Unidad Didáctica 2

FRACCIONES

2º ESO

En esta unidad vamos a:

- **Comprender el concepto y la utilidad de las fracciones.**
- **Identificar y entender las fracciones equivalentes.**
- **Saber reducir a común denominador**
- **Comparar fracciones.**
- **Realizar operaciones básicas de fracciones.**
- **Realizar operaciones combinadas de fracciones.**
- **Resolver problemas de fracciones.**

Sumario

2.0.- Lectura comprensiva

¿Para qué sirven las fracciones?

Cuando somos pequeños nos cuestionamos todo, preguntamos el porqué de cualquier cosa que descubrimos y ponemos en duda todo lo que aprendemos, cuántos profesores no han escuchado alguna vez la típica queja de un alumno preguntando "*¿ y esto para que sirve en la vida ?*"

La curiosidad a temprana edad es una de las más grandes cualidades que tenemos los humanos, así que no debemos de quitársela a nuestros alumnos, mejor busquemos respuestas más creativas que esa de: "*porque sí, porque todo lo que aprendemos puede ser aplicado en algún momento de nuestras vidas*"

Una buena respuesta a esta pregunta podría ser que las fracciones las utilizamos a diario, aunque a veces no nos damos ni cuenta, pero tienen vital importancia en la vida cotidiana.

Todos sabemos lo que es una fracción, es la relación entre una parte y el todo.

Desde siempre el ser humano ha tenido la necesidad de comunicarse, contar, medir o repartir para asegurar su supervivencia. Y aunque muchos piensen que las fracciones no tienen un uso común y que sólo sirven para hacer sufrir a los estudiantes, es conveniente recordar algunas situaciones de la vida cotidiana en las que seguro las hemos empleado:

1.- Al cocinar o seguir las instrucciones de una receta*: 1/2 taza de azúcar o 1/4 de kilo de harina.*

2.- Cuando vamos al supermercado y queremos adquirir productos: *1/2 kilo de manzanas, ¾ de kilo de boquerones.*

3.- Al repartir alimentos entre muchas personas*: La tercera parte de una pizza o la mitad del pastel.*

4.- Al medir distancias o la velocidad: *Estoy a 1/2 metro de tu casa.*

5.- Al medir el tiempo*: En 1/2 hora empieza la película, Son las doce menos cuarto.*

Las fracciones también dieron origen a la posibilidad de hacer operaciones matemáticas más complejas como las raíces cuadradas, trigonometría, que han generado los más grandes avances de la ciencia y la tecnología.

Es por eso, que debemos llevar a los alumnos a mantener una mente abierta y llena de curiosidad, porque todo lo que aprendan les servirá en su desarrollo lógico y mental.

Lee nuevamente el texto anterior y responde a las siguientes preguntas:

1.- ¿De qué habla el texto?

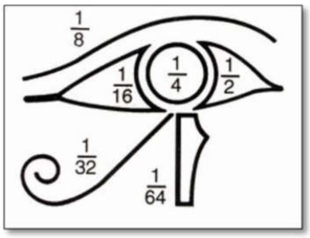
2.- ¿Desde cuándo se utilizan las fracciones?

3.- ¿Sigues pensando que las fracciones no sirven para nada?

4.- Pon algún otro ejemplo del uso de las fracciones.

2.01.- Introducción

En el Antiguo Egipto se calculaba utilizando fracciones cuyos denominadores son enteros positivos; son las primeras fracciones utilizadas para representar las «partes de un entero», por medio del concepto de recíproco de un número entero. Esto equivale a considerar fracciones como: un medio, un tercio, un cuarto, etc., de ahí que las sumas de fracciones unitarias se conozcan como fracción egipcia. Se puede demostrar además, que cualquier número racional positivo se puede escribir como fracción egipcia. El jeroglífico de una boca abierta denotaba la barra de fracción (/), y un arte numérico escrito debajo de la "boca abierta", denotaba el denominador de la fracción.



Los babilonios utilizaban fracciones cuyo denominador era una potencia de 60. El sistema chino de numeración con varillas permitía la representación de fracciones. Los griegos y romanos usaron también las fracciones unitarias, cuya utilización persistió hasta la época medieval. *Diofanto de Alejandría* (siglo IV) escribía y utilizaba fracciones. Posteriormente, se introdujo la «raya horizontal» de separación entre numerador y denominador, y el numerador dejó de restringirse al número uno solamente, dando origen a las llamadas fracciones vulgares o comunes. Finalmente, se introducen las «fracciones decimales», en donde el denominador se escribe como una potencia de diez.

Se cree que las fracciones decimales eran conocidas por los matemáticos chinos en el siglo I, y que de ahí se extendió su uso a medio Oriente y Europa. *J. Lennart Berggren* nota que un sistema posicional con fracciones decimales fue utilizado por el matemático árabe *Abu'l-Hasan al-Uqlidisi* en el siglo X.

Al-Khwarizmi introduce las fracciones en los países islámicos en el siglo IX. La forma de representar las fracciones provenía de la representación tradicional china, con el numerador situado sobre el denominador, pero sin barra separadora. Esta forma de escritura de las fracciones con el numerador arriba y el denominador abajo, sin barra horizontal, fue utilizada también en el siglo X por *Abu'l-Hasan al-Uqlidisi* y en el siglo XV por *Jamshīd al-Kāshī* en su trabajo *La llave de la aritmética*.

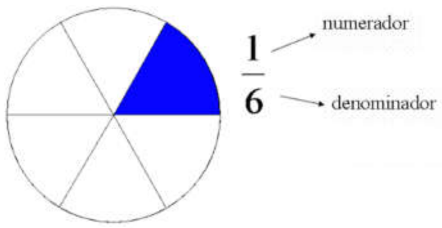
Leonardo de Pisa (Fibonaccci) en su *Liber Abaci* (Libro del Ábaco), escrito en 1202, expone una teoría de los números fraccionarios. Las fracciones se presentan como fracciones egipcias, es decir, como suma de fracciones con numeradores unitarios y denominadores no repetidos. Además, describe su uso y las desarrolla dentro del marco moderno de las series matemáticas.

El uso moderno fue definitivamente introducido por *Simon Stevin* en el siglo xvi.

2.02.- Fracciones. Definición.

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ en la que a y b son números enteros llamados numerador y denominador.

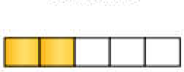
$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$



Una Fracción se puede interpretar de distintas formas:

<u>Fracción como parte de la unidad:</u> el denominador *b* representa el número de partes iguales en que se divide la unidad. Y en numerador *a* representa el número de partes que se toman.

UNIDAD

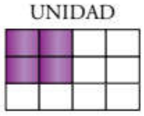


$\frac{2}{5} \rightarrow$ dos quintos

UNIDAD

$\frac{1}{6} \rightarrow$ *un sexto*

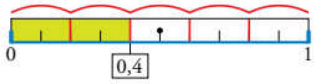
UNIDAD



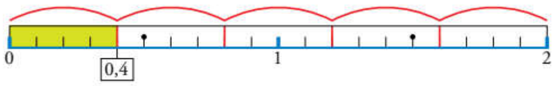
$\frac{4}{12} \rightarrow$ *cuatro doceavos*

Fracción como cociente: para calcular su valor se divide el numerador entre el denominador.

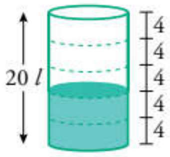
$\frac{2}{5}$ → La unidad se divide en 5 partes y se toman 2



$2:5$ → Dividimos 2 unidades entre 5 → $2:5=0{,}4$



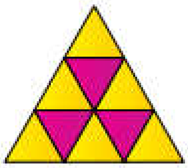
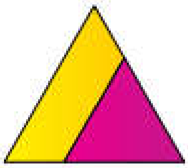
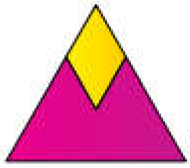
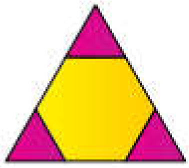
Fracción como operador: Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma. Por ejemplo, si el bidón tiene una capacidad de 20 litros:



En el bidón hay $\frac{2}{5}$ de 20 litros. $\begin{cases} \frac{1}{5}\ de\ 20 = 20:5 = 4 \\ \frac{2}{5}\ de\ 20 = 4\cdot 2 = 8 \end{cases}$ ➔ $\frac{2}{5} de\ 20\ litros = (20:5)\cdot 2 = 8$

Para calcular la fracción de un número, se divide el número entre el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador.

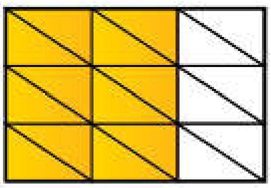
Decimos que una fracción es ***propia*** si el numerador es más pequeño que el denominador mientras que es ***impropia*** en el caso contrario.

Piensa y practica			
1.- Escribe debajo la fracción que ocupa la parte amarilla en cada figura:			
			

2.03.- Fracciones equivalentes.

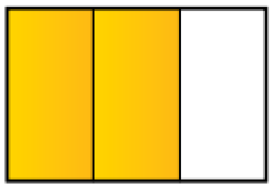
Decimos que dos fracciones son ***equivalentes*** cuando expresan la misma porción de unidad.

Ejemplo



$\frac{12}{18}$

$\frac{6}{9}$



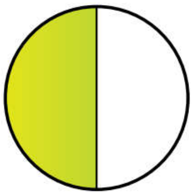
$\frac{1}{3}$

Las fracciones $\frac{12}{18}$, $\frac{6}{9}$ y $\frac{1}{3}$ son equivalentes porque como vemos representan la misma porción.

2.3.1.- Obtención de fracciones equivalentes

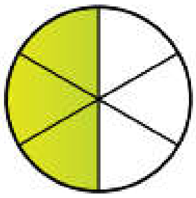
Existen dos formas sencillas de obtener fracciones equivalentes a otra dada. Para ello se multiplican (*Método de* ***Amplificación***), o se dividen (*Método de* ***Simplificación***), los dos términos de una fracción por el mismo número.

Ejemplo

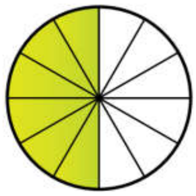


$\frac{3}{6}=\frac{3:3}{6:3}=\frac{1}{2}$

Simplificación



$\leftarrow \quad \frac{3}{6} \quad \rightarrow$

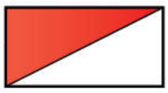
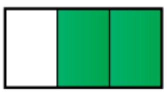
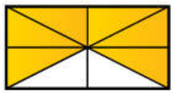
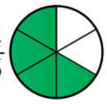
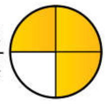


$\frac{3}{6}=\frac{3\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{6}{12}$

Amplificación

Las fracciones $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12}$ son ***equivalentes*** porque como vemos representan la misma porción.

Si se multiplican, o se dividen, los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene otra fracción equivalente a la primitiva. Es decir, el valor de la fracción no varía.

Piensa y practica					
2.- Busca, entre las siguientes, tres pares de fracciones equivalentes:					
$\frac{1}{2}$ 	$\frac{2}{3}$ 	$\frac{6}{8}$ 	$\frac{4}{6}$ 	$\frac{3}{4}$ 	$\frac{2}{4}$ 

2.3.2.- Fracción irreducible

La ***fracción irreducible*** de una fracción dada es otra fracción equivalente a ella en la que el numerador y el denominador no tienen divisores comunes a excepción de la unidad. Es decir que la fracción no se puede simplificar más.

Ejemplo

$$\frac{60}{90} \xrightarrow[\text{por 5}]{\text{Dividimos}} \frac{12}{18} \xrightarrow[\text{por 3}]{\text{Dividimos}} \frac{4}{6} \xrightarrow[\text{por 3}]{\text{Dividimos}} \frac{2}{3} \rightarrow \textit{Fracción irreducible}$$

La forma más rápida de conseguir la fracción irreducible de otra es dividir numerador y denominador por el mayor de todos sus divisores comunes, es decir, por el máximo común divisor.

Ejemplo

$$\frac{60}{90} \rightarrow \begin{cases} 60 = 6\cdot 10 = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5 = 2^2\cdot 3\cdot 5 \\ 90 = 9\cdot 10 = 3^2\cdot 2\cdot 5 = 2\cdot 3^2\cdot 5 \end{cases} \rightarrow M.C.D\,(60,90) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30 \rightarrow \frac{60}{90}=\frac{60:30}{90:30}=\frac{2}{3}\begin{cases} \textit{Fracción} \\ \textit{Irreducible} \end{cases}$$

Una vez visto todo esto, y como resumen, existen 3 formas de saber si dos fracciones son equivalentes:

1.- Dos fracciones son equivalentes si al multiplicar en cruz obtenemos el mismo resultado:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$$

ejemplo : $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{15}$ son equivalentes porque $1\cdot 15 = 5\cdot 3 \rightarrow 15 = 15$

$\frac{2}{4} \times \frac{3}{6}$ $\quad 2\cdot 6 = 12$ $\quad 4\cdot 3 = 12$

Los productos son iguales.

Las fracciones son equivalentes $\rightarrow \frac{2}{4}=\frac{3}{6}$

2.- Dos fracciones son equivalentes si tienen la misma fraccción irreducible:

$$\textit{ejemplo}: \frac{3}{9} \; y \; \frac{5}{15} \text{ son equivalentes porque } \begin{cases} \frac{3}{9} = \frac{3:3}{9:3} = \frac{1}{3} \\ \frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

3.- Dos fracciones son equivalentes si al realizar la división obtenemos el mismo resultado:

$$\textit{ejemplo}: \frac{1}{4} \; y \; \frac{5}{20} \text{ son equivalentes porque } \begin{cases} 1:4 = 0,25 \\ 5:20 = 0,25 \end{cases} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$$

2.3.3.- Reducción de fracciones a común denominador

Reducir fracciónes a común denominador consiste en obtener fracciones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador. Ese nuevo denominador será el mínimo común múltiplo de los antiguos denominadores.

Para calcular los nuevos numeradores dividiremos el nuevo denominador entre el antiguo y el resultado lo multiplicaremos por el antiguo numerador.

Nuevo numerador = Nuevo denominador : antiguo denominador x nuevo numerador

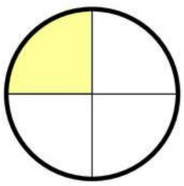
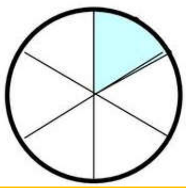
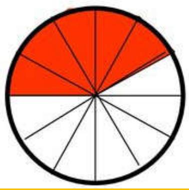
Ejemplo

Reducir a común denominador las fracciones $\frac{2}{5}$ *y* $\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} \; y \; \frac{1}{3} \rightarrow m.c.m.(5,3) = 3{\cdot}5 = 15 \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{5} = \frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:5){\cdot}2}{15} = \frac{3{\cdot}2}{15} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \\ \frac{1}{3} = \frac{?}{15} \rightarrow \frac{(15:3){\cdot}1}{15} = \frac{5{\cdot}1}{15} = \frac{5}{15} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{5}{15} \end{cases}$$

De forma gráfica podemos verlo más claro:

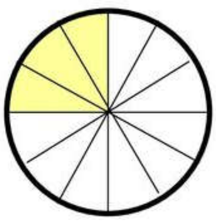
Dadas las fracciones:

	$=\frac{1}{4}$		$=\frac{1}{6}$		$=\frac{5}{12}$

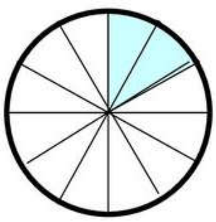
Si calculamos el mínmo común múltiplo de los denominadores 4, 6 y 12, tenemos:

$$4 = 2^2 \qquad 6 = 2{\cdot}3 \qquad 12 = 2^2{\cdot}3 \qquad \Rightarrow \qquad m.c.m.(4,6,12) = 2^2{\cdot}3 = 12$$

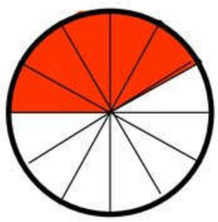
Si dividimos las figuras en 12 partes obtenemos:



$\frac{1}{4} \xrightarrow[x3]{x3} \frac{3}{12}$



$\frac{1}{6} \xrightarrow[x2]{x2} \frac{2}{12}$



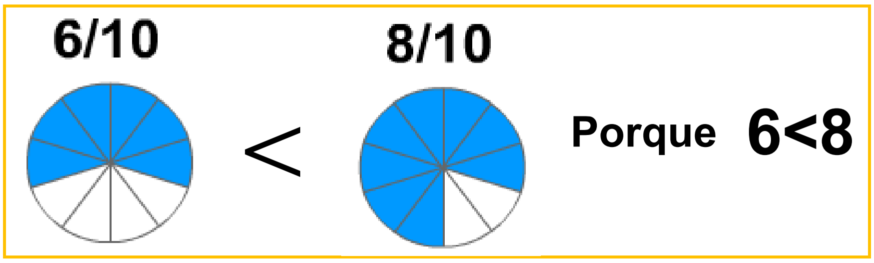
$\frac{5}{12} \xrightarrow[x1]{x1} \frac{5}{12}$

Y ya tenemos las tres fracciones con el mismo denominador.

2.04.- Comparación de fracciones.

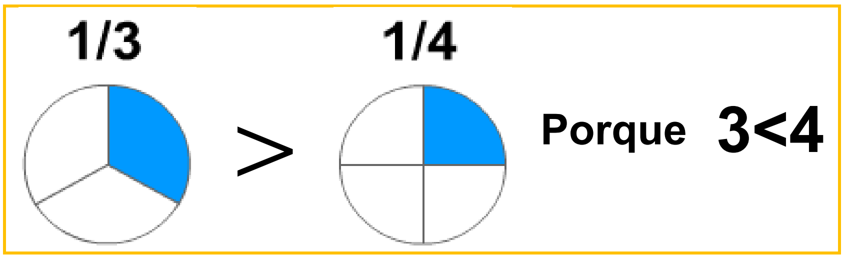
Comparar fracciones es ver cual de ellas es mas grande o más pequeña. Para ello seguiremos los siguientes criterios:

- Si tienen el ***mismo denominador***, es mayor la fracción que tiene mayor el numerador:



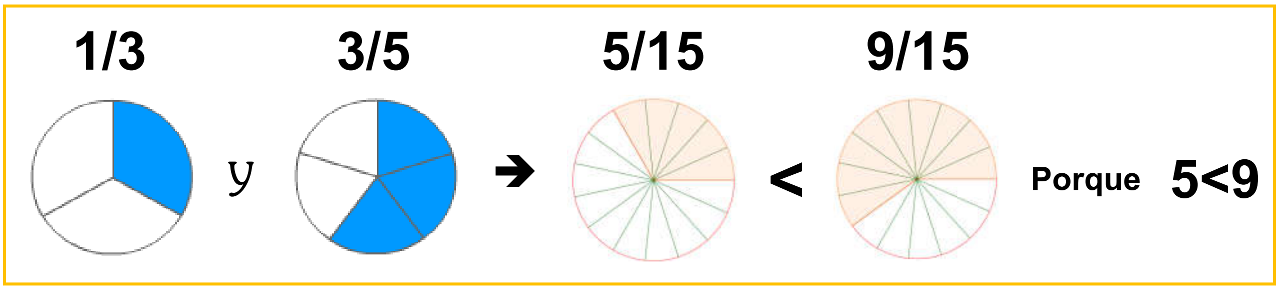
6/10 es menor que 8/10 porque al tener el mismo denominador nos fijamos en los numeradores y 6<8.

- Si tienen el ***mismo numerador*** es mayor la que tiene menor denominador:



1/4 es menor que 1/3 porque al tener el mismo numerador nos fijamos en los denominadores y 3<4.

- Si tienen distinto numerador y denominador, se reducen primero a común denominador, y después se comparan los numeradores:



1/3 es menor que 3/5 porque al reducir a común denominador 5/15 es menor que 9/15 ya que 5<9.

Piensa y practica					
3.- Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:					
$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{30}$

2.05.- Operaciones con fracciones.

Una vez visto el concepto de fracción, de redución de fracciones a cpmún denominador y de fracciones equivalentes vamos a ver como se realizan las operaciones con fracciones:

2.5.1.- Suma y resta de fracciones

Con igual denominador:

Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, simplemente, se suman o se restan los numeradores y se deja intacto el denominador:

Ejemplo

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5} \qquad \frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{2+4}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{4}{9}+\frac{7}{9}=\frac{4+7}{9}=\frac{11}{9} \qquad \frac{8}{15}+\frac{13}{15}=\frac{8+13}{15}=\frac{21}{15}$$

Con distinto denominador:

Para sumar o restar fracciones con diferente denominador, primero se reducen a común denominador y, después, se suman o se restan los numeradores dejando el nuevo denominador. Si alguno de los sumandos es entero lo transformaremos en una fracción de denominador 1.

Ejemplo

$$\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}_{m.c.m(4,5)=20}=\begin{cases}\dfrac{1}{5}=\dfrac{4\cdot1}{4\cdot5}=\dfrac{4}{20}\\[2mm] \dfrac{3}{4}=\dfrac{5\cdot1}{5\cdot4}=\dfrac{5}{20}\end{cases} \rightarrow \frac{1}{5}+\frac{3}{4}=\frac{4}{20}+\frac{5}{20}=\frac{9}{20}$$

Los sumandos enteros se transforman en fracciones de denominador 1

$$\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$$

Siempre que se opera con fracciones tenemos que dar el resultado en la *fracción irreducible*, por tanto, si se puede reducir siempre se reducirá porque si no lo haces tu profesor te bajará la nota.

Ejemplo

$$\underbrace{\frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}}_{m.c.m(2,5,6)=30}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{7}{6}=\dfrac{5\cdot7}{5\cdot6}=\dfrac{35}{30} & y & 3=\dfrac{3}{1}=\dfrac{30\cdot3}{30\cdot1}=\dfrac{90}{30}\\[2mm] \dfrac{5}{2}=\dfrac{15\cdot5}{15\cdot2}=\dfrac{75}{30} & y & \dfrac{1}{5}=\dfrac{6\cdot1}{6\cdot5}=\dfrac{6}{30}\end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}=\frac{35}{30}+\frac{75}{30}-\frac{90}{30}+\frac{6}{30}=$$

$$=\frac{35+75-90+6}{30}=\frac{26}{30} \xrightarrow{\text{Simplificando}} =\frac{26:2}{30:2}=\frac{13}{15} \underset{\text{por tanto}}{\rightarrow} \frac{7}{6}+\frac{5}{2}-3+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}$$

Además es importante no esperar hasta el final para simplificar sino que podemos (mas bien debemos) hacerlo en cualquier momento, incluso al principio.

Ejemplo

$$\frac{24}{10}+\frac{12}{30}-\frac{15}{25}=\underset{\substack{\text{Simplificamos antes de operar}\\ \text{para facilitar los cálculos}\\ \text{(Fracción irreducible)}}}{=}\begin{cases}\dfrac{24}{10}=\dfrac{12}{5}\\[2mm] \dfrac{12}{30}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}\\[2mm] \dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}\end{cases} \underset{\substack{\text{Y Observamos que no es necesario}\\ \text{reducir a común denominador porque}\\ \text{ya tienen el mismo denominador.}\\ \text{SIMPLEMENTE OPERAMOS}}}{\rightarrow} =\frac{12}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=\frac{11}{5}$$

2.5.2.- La fracción opuesta:

Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene siempre una fracción opuesta, que es de la forma $-\frac{a}{b}$ ó $\frac{-a}{b}$ y nunca $\frac{a}{-b}$.

$$\text{Opuesta de } \frac{a}{b} \rightarrow -\frac{b}{a}$$

Dos fracciones son ***opuestas*** si la suma de las dos es cero.

Ojo !!: Nunca se pone el número negativo en el denominador (debajo). Siempre en el numerador (arriba) o delante.

2.5.3.- Multiplicación de fracciones:

El producto de dos o más fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

Para multiplicar fracciones:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad \begin{matrix}\leftrightarrow \text{ Se multiplican los numeradores.}\\ \leftrightarrow \text{ Se multiplican los denominadores.}\end{matrix}$$

ejemplo : $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}$

De igual forma, siempre que se multipliquen fracciones tenemos que dar el resultado en la *fracción irreducible*, por tanto, si se puede reducir siempre se reducirá y no necesariamente al final como vimos en el apartado anterior.

Ejemplo

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{15}{10}\underset{\text{Simplificamos antes de operar}}{=}\frac{7}{4}\cdot\frac{15:5}{10:5}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 2}=\frac{21}{8}$$

$$3\cdot\frac{4}{7}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 7}=\frac{12}{7}$$

2.5.4.- Fracción inversa o inversa de una fracción:

Toda fracción distinta de cero tiene inversa, y esta se consigue dándole la vuelta, el numerador pasa a ser el denominador y viceversa.

$$\text{Inversa de } \frac{a}{b} \;\rightarrow\; \frac{b}{a}$$

Dos fracciones son ***inversas*** cuando su producto es igual a la unidad.

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{b}{a} \quad \text{son fracciones inversas porque } \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{b}}{\cancel{b}\cdot\cancel{a}}=1$$

2.5.5.- División de fracciones:

El cociente de dos o más fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda y como denominador el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

Para dividir dos fracciones:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad\leftrightarrow \text{ Se multiplican los términos cruzados.}$$

ejemplo : $\frac{3}{5}:\frac{7}{4}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}=\frac{12}{35}$

Ejemplo

$$\frac{8}{15}:\frac{4}{5}=\frac{8\cdot 5}{15\cdot 4}=\frac{40}{60}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{6}:6=\frac{2}{6}:\frac{6}{1}=\frac{2\cdot 1}{6\cdot 6}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}=\frac{8}{9}$$

2.5.6.- Potencia de una fracción:

Para elevar una fracción a una potencia, elevamos el numerador y el denominador a esa potencia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{a}{b}}^{c\ \text{veces}} = \frac{a^c}{b^c} \qquad \text{ejemplo}: \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \overbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}^{3\ \text{veces}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

En una potencia de base una fracción y exponente natural:

- Si la base es positiva, la potencia es positiva:

$$\boxed{\text{ejemplo}: \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} > 0 \quad \rightarrow \quad + \qquad \text{Positivo}}$$

- Si la base es negativa, la potencia es: $\begin{cases} \textit{Positiva} \text{ si el exponente es par} \\ \textit{Negativa} \text{ si el exponente es impar} \end{cases}$

$$\boxed{\text{ejemplos}: a)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 = \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9} > 0 \quad \rightarrow \quad + \quad \text{Positivo} \qquad b)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27} < 0 \quad \rightarrow \quad - \quad \text{Negativo}}$$

En el capítulo siguiente veremos las potencias y las raíces de fracciones de forma más amplia. Aquí solo hacemos una pequeña introducción.

2.06.- Operaciones combinadas de fracciones.

Al igual que con las operaciones combinadas de números naturales y enteros, para realizar operaciones con fracciones hay que seguir el orden de prioridad en las operaciones:

1.- Se realizan las operaciones que hay entre paréntesis y corchetes, de dentro a fuera.
2.- Se realizan las potencias.
3.- Se resuelven las multiplicaciones y divisiones, de izquierda a derecha.
4.- Se resuelven las sumas y restas, de izquierda a derecha.

Ejemplo

$$a)\ \frac{12}{13}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{7}\right)-\frac{2}{5} = \frac{12}{13}\cdot\underbrace{\left(\frac{21}{28}-\frac{8}{28}\right)}_{\text{Resolvemos el paréntesis haciendo el m.c.m.}}-\frac{2}{5} = \underbrace{\frac{12}{\cancel{13}}\cdot\left(\frac{\cancel{13}}{28}\right)}_{\text{Después el producto, simplificando a la fracción irreducible}}-\frac{2}{5} = \underbrace{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}}_{\text{Por último hacemos la resta}} = \underbrace{\frac{15}{35}-\frac{14}{35}}_{\text{Para ello hacemos el m.c.m.}} = \frac{1}{35}$$

$$b)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{32}{40}-\frac{5}{40}\right)}_{\text{Resolvemos el paréntesis haciendo el m.c.m.}} = \frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{27}{40}\right)}_{\text{Después el producto, simplificando a la fracción irreducible}} = \frac{1}{2}+\frac{9}{40} = \underbrace{\frac{20}{40}+\frac{9}{40}}_{\text{Por último hacemos la suma con la ayuda del m.c.m.}} = \frac{29}{40}$$

$$c)\ \left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right]:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\left(\frac{6}{9}-\frac{1}{9}\right)+13\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)^2\right]}_{\text{Primero hacemos el corchete y dentro de él los paréntesis}}:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+13\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]}_{\text{Antes de sumar tenemos que hacer la potencia}}:\left(-\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+13\left(\frac{1}{9}\right)\right]}_{\text{después el producto}}:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\left(\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{13}{9}\right)\right]}_{\text{ahora sumamos}}:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\left[\frac{18}{9}\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\text{ahora dividimos}} = 2:\left(-\frac{2}{3}\right) = \underbrace{\frac{-6}{2}}_{\text{y simplificamos si se puede}} = -3$$

2.07.- Resolución de problemas con fracciones

Como ya sabéis, la resolución de problemas es considerada la parte más esencial del aprendizaje de matemáticas. Mediante la resolución de problemas, experimentareis la utilidad de las Matemáticas en el mundo que os rodea aplicando de forma práctica los conocimientos teóricos que ya tenéis.

Es evidente que para poder resolver problemas de matemáticas hay que poseer un buen conocimiento de los conceptos teóricos.

En general, a la hora de resolver problemas en matemáticas, seguiremos el siguiente esquema:

- **a)** Lectura y comprensión del enunciado.
- **b)** Análisis de los datos del enunciado. (A veces es importante ayudarse con un dibujo)
- **c)** Plantear las operaciones a realizar y realizarlas sin olvidar el orden de prioridad.
- **d)** Resolver el problema paso a paso intentando explicar los pasos seguidos para resolverlo y dando la solución pedida.
- **e)** Evaluar e interpretar los resultados. ¿Son lógicos? ¿se corresponden con lo pedido en el enunciado? ¿puedo comprobar si la solución es correcta?

2.7.1.- Ejemplos de problemas de fracciones.

1.- Las tres quintas partes de los alumnos de mi clase nos vamos de excursión. Si en el autobús somos veinticuatro alumnos, tres profesores y el conductor. ¿Cuántos alumnos hay en mi clase?

El enunciado dice que los $\frac{3}{5}$ de los alumnos son 24 alumnos,

Entonces $\frac{1}{5}$ (que es la tercera parte de $\frac{3}{5}$) de los alumnos serán 8 alumnos (que es la tercera parte de 24)

Y por tanto los $\frac{5}{5}$ que son todos los alumnos de la clase serán 5·8=40 alumnos (que son 5 veces 1/5)

Por tanto en la clase hay 40 alumnos.

2.- Tres clases del IES ABYLA salen en una actividad extraescolar para repoblar un monte. Uno de ellos está dispuesto a repoblar 2/5 y otro 3/8. ¿Qué parte ha de repoblar el tercer grupo?

Si sumamos lo que va a repoblar cada uno de los dos grupos obtenemos: $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}=\frac{31}{40}$

Quiere decir que los dos grupos van a repoblar 31 partes de 40, por tanto para el otro grupo quedan para repoblar:

$$1-\frac{31}{40}=\frac{40}{40}-\frac{31}{40}=\frac{9}{40}$$

Así que el tercer grupo va a repoblar 9/40 del monte.

3.- Mi cortijo tiene un depósito de agua que se llena con agua de lluvia con una capacidad de 21.000 litros. Si gastamos en una semana los 3/7, ¿qué fracción de agua queda en el depósito?, ¿Cuántos litros quedan?

Si gastamos 3 partes de 7, entonces nos quedan 4 partes de 7: Quedan $\frac{4}{7}$

Y si quedan $\frac{4}{7}$ de 21.000 litros, entonces quedan:

$$\frac{4}{7}\ de\ 21.000 = \frac{4}{7}\cdot 21.000 = 4\cdot\frac{21.000}{7} = 4\cdot 3.000 = 12.000 \text{ litros}$$

Quedan 4/7 del depósito que son 12.000 litros de agua.

4.- Un aventurero realiza 2/5 de un viaje en todoterreno, 1/3 a caballo y el resto andando. Si andando recorre 80 km, ¿cuál es la longitud total de su recorrido?, ¿cuántos kilómetros ha realizado en todoterreno?

Si realiza 2/5 en 4x4 y 1/3 a caballo, ha realizado: $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15}$, por tanto lo queda por recorrer:

$$1-\frac{11}{15}=\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$$

Así que esos 4/15 será lo que recorre andando, es decir, los 80 km.

$$Si\ \frac{4}{15}\ son\ 80\ km \quad \rightarrow \quad \frac{1}{15}\ son \frac{80}{4} = 20\ km \quad y \quad \frac{15}{15} son\ 20\cdot 15 = 300\ km$$

Así que la longitud total del recorrido es de 300 km, y en todoterreno ha recorrido:

$$\frac{2}{5} de\ 80km = \frac{2}{5}\cdot 80 = 32\ km$$

Por tanto 300 km de recorrido total y 32 km recorridos en todoterreno.

5.- Tu profesor de matemáticas planea un viaje para el puente de 4 días de finales del mes de febrero. El primer día recorrerá las 2/7 partes de su viaje, el segundo día los 3/10, el tercero los 5/14 y el cuarto concluirá su viaje haciendo 20 Km. ¿Cuál es el distancia total que va a recorrer? ¿Cuántos kilómetros recorre cada día?

Si sumamos lo recorrido por el profesor en los tres primeros días, tenemos:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{10}+\frac{5}{14}=\frac{20}{70}+\frac{21}{70}+\frac{25}{70}=\frac{66}{70}=\frac{33}{35}$$

Por tanto lo quedan por recorrer 2/35, así que esos 2/35 se corresponden con lo recorrido el último día, los 20 km, así que en total recorrerá:

$$\frac{2}{35}\quad son \quad 20km \quad \rightarrow \quad \frac{1}{35} \quad son \quad 20:2 = 10km \quad y \quad \frac{35}{35} \quad son \quad 10\cdot 35 = 350\ km$$

- El primer día recorrerá $\frac{2}{7} de\ 350 = \frac{2}{7}\cdot 350 = 100\ km$
- El segundo día recorrerá $\frac{3}{10} de\ 350 = \frac{3}{10}\cdot 350 = 105\ km$
- El tercer día recorrerá $\frac{5}{14} de\ 350 = \frac{5}{14}\cdot 350 = 125\ km$

Así que el viaje tendrá una distancia total de 350 km y recorrerá 100 km el 1º día, 105 km el 2º, 125 km el 3º día y 20 km el cuarto.

2.08.- Autoevaluación

1.- Ordena de mayor a menor:

$$\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{7}{2},\frac{5}{3},\frac{7}{10}$$

2.- Calcula.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$ b) $\frac{5}{9}-\frac{7}{12}+\frac{11}{18}$

3.- Opera:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{3}\cdot 3$ d) $\frac{2}{3}:4$

4.- Resuelve paso a paso:

a) $\frac{5}{2}+2\cdot\left(7-\frac{1}{3}\right)-8$ b) $3+\frac{2}{7}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$

5.- Calcula paso a paso:

a) $3+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}+3\cdot\left(4-\frac{2}{3}\right)\right]$ b) $5:\left(\frac{1}{2}+1\right)^2-3:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

6.- Las latas de refresco tienen un volumen de 1/3 de litro. ¿Cuántas latas son necesarias para envasar 20000 litros de refresco?

7.- Un sexto de los alumnos de una clase son 5. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?

8.- ¿Cuántos vasos de un octavo de litro se necesitan para llenar una botella de tres cuartos de litro?

9.- Un quiosco recibe de madrugada 225 revistas. Vende por la mañana 1/3 del total, y, por la tarde, 2/5 también del total. ¿Cuántas revistas le quedan al finalizar la jornada?

10.- Un señor sale de casa con 60 €. Gasta en un vestido 1/3 de su dinero, y, en el mercado, 2/5 de lo que le quedaba.

a) ¿Qué fracción de dinero le queda?
b) ¿Cuánto dinero le queda?