tanto 182 sí es divisible por 7. |
| **11** | Un número es divisible entre 11 cuando la suma de los números que ocupan la posición par menos la suma de los números que ocupan la posición impar es igual a 0 o a un número múltiplo de 11. | 5863:<br>Sumamos posiciones pares: 8 y 3. 8+3=11<br>Sumamos las impares: 5 y 6. 5+6=11<br>11 – 11 = 0<br>por lo tanto 5863 es divisible entre 11. |
| **13** | Para saber si un número es divisible entre 13 hay que restar el número sin la cifra de las unidades y 9 veces la cifra de las unidades. Si esa resta tiene como resultado 0 múltiplo de 13 entonces el número es divisible entre 13. | 325: Separamos la cifra de las unidades 32/5<br>Restamos la cifra sin las unidades y 9 veces las unidades 32 – 9 x 5 =32 – 45 = -13<br>El resultado es -13. Como es un múltiplo de 13, el número 325 sí es divisible entre 13. |
| **17** | Para saber si un número es divisible por diecisiete hay que tomar la última cifra de la derecha multiplicada por 5 y restar esta cantidad al número que resulta de quitar dicha cifra. Si el resultado es cero o un múltiplo de 17 el número será divisible por 17. | 85: Separamos la cifra de las unidades 8/5<br>Restamos la cifra in unidades y 5 veces las unidades 8-5·5=8-25 = -17<br>El resultado es -17. Como es múltiplo de 17, el número 85 es divisible por 17. |

*A veces, si el número es muy grande, habrá que reiterar el proceso varias veces.* Veamos un ejemplo:

*¿Es 4225 divisible por 13?*
Separamos las unidades 422/5 y restamos a la cifra sin unidades 9 veces las unidades:

$$422-9\cdot 5=422-45=377$$

Volvemos a separar las unidades: 37/7 y le restamos a la cifra sin nunidades 9 veces las unidades:

$$37-9\cdot 7=37-63=-26$$

Vemos que -26 es claramente múltiplo de 13. ***Por tanto 4225 es divisible entre 13.***

### 1.5.2.- Descomposición en factores primos

Todo número entero se puede expresar de forma única como el producto de potencias de números primos. A esta expresión se le llama ***factorización del número*** o ***descomposición en factores primos.***

Para descomponer un número en sus factores primos seguiremos los siguientes pasos:

1. Dividimos el número entre los sucesivos números primos (2, 3, 5, 7, 11, 13,….) tantas veces como se pueda hasta obtener la unidad utilizando los criterios de divisibilidad.
2. Si el número acaba en cero quitamos el cero y añadimos los factores 2 y 5.
3. Escribimos el número como producto de los factores primos y si hay algunos repetidos los expresamos como potencias.

Ejemplo

$$750 = 75 \cdot 10$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$750 = 75 \cdot 10 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$\begin{cases} 72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 64 = 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6 \\ 36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 12 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \end{cases}$$

Como veis algunos números los podemos descomponer rápidamente con la ayuda de las tablas de multiplicar. Claro que para ello es importante sabérselas bien y tener velocidad en el cálculo mental.

| Piensa y practica | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***8.- Separa, entre los siguientes números, los primos de los compuestos*** | | | | | | | | |
| 29 | 39 | 57 | 83 | 91 | 101 | 111 | 113 | 243 |
| ***9.- Descompón estos números en factores primos.*** | | | | | | | | |
| 48 | 72 | 84 | 100 | 130 | 160 | 594 | 720 | 975 |
| ***10.- Calcula los 5 primeros múltiplos de 13*** | | | | | | | | |
| ***11.- Calcula todos los divisores de 32*** | | | | | | | | |
| ***12.- Escribe los números primos comprendidos entre 80 y 100.*** | | | | | | | | |

## 1.06.- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Como ya estudiamos en el curso pasado, el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (mcm) se utilizan mucho a la hora de trabajar con fracciones, pero sobre todo a la hora de resolver cierto tipo de problemas.

### 1.6.1.- Máximo común divisor (MCD)

El ***máximo común divisor*** de varios números *a,b,c* es el ***mayor de los divisores comunes*** de dichos números y se representa por:

*M.C.D. (a,b,c)*

<u>Para calcularlo:</u>

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman solamente los factores primos comunes, elevado cada uno al menor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos.

Ejemplo

***Calcula el MCD (máximo común divisor) de 24, 60 y 72.***

En primer lugar descomponemos ambos números

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Después cogemos los factores que se repiten con el menor exponente y los multiplicamos:

$$\left.\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array}\right\} M.C.D.(24,60,72) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \quad \rightarrow \quad M.C.D.(24,60,72) = 12$$

## 1.6.2.- Mínimo común múltiplo (mcm)

El ***mínimo común múltiplo*** de varios números $a,b,c$ es el ***menor de los múltiplos comunes*** de dichos números y se representa por:

$$m.c.m.\ (a,b,c)$$

Para calcularlo:

1. Se descomponen los números en factores primos.
2. Se toman todos los factores primos (comunes y no comunes) elevado cada uno al mayor exponente con el que aparece.
3. Se multiplican los factores elegidos

Ejemplo

***Calcula el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 24, 60 y 72.***

En primer lugar descomponemos ambos números

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

Después cogemos todos los factores primos (se repitan o no) con el mayor exponente y los multiplicamos:

$$\left.\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array}\right\} m.c.m.(24,60,72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360 \quad \rightarrow \quad m.c.m.(24,60,72) = 360$$

Con todo esto podemos afirmar que:

- El m.c.m. de dos números primos siempre será su producto.
- Cuando uno de los números es múltiplo del otro, el m.c.m. es el mayor de ambos.

| Piensa y practica | |
|---|---|
| ***13.- Calcula el m.c.m. y el M.C.D. de 54, 72, 110*** | |
| ***14.- ¿Verdadero o falso?*** | |
| ***a)*** | *El mínimo común múltiplo de dos números es igual al mayor de ellos.* |
| ***b)*** | *El m.c.m. de dos números contiene los factores comunes a ambos y también los no comunes.* |
| ***c)*** | *m.c.m (1, k) = k* |
| ***d)*** | *Si a es múltiplo de b, mín.c.m. (a, b) = a.* |
| ***e)*** | *El mínimo común múltiplo de dos números primos es su producto.* |
| ***15.-*** *Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. Si los tres se encienden a las 18:30, ¿a qué hora volverán a coincidir?, ¿cuántas veces coincidirán en el siguiente cuarto de hora?* | |

## 2.07.- Resolución de problemas

Una de las actividades fundamentales en Matemáticas es la resolución de problemas. Conviene que distingamos entre ejercicio y problema. Cuando se plantea un ejercicio, se identifica de inmediato la técnica que se precisa para resolverlo. En cambio, un problema es una tarea cuyos términos y propósitos son comprensibles por la persona, pero no se sabe de momento como abordar.

La resolución de problemas ayuda a la construcción de conceptos y a establecer relaciones entre ellos. Pero no se aprende a resolver problemas por el hecho de haber aprendido determinados conceptos y algunos algoritmos de cálculo. Hemos de disponer de herramientas, técnicas específicas y pautas generales, que nos permitan enfrentarnos a ellos sin miedo. La mejor manera de aprender a resolver problemas eficazmente es resolver una cantidad suficiente. Este aprendizaje, como cualquier otro, lleva algún tiempo.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

**a)** Lectura y comprensión del enunciado.
**b)** Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
**c)** Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
**d)** Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
**e)** Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

### 2.7.1.- Problemas de números enteros.

**1.-** Una ganadería tiene 150 vacas que dan 8 litros diarios cada una. Para la obtención de 2 kg de mantequilla se necesitan 25 litros de leche. Si vende cada kg de mantequilla a 6 €, ¿cuánto dinero ingresa cada día por vender toda la mantequilla?

Todas las vacas dan: $150 \cdot 8 = 1.200$ litros de leche

Como para la obtención de 2 kg de mantequilla se necesitan 25 litros de leche, entonces dividiendo todos los litros entre 25 obtenemos las veces que se obtienen 2 kg de mantequilla:

$$1.200 : 25 = 48$$

Si obtenemos 48 veces 2 kg de mantequilla, obtenemos: $48 \cdot 2 = 96$ Kg de mantequilla

Y como cada kilo se vende a 6 €, entonces: $96 \cdot 6 = 576$ €

Así que **el ganadero ingresaría 576 € diarios por la venta de toda la mantequilla.**

**2.-** El señor García ha comprado 570 latas de calamares a 2€ la lata, y las quiere vender a 3 €. Como no las vende, decide ofertarlas a 3 latas por 8 €. ¿Pierde dinero?, en caso contrario indica cuánto gana

El señor García se ha gastado: $580 \cdot 2 = 1.160$ €

Si las vende en paquetes de 3 latas, venderá: $570 : 3 = 190$ Paquetes

Si cada paquete se vende a 8 €, ingresará: $190 \cdot 8 = 1.520$ €

Por tanto si gastó 1.160 € e ingresó 1.520 €, al final ganó: $1.520 - 1.160 = 360$ €

**Así que no pierde dinero, sino que gana 360 euros con la operación.**

**3.-** Juan tiene 25 euros. Su hermano Luis tiene 12 euros más que Juan y su hermana Lucía, 8 € menos que Luis. Entre los tres quieren comprar un regalo que cuesta 90 euros. ¿Tienen suficiente dinero?

Si Juan tiene 25 € y su hermano Luis 12 más que él, Luis tiene 25+12=37 €.

Si su hermana Lucía tiene 8 € menos que Luis, entonces Lucia tiene 37-8=29 €.

Así que entre los tres tienen:

Juan + Luis + Lucía = 25 + 37 + 29 =91 €

**Por tanto sí pueden comprar el regalo y además les sobraría 1 €.**

**4.-** En el museo de Ceuta la visita es guiada y entran 25 personas cada 25 minutos. Si la visita dura 90 minutos y el primer grupo entra a las 9 de la mañana, ¿Cuántos visitantes hay dentro del museo a las 10:00?, ¿y cuántos hay a las 11:15?

Para calcular los visitantes que entran y salen nos ayudaremos de una tabla:

| Hora | Entran | Salen | En el interior |
|---|---|---|---|
| 9:00 | 25 (G1) | | 25 |
| 9:25 | 25 (G2) | | 50 |
| 9:50 | 25 (G3) | | 75 |
| **10:00** | | | **75** |
| 10:15 | 25 (G4) | | 100 |
| 10:30 | | 25 (G1) | 75 |
| 10:40 | 25 (G5) | | 100 |
| 10:55 | | 25 (G2) | 75 |
| 11:05 | 25 (G6) | | 100 |
| **11:15** | | | **100** |

Los primeros visitantes entran a las 9:00, el segundo grupo a las 9:25 y el tercero a las 9:50, por tanto a las 10:00 de la mañana habrá tres grupos dentro del museo, y todavía no habrá salido ninguno. Por tanto serán:

$$25 \frac{personas}{\cancel{grupo}} \cdot 3 \; \cancel{grupos} = 75 \; personas$$

A las 11:15, como podemos ver en la tabla, han entrado 6 grupos y han salido dos, por tanto quedan en el interior 4 grupos:

$$25 \frac{personas}{\cancel{grupo}} \cdot (6-2) \; \cancel{grupos} = 25 \frac{personas}{\cancel{grupo}} \cdot 4 \; \cancel{grupos} = 100 \; personas$$

**Por tanto a las 10:00 hay 75 personas dentro del museo y a las 11:15 hay 100 personas.**

## 2.7.2.- Problemas de máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

La solución de muchos problemas cotidiano viene dada por el M.C.D. o el m.c.m. de dos o más números. Para resolver este tipo de problemas, debes identificar si se trata de un problema de M.C.D. o de m.c.m., efectuar los cálculos y comprobar si la solución tiene sentido.

Una regla que te puede ayudar a la hora de decidir si se trata de un problema de máximo común divisor o de mínimo común múltiplo es la siguiente:

- Si del enunciado del problema se deduce que el resultado debe ser mayor que los datos, tendrás que calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m.)

*Tipo: ¿A qué hora vuelven a coincidir?, cuantas cosas como mínimo, etc.*

- Si por el contrario se deduce que el resultado debe ser menor que los datos, tendrás que calcular el máximo común divisor (M.C.D.)

*Tipo: Paquetes lo más grande posibles, la pieza más grande, etc.*

**1.-** En una tienda disponen de 12 figuritas de cristal y 15 de metal. Desean hacer paquetes para regalar a los clientes, con el mismo número de figuras y con la mayor cantidad posible. ¿Cuántos paquetes tienen que hacer y con cuántas figuritas?

Si vamos a hacer paquetes quiere decir que el número de figuritas en cada paquete será menor que el número de figuritas de cada clase, por tanto calcularemos el máximo común divisor.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 15 = 3 \cdot 5 \qquad M.C.D.(12,15) = 3$$

Para calcular el máximo común divisor, una vez factorizados los números, cogemos los que se repiten con el menor exponente, y en este caso solo se repite el 3.

Así que en cada paquete meteremos 3 figuritas. Y $\begin{cases} 12:3=4 \text{ paquetes de figuritas de cristal} \\ 15:3=5 \text{ paquetes de figuritas de metal} \end{cases}$

**Por tanto haremos 9 paquetes (4 de figuritas de cristal y 5 de figuritas de metal) de tres figuritas cada uno.**

**2.-** En la panadería de la esquina hay napolitanas recién hechas cada 10 minutos, ensaimadas cada 15 minutos y rosquillas cada media hora. Si a las 11 y 50 de la mañana pude comprar recién hechos uno de cada. ¿A qué hora podré volver a repetir una compra igual?

Si las napolitanas se hacen cada 10 minutos, las ensaimadas cada quince y las rosquillas cada 30 minutos, coincidirán como mínimo cada 30 minutos, así que el número será mayor o igual que todos ellos, por tanto nos piden de calcular un múltiplo común a estos tres números, en concreto el mínimo común múltiplo de 10, 15 y 30. Así que los descomponemos en factores primos y cogemos los que se repiten y los que no con el exponente más grande:

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 3 & \end{array} \rightarrow 15 = 3 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 10 = 2 \cdot 5 \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$m.c.m.(10,15,30) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \text{ minutos}$$

Luego coinciden dentro de 30 minutos después de las 11:50, por tanto coinciden a las 12:20 del mediodía.

**Por tanto podremos comprar los tres tipos de tortas a las 12:20 horas.**

**3.-** ¿Cómo podemos envasar 40 litros de zumo de piña y 24 litros de naranja en recipientes iguales de la mayor capacidad posible?, ¿Cuántos envases en total necesitaremos?

Como nos dicen de envasarlos en recipientes iguales de la mayor cantidad posible, nos están pidiendo el mayor de los divisores común de los números 40 y 24, o lo que es los mismo, el máximo común divisor de 40 y 24, por tanto, descomponemos en factores primos el 40 y el 24 y cogemos los que se repiten con el exponente más pequeño:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \to \quad \begin{cases} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 40 = 2^3 \cdot 5 \end{cases} \quad \to \quad M.C.D.(24,40) = 2^3 = 8 \ litros$$

Así que la capacidad máxima del recipiente será de 8 litros. Y por tanto, necesitaremos:

$$24 \ litros \ de \ zumo \ de \ naranja = 24 : 8 = 3 \ envases$$
$$40 \ litros \ de \ zumo \ de \ piña = 40 : 8 = 5 \ envases$$

**Por tanto necesitaremos 3+5 = 8 envases de 8 litros.**

**4.-** Fátima organiza una fiesta para sus amigos, para ello, prepara unas tarjetas de invitación que enviará en sobres por correo. Las tarjetas se venden en paquetes de 6 unidades y cuestan 20 dirhams el paquete. Los sobres se venden en paquetes de 8 y cuestan 10 dirhams el paquete.

**a)** ¿Cuál es el número mínimo de personas que invitará para que no le sobren ni tarjetas ni sobres?

Si los sobres se venden de 8 en 8 y las tarjetas de 6 en 6, tenemos que comprar el menor de los múltiplos comunes a estos dos números, es decir el m.c.m. de 6 y 8 para que no sobren ni sobres ni tarjetas.

$$\left.\begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \end{array}\right\} \quad \to \quad m.c.m\ (6,8) = 2^3 \cdot 3 = 24 \text{ personas}$$

Para calcular el mínimo común múltiplo, una vez factorizados los números, cogemos los que se repiten y los que no se repiten con el mayor exponente, y en este caso serían el $2^3$ y el 3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sobres** | 8 | 16 | **24** | 32 | 40 | 48 |
| **Tarjetas** | 6 | 12 | 18 | **24** | 30 | 36 |

**Así que Fátima invitará a 24 personas.**

**b)** ¿Cuánto se gastará en las invitaciones?

- Si cada paquete de tarjetas cuesta 20 dh y se compran 24:6=4, en tarjetas se gasta 20·4=80 dh
- Si cada paquete de sobres cuesta 10 dh y se compran 24:8=3, en sobres se gasta 10·3=30 dh

**Por tanto Fátima se gasta 80+30 =110 dh**

## 1.08.- Autoevaluación

**1.-** Calcula:

a) $37-6{\cdot}5-5+56:7=$

b) $(64-42):11+63:(35-26)=$

c) $(3-8)+(5-3)+(2-6)-(3+4)-(1+7)=$

d) $(9-13)-[5-(2-8+3)-(4+3)]=$

e) $(-20):(-10)-15:(-5)+8\cdot 3=$

f) $0\cdot 12+[6-6\div 6]-4+2\cdot 1+3=$

**2.-** Responde y justifica:

**a)** ¿Es 31 divisor de 744?

**b)** ¿Es 999 múltiplo de 99?

**3.-** Escribe.

**a)** Los cuatro primeros múltiplos de 12.

**b)** Todos los divisores de 60.

**4.-** Escribe los números primos comprendidos entre 20 y 40.

**5.-** Indica cuáles de estos números son múltiplos de 2, cuáles de 3, cuáles de 5 y cuáles de 10:

897 - 765 - 990 – 2.713 – 6.077 – 6.324 – 7.005

**6.-** Descompón en factores primos los números 150 y 225.

**7.-** Calcula.

**a)** M.C.D. (150, 225)

**b)** mín.c.m. (150, 225)

**8.-** Calcula mentalmente M.C.D. (15, 20, 25) y m.c.m. (15, 20, 25).

**9.-** Se desea poner rodapié de madera en dos de las paredes de una habitación rectangular de 420 cm × 540 cm. Para no tener que cortar, se van a encargar en la carpintería tramos de listón, todos iguales y lo más largos que sea posible, que encajen en número exacto en ambas paredes. ¿Cuánto debe medir cada uno de los trozos a encargar en la carpintería?

**10.-** En una fábrica se oye el escape de una válvula de gas cada 45 segundos y el golpe de un martillo pilón cada 60 segundos. Si se acaban de oír ambos sonidos simultáneamente, ¿cuánto tardarán en coincidir de nuevo?